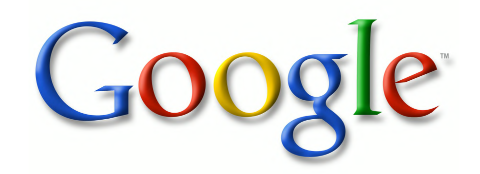


B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XXIV

A. E. H. LOVE

# LEHRBUCH DER ELASTIZITÄT

DEUTSCH VON A. TIMPE

# B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlaßten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Enzyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disziplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Literaturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber muß auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disziplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welchen hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und literarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem großen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Literatur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner gibt sich der Hoffnung hin, daß sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschließen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen literarischen und speziell

fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Enzyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Maße zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läßt, im gleichen Maße willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet wird (die bereits erschienenen Bände sind mit zwei **, die unter der Presse befindlichen mit einem * bezeichnet):

**P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. (Band X der Sammlung.)
*E. Blaschke, Vorlesungen über mathemat. Statistik. (Erscheint im März 1906.)
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
G. Bohlmann, Versicherungsmathematik.
**H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmaßlehre. (Bd. XVII.)
*G. H. Bryan, Thermodynamics. (In englischer Sprache; erscheint im März 1906.)
G. Castelnuovo und F. Enriques, Theorie der algebraischen Flächen.
**E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. (Band IX.)
M. Dehn und P. Heegaard, Lehrbuch der Analysis situs.
**L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. (in englischer Sprache.) (Band VI.)
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
——— Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
G. Eneström (in Verbindung mit andern Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.
F. Engel u. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie. (Erscheint im Januar 1906.)
*O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik d. lebenden Körper.
Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.
**A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. (Band VIII.)
M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.
J. Harkness, elliptische Funktionen.
L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.
K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.
G. Jung, Geometrie der Massen.
G. Kohn, rationale Kurven.
**A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. (Band XII.)
H. Lamb, Akustik.
R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.

Alexander Zivet

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXIV

A. E. H. LOVE
M. A., D. Sc., F. R. S.
VORMALS FELLOW VON ST. JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE
HONORARY FELLOW VON QUEEN'S COLLEGE, OXFORD
SEDLEIAN PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT OXFORD

# LEHRBUCH DER ELASTIZITÄT

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS BESORGT VON

DR. ALOYS TIMPE
ASSISTENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DANZIG
VORMALS ASSISTENT AM MATHEMATISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

MIT 75 ABBILDUNGEN IM TEXTE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Alex. Ziwet
gt.
8-31-1922

## Aus der Vorrede des Verfassers.

Das vorliegende Buch ist die zweite Auflage eines Werks, das unter gleichem Titel in zwei von 1892 und 1893 datierten Bänden im Verlage der Cambridge University Press erschien. Als vor etwa fünf Jahren die Frage einer Neuauflage zum erstenmal ernstlich an mich herantrat, wurden mir von mehreren Freunden kritische Ausführungen zu bestimmten Abschnitten des Buchs und eine Reihe von Einzelheiten betreffende Verbesserungsvorschläge übermittelt. Von diesen Freunden muß ich Prof. W. J. Lewis und Prof. W. M^c F. Orr mit besonderem Danke nennen. Ich sah damals, daß zwei oder drei Kapitel umzuschreiben und die Resultate verschiedener neuerer Untersuchungen einzuarbeiten wären, dachte aber nicht an eine einschneidende Revision. Die Neuordnung des alten Stoffes, verbunden mit mehreren beträchtlichen Einfügungen und ein paar Kürzungen, erwies sich jedoch als ein so unerquickliches Geschäft und das Resultat erschien so unbefriedigend, daß ich schließlich den Versuch aufgab und ein neues Buch schrieb, das einige Auszüge aus dem alten enthält. Die Elastizitätslehre — die Mechanik der festen Körper mit Rücksicht auf ihre wirkliche Beschaffenheit — besitzt eine so hervorragende Bedeutung in sich, und die ihr eigentümlichen physikalischen Begriffe und analytischen Methoden haben auch für andere Zweige der Physik eine so große Tragweite, daß die Anlage, die getroffen wurde, einer Rechtfertigung wohl nicht bedarf.

Bei der Auswahl und Art der Darbietung des Stoffes waren drei Gesichtspunkte maßgebend: das Buch für Ingenieure und andere, die hauptsächlich praktische Ziele verfolgen, brauchbar zu machen, die Bedeutung der Theorie für allgemeine Fragen der theoretischen Physik ins Licht zu rücken und ein einigermaßen vollständiges Bild von dem heutigen Stande der Wissenschaft zu geben. Im Interesse der praktischen Brauchbarkeit sah ich mich veranlaßt, mehrere ziemlich langwierige Rechnungen durchzuführen, der physikalische Gesichtspunkt ist insofern zur Geltung gekommen, als verschiedene Gegenstände, die aus dem eigentlichen Rahmen der mechanischen Theorie herausfallen, nicht bloß flüchtig gestreift werden, das Streben nach Vollständigkeit hat zur Aufnahme einiger längerer analytischer

Entwicklungen geführt. Andererseits sind rein technische Ausführungen, wie Beschreibungen von Apparaten und zu besonderen Konstruktionen gehörige Rechnungen, fortgeblieben; verwandte Dinge, wie die von ungleichmäßiger Erwärmung herrührende Verzerrung, die durch Verzerrung bewirkte doppelbrechende Eigenschaft des Glases, die Theorie des als elastischer fester Körper angesehenen Lichtäthers, sind nur eben berührt; von einer eingehenden Behandlung von Problemen von vorwiegend mathematischem Interesse ist in der Regel abgesehen. Doch sind hier, wie auch zu anderen Punkten, zahlreiche Literaturnachweise gegeben.

Eine Änderung, die getroffen wurde, bedarf vielleicht einiger Worte der Rechtfertigung. Die Bezeichnungen für die Spannungskomponenten und die Verzerrungskomponenten weichen von denjenigen, die in der ersten Auflage benutzt wurden, ab. Wünsche, diese Änderung betreffend, wurden mir verschiedentlich unterbreitet, und ich selbst habe mich den Vorzügen einer Bezeichnungsweise, die ihre Bedeutung unmittelbar zur Schau trägt, nicht verschließen können. Obwohl ich nach wie vor der Meinung bin, daß manches für die vordem angewendete Bezeichnungsweise von Kelvin und Tait spricht, glaubte ich mich doch nicht berechtigt, die dagegen erhobenen Vorstellungen, die an mich gekommen waren, von der Hand zu weisen.

Für denjenigen, dem der Gegenstand neu ist, empfiehlt es sich, baldmöglichst sich dem Kapitel V zuzuwenden, wo er eine knappe Zusammenfassung der wesentlichsten Teile der früheren Kapitel, einige Andeutungen über die Art der der mathematischen Behandlung zugänglichen Probleme und der in Frage kommenden Methoden, sowie eine Anzahl von Resultaten findet, deren Verifikation bezw. direkte Ableitung für ihn eine nutzbringende Übung sein wird.

---

# Vorwort des Übersetzers.

Hiermit wird die im Januar dieses Jahres erschienene zweite Auflage des „Treatise on the theory of elasticity“ von A. E. H. Love in einer dem deutschen Publikum bequemeren Form der Öffentlichkeit übergeben. Die hervorragende Förderung, die die Lehre von der Elastizität in den letzten Jahrzehnten gerade in England erfahren hat, rechtfertigt vollauf das Unternehmen, dazu beizutragen, den Besitzstand der englischen Elastiker, der in dem Loveschen Lehrbuch niedergelegt ist, nach Deutschland zu verpflanzen. Insbesondere

dürfte wegen der die Engländer auszeichnenden Tendenz, neben den mathematischen Interessen die praktischen nicht aus dem Auge zu verlieren, eine engere Fühlungnahme der in Betracht kommenden deutschen Kreise mit der englischen Elastizitätstheorie wünschenswert erscheinen. Sie würde für eine den praktischen Bedürfnissen entgegenkommende, mit den Fortschritten der Technik Hand in Hand gehende Weiterbildung der mathematischen Theorie im Geiste eines Barré de Saint-Venant sicherlich befruchtend wirken.

Bei der Übersetzung des vorliegenden Werkes bot die Verdeutschung der knappen und kraftvollen englischen Ausdrucksweise, insbesondere der Terminologie, manche Schwierigkeit. Eine der in deutschen Büchern eingeführten, teilweise schwerfälligen Bezeichnungsweisen anzunehmen, konnte ich mich nicht entschließen, und so versuchte ich, zumal Neuprägungen ohnehin erforderlich waren, eine Nachbildung der bewährten, viel reicheren englischen Terminologie. Ich führe hier nur an, daß der fundamentale, von Rankine geprägte Name „strain“ durch das Wort „Verzerrung“, das die gleiche vielseitige Anwendbarkeit besitzt, wiedergegeben ist. Ich will bezüglich der Terminologie, die ich zum Vorschlag bringe, noch erwähnen, daß einzelne der eingeführten Benennungen („Verzerrung“, „Drall“) gelegentlich von Herrn Prof. F. Klein im Seminar und in Vorlesungen angewendet wurden. — Um den gleichzeitigen Gebrauch der englischen und der deutschen Ausgabe zu erleichtern, habe ich auch in Kleinigkeiten den deutschen Text dem englischen möglichst angepaßt. Einige Druckfehler, die im Original stehen geblieben waren, habe ich beseitigt.

Zum Schlusse bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Herrn Professor Love, der mich bei der Abfassung und Revision des Textes stets in liebenswürdigster Weise unterstützt hat, meinen Dank auszusprechen.

Göttingen, im September 1906.

**Aloys Timpe.**

# Inhalt.



## Kapitel I.

## Analyse der Verzerrung.

Anhang zu Kapitel I.

**Allgemeine Theorie der Verzerrung.**



Kapitel II.

**Analyse der Spannung.**

Kapitel III.

**Die Elastizität fester Körper.**



Kapitel IV.

**Die Beziehung zwischen der mathematischen Elastizitätstheorie und der technischen Mechanik.**



Kapitel V.

**Gleichgewicht isotroper elastischer fester Körper.**

## Kapitel VI.

### Gleichgewicht äolotroper elastischer fester Körper.



## Kapitel VII.

### Allgemeine Theoreme.

Seite

## Kapitel VIII.

### Die Ausbreitung der Kraft.



## Kapitel IX.

### Zweidimensionale elastische Systeme.



## Kapitel X.

### Theorie der Integration der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen elastischen festen Körpers.

Kapitel XI.

**Das Gleichgewicht einer elastischen Kugel und verwandte Probleme.**



Kapitel XII.

**Schwingungen von Kugeln und Zylindern.**

Kapitel XVI.

**Die Biegung eines gleichförmig belasteten Balkens.**



Kapitel XVII.

**Die Theorie der durchlaufenden Träger.**



Kapitel XVIII.

**Allgemeine Theorie der Drillung und Biegung dünner Stäbe.**

## Kapitel XIX.

## Probleme des Gleichgewichts dünner Stäbe.



## Kapitel XX.

## Schwingungen von Stäben. Probleme dynamischen Widerstandes.



## Kapitel XXI.

## Kleine Formänderung von Hause aus krummer Stäbe.

Kapitel XXII.

**Die Reckung und Biegung von Platten.**



Kapitel XXIII.

**Dehnungslose Deformation krummer Platten oder Schalen.**

Seite

## Kapitel XXIV.

### Allgemeine Theorie dünner Platten und Schalen.



### Anmerkungen.



### Register.

# Historische Einleitung.

Die mathematische Theorie der Elastizität geht aus auf rechnerische Beherrschung des Verzerrungs- oder inneren Verschiebungszustandes in einem festen Körper, der der Wirkung eines im Gleichgewicht befindlichen Systems von Kräften unterliegt oder im Zustande schwacher innerer Bewegung ist; sie sucht Resultate zu gewinnen, denen praktische Bedeutung für die Anwendungen auf das Bau- und Ingenieurwesen und alle andern Zweige der Technik zukommt, in welchen man es mit festem Konstruktionsmaterial zu tun hat. Ihre Geschichte müßte umfassen diejenige des Fortschritts unserer Experimentalkenntnisse vom Verhalten deformierter Körper, soweit sie in die mathematische Theorie verarbeitet wurden, die Entwicklungsgeschichte unserer Vorstellungen bezüglich der physikalischen Prinzipien, auf denen die Theorie aufzubauen hat, die Geschichte des Wachstums jenes Zweiges der mathematischen Analysis, auf dem der rechnerische Fortschritt beruht, und diejenige des schrittweisen Erschließens praktischer Regeln durch Deutung analytischer Ergebnisse. In einer ideal ausgearbeiteten Theorie würde der Fortschritt, den wir im einzelnen verzeichnen könnten, in der Richtung von weniger zu mehr liegen; ebenso wahr ist es aber, daß in bezug auf die physikalischen Grundvoraussetzungen Fortschritt im Übergang von mehr zu weniger liegt. Gewiß, keine der einmal gemachten Entdeckungen auf dem Gebiete der gewonnenen Experimentalkenntnisse sowohl wie auf dem der analytischen Methoden und Resultate verliert jemals ihren Wert oder wäre je zu streichen; aber die physikalischen Prinzipien lassen sich auf eine kleinere Anzahl von allgemeinerem Charakter zurückführen, sodaß die Theorie mit der der andern Zweige der Physik in innigere Verbindung gebracht wird: dieselben allgemeinen dynamischen Prinzipien sind eben schließlich notwendig und hinreichend, um ihnen allen als Grundlage zu dienen. Und obwohl wir im Falle der Elastizitätslehre auf Seiten des Experimentators häufig Rückschritt und auf Seiten des Mathematikers besonders insofern Mißgriffe finden, als unklar begründete oder bereits abgetane Hypothesen verwendet, nur näherungsweise gültige Methoden auf die Spitze getrieben, voreilige Verallgemeinerungen getroffen und physikalische Prinzipien mißverstanden wurden: so beobachten wir

doch in allen Punkten einen stetigen Fortschritt, wenn wir die Geschichte unserer Wissenschaft von den ersten Forschungen Galileis bis schließlich zu den Untersuchungen von Saint-Venant und Lord Kelvin überblicken.

Der erste Mathematiker, der die Natur des Widerstands fester Körper gegen Bruch zu erforschen trachtete, war Galilei.[1]) Obwohl er die Körper als unelastisch behandelte — er war eben noch nicht im Besitz eines Gesetzes, das die bewirkten Verschiebungen mit den sie bewirkenden Kräften verknüpft, noch auch irgend einer physikalischen Hypothese, aus der solch ein Gesetz hervorgegangen wäre — so gaben doch seine Untersuchungen die Richtschnur, die fürderhin von vielen Forschern befolgt wurde. Er suchte den Widerstand eines Balkens zu bestimmen, dessen eines Ende in einer Wand eingemauert ist, wenn die Bruchgefahr vom Eigengewicht oder einer äußeren Last herrührt; und er schloß, daß der Balken um eine zu seiner Längsrichtung senkrechte, in der Wandebene liegende Achse sich zu drehen strebt. Dies Problem und insbesondere die Ermittlung jener Achse ist bekannt als das Galileische Problem.

In der Geschichte der durch Galileis Fragestellung angeregten Theorie sind zweifellos zwei wichtige Marksteine die Auffindung des Hookeschen Gesetzes im Jahre 1660 und die Formulierung der Grundgleichungen durch Navier im Jahre 1821. Das Hookesche Gesetz lieferte die notwendige experimentelle Grundlage für die Theorie. Als man die Grundgleichungen gewonnen hatte, waren alle Fragen der kleinen Verzerrung elastischer Körper Gegenstand mathematischer Berechnung geworden.

In England und Frankreich beschäftigten sich in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts Hooke und Mariotte mit der experimentellen Erforschung der Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung. Hooke[2]) verkündete 1678 das berühmte Gesetz der Proportionalität von Spannung und Verzerrung mit den Worten „*Ut tensio sic vis*; d. h. die Stärke einer Feder erweist sich als im gleichen Verhältnis mit dem bewirkten Zug“. Unter Feder versteht Hooke, wie er weiterhin erklärt, irgend einen „federnden Körper“, und unter „Zug“ das, was wir jetzt „Dehnung“ oder allgemeiner „Verzerrung“ nennen würden. Dies Gesetz entdeckte er 1660, veröffentlichte es aber erst 1676, und auch da nur in Form eines Anagramms, *ceiiinosssttuu*. Dies Gesetz bildet die Grundlage der mathematischen Theorie der Elastizität, und wir werden hernach seine Verallgemeinerung und seine Bewertung im Lichte der heutigen experimentellen Forschung ins Auge fassen. Hooke scheint keine Anwendung desselben auf die Be-

1) Galileo Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni matematiche*, Leiden 1638.
2) Robert Hooke, *De Potentia restitutiva*, London 1678.



handlung des Galileischen Problems gemacht zu haben. Diese Anwendung machte Mariotte[3]), der im Jahre 1680 dasselbe Gesetz unabhängig verkündigte. Er bemerkte, daß der Widerstand eines Balkens gegen Biegung von der Dehnung und Verkürzung seiner Teile herrühre, indem einige seiner Längsfasern ausgedehnt und andere kontrahiert würden. Er nahm an, daß sie zur Hälfte gedehnt, zur Hälfte verkürzt würden. Seine Theorie führte ihn dazu, die in der Lösung des Galileischen Problems benötigte Achse in die halbe Höhe des Querschnitts über der Grundlinie zu verlegen.

In dem Zeitraum zwischen der Entdeckung des Hookeschen Gesetzes und derjenigen der allgemeinen Differentialgleichungen der Elastizität durch Navier war die Aufmerksamkeit derjenigen Mathematiker, die sich mit unserer Wissenschaft beschäftigten, hauptsächlich auf die Lösung und Erweiterung des Galileischen Problems und die damit zusammenhängenden Theorien der Stab- und Plattenschwingungen und der Stabilität der Säulen gerichtet. Die erste Untersuchung von Bedeutung ist die über die elastische Linie oder *Elastica* von Jakob Bernoulli[4]) im Jahre 1705, worin der Widerstand eines gebogenen Stabes als von der Dehnung und Verkürzung seiner Längsfasern herrührend angenommen und die Gleichung der von der Achse gebildeten Kurve aufgestellt wird. Diese Gleichung enthält, praktisch genommen, das Resultat, daß der Biegungswiderstand in einem der Krümmung des gebogenen Stabes proportionalen Kräftepaar besteht, ein Resultat, das von Euler in seiner späteren Abhandlung über die Probleme der *Elastica* und die Schwingungen dünner Stäbe übernommen wurde. Sobald der Begriff eines der Krümmung proportionalen Biegungsmomentes festgelegt war, konnte erkannt werden, daß die bei der Biegung eines Stabes geleistete Arbeit dem Quadrat der Krümmung proportional ist. Daniel Bernoulli[5]) wies Euler auf die Möglichkeit hin, die Gleichung der *Elastica* dadurch zu finden, daß man das Integral des Quadrats der Krümmung, genommen längs des Stabes, zum Minimum mache; und auf Grund dieses Hinweises gelang es Euler[6]), die Differentialgleichung der Kurve zu gewinnen und eine Einteilung der verschiedenen Formen derselben zu geben. Die eine Form ist eine Sinuskurve mit kleiner Amplitude, und Euler legte dar[7]), daß in diesem Falle die Kraft-Angriffslinie mit der un-

3) E. Mariotte, *Traité du mouvement des eaux,* Paris 1686.

4) Bernoullis Arbeit ist betitelt: „Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort"; man findet sie in seinen gesammelten Werken, Bd. 2, Genf 1744.

5) S. den 26. Brief Daniel Bernoullis an Euler (Oktober 1742) in Fuß, *Correspondance mathématique et physique*, t. 2, St. Petersburg 1843.

6) S. das *Additamentum* „De curvis elasticis" im *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes,* Lausanne 1744.

7) *Berlin, Histoire de l'Académie,* t. 13 (1757).

verzerrten Stabachse zusammenfällt, sodaß ein hinreichend langer und von Hause aus vertikaler Stab von einer am oberen Ende angebrachten Last gebogen werden kann. Weitere Untersuchungen[8]) führten ihn zur Angabe der Mindestlänge einer Säule, bei der dieselbe unter ihrem Eigengewicht oder einer äußeren Last sich biegt. Lagrange[9]) folgte seiner Theorie und benutzte sie zur Bestimmung der stärksten Säulenform. Diese beiden Schriftsteller fanden also, daß eine Säule eine gewisse Länge besitzen muß, um durch ihr Eigengewicht oder eine äußere Last gebogen zu werden, und sie schlossen, daß sie bei geringerer Länge einfach zusammengedrückt, bei größerer dagegen gebogen werden wird. Es sind dies die ersten Untersuchungen auf dem Gebiete *elastischer Stabilität.*

In Eulers Arbeit über die *Elastica* wird der Stab als eine materielle Linie angesehen, welche der Biegung widersteht. Die Theorie der Balken von endlichem Querschnitt wurde von Coulomb behandelt.[10]) Dieser Autor berücksichtigte sowohl die Gleichgewichtsbedingung, die aus der Betrachtung der Horizontalkomponenten der Kräfte folgt, welche auf den von einem Normalschnitt abgetrennten Balkenteil wirken, als auch die Momentengleichung. So war es ihm möglich, die wahre Lage der „neutralen Linie“ oder „Null-Linie“ aufzufinden, und er gab auch eine einwandfreie Berechnung des Moments der elastischen Kräfte. Seine Balkentheorie ist die genaueste unter denjenigen, die von der Annahme ausgehen, daß die Spannung in einem gebogenen Balken samt und sonders von der Dehnung und Verkürzung seiner Längsfasern herrührt und mathematisch aus dieser Annahme und dem Hookeschen Gesetze abgeleitet wird. Coulomb war auch der erste, der den Drillungswiderstand dünner Stäbchen untersuchte[11]), und auf seine Darstellung nimmt Saint-Venant unter dem Namen *l'ancienne théorie* Bezug; aber seine Formel für diesen Widerstand war überhaupt nicht aus einer elastischen Theorie abgeleitet. Die Formel setzt die Drillungssteifigkeit eines Stäbchens proportional dem Trägheitsmoment des Normalschnitts um die Achse des Stäbchens. Ein anderer Gegenstand, dem Coulomb zuerst Beachtung schenkte, war jene Art von Verzerrung, die wir jetzt *Schub* (Schiebung, Gleitung; engl. *shear*) nennen, wenngleich er ihn nur in Verbindung mit dem Bruchvorgange studierte. Seine Ansicht scheint die gewesen zu sein, daß Bruch[12]) dann eintritt, wenn der Schub des Materials eine ge-

8) *Acta Acad. Petropolitanae* von 1778, *Pars prior*, p. 121—193.

9) *Miscellanea Taurinensia,* t. 5 (1773).

10) „Essai sur une application des règles *de Maximis et Minimis* à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture“, *Mém. . . . par divers savants,* 1776.

11) *Histoire de l'Académie* für das Jahr 1784, p. 229—269, Paris 1787.

12) S. die Einleitung zu der vorhin angezogenen Arbeit, *Mém. . . . par savants,* 1776.

wisse Grenze überschreitet. Der Schub, den er im Auge hat, ist dauernde Formänderung, nicht elastische Verzerrung.

Von Coulombs Arbeit abgesehen, ist das für die allgemeine mathematische Theorie bedeutsamste Werk dieser Periode die physikalische Auseinandersetzung Thomas Youngs über Elastizität. Dieser Naturforscher, der den nach ihm benannten Elastizitätsmodul definierte, war außerdem der erste, der Schub als eine elastische Formänderung betrachtete.[13]) Er nannte ihn „detrusion" und bemerkte, daß der elastische Widerstand eines Körpers gegen Schub (Abscheren) und sein Widerstand gegen Dehnung oder Zusammendrückung im allgemeinen verschieden sind; aber er führte keinen besonderen Steifigkeitsmodul ein, um Widerstand gegen Schub auszudrücken. Er definierte „den Elastizitätsmodul einer Substanz"[14]) als „eine Säule aus der gleichen Substanz, die auf ihre Grundfläche einen Druck auszuüben vermag, der sich zu der eine gewisse Kompression hervorrufenden Last ebenso verhält wie die Länge der Substanz zur Verminderung der Länge". Was wir jetzt „Youngschen Modul" nennen, ist das Gewicht dieser Säule pro Flächeneinheit der Grundfläche. Diese Einführung eines bestimmten physikalischen Begriffs, wie er an den Elastizitätskoeffizienten geknüpft ist, der gleichsam von lichtem Himmel auf den die mathematische Literatur Durchwandernden sich herabsenkt, bezeichnet einen Wendepunkt in der Geschichte der Wissenschaft.

Hand in Hand mit den die Galileischen Untersuchung fortführenden statischen Arbeiten gingen solche über die Schwingungen fester Körper. Euler[6]) und Daniel Bernoulli[15]) gelangten zu der Differentialgleichung der Querschwingungen von Stäben durch Variation der Funktion, durch die sie früher die bei der Biegung geleistete Arbeit ausgedrückt hatten.[16]) Sie ermittelten die Form der Funk-

13) *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*, London 1807, *Lecture XIII*. In der späteren Ausgabe von Kelland (1845) findet es sich auf p. 105 ff.

14) *Loc. cit.* (Fußnote 13). Die Definition wurde gegeben in Abschnitt IX von Band 2 der ersten Ausgabe und wurde in Kellands Ausgabe weggelassen, ist aber in den *Miscellaneous Works of Dr. Young* wieder aufgenommen.

15) „De vibrationibus . . . laminarum elasticarum . . .", und „De sonis multifariis quos laminae elasticae . . . edunt . . ." veröffentlicht in *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, t. 13 (1761). Der Leser muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß in Schriften des 18. Jahrhunderts eine „Lamelle" soviel bedeutet wie: ein gerades oder krummes Stäbchen, das man sich aus einer dünnen Platte oder zylindrischen Schale durch zwei benachbarte Normalschnitte herausgeschnitten denkt. Dieser Sprachgebrauch zieht sich durch viele Bücher.

16) Die Form der Energiefunktion und der Gedanke, durch Variation derselben die Differentialgleichung zu gewinnen, stammen von D. Bernoulli. Euler gab die Ausführung des Verfahrens und bestimmte die Normalfunktionen und die Periodengleichungen.

tionen, die wir jetzt „Normalfunktionen", und die Gleichung, die wir jetzt die „Periodengleichung" nennen würden, für die sechs Fälle von Grenzbedingungen, die sich ergeben, je nachdem die Enden frei, eingeklemmt oder einfach unterstützt sind. Chladni[17]) prüfte diese Schwingungsarten experimentell, ebenso die Longitudinal- und Drillungsschwingungen von Stäben.

Der Erfolg der auf spezielle Annahmen gegründeten Theorien dünner Stäbe scheint Hoffnungen erweckt zu haben, daß sich in gleicher Weise für Platten und Schalen eine Theorie entwickeln lassen würde, sodaß die Schwingungsarten einer Glocke aus ihrer Form und Befestigungsweise abgeleitet werden könnten. Der erste, der diese Aufgabe in Angriff nahm, war Euler. Er hatte bereits eine Theorie des Biegungswiderstandes eines krummen Balkens vorgeschlagen, in welcher die Krümmungsänderung dieselbe Rolle spielt wie die Krümmung in der Theorie des von Hause aus geraden Balkens.[18]) In einer Abhandlung „De Sono Campanarum"[19]) schlug er vor, eine Glocke in dünne Ringe zerlegt zu denken, deren jeder sich wie ein krummer Stab verhält. Dies Verfahren läßt die Krümmungsänderung in Schnitten durch die Glockenachse außer Betracht. Nun folgte Jakob Bernoulli[20]) (der Jüngere). Er nahm die Glocke als aus einer Art Doppelschicht krummer Stäbe bestehend an, wobei die Stäbe in der einen Schicht senkrecht zu denen in der andern verlaufen. Indem er das Problem der Schale auf das einer dünnen Platte zurückführte, fand er eine Schwingungsgleichung, die nach unserm heutigen Wissensstande unrichtig ist.

Jakob Bernoullis Ansatz scheint in der Absicht gemacht zu sein, eine theoretische Grundlage für Chladnis experimentelle Ergebnisse bezüglich der Knotenlinien schwingender Platten[21]) aufzufinden. Diese Ergebnisse harrten noch der Erklärung, als im Jahre 1809 das französische *Institut* die Untersuchung der Töne einer schwingenden Platte als Preisaufgabe stellte. Nach mehreren Bewerbungen wurde 1815 der Preis Mdlle. Sophie Germain zuerkannt und ihr Werk 1821 veröffentlicht.[22]) Sie nahm an, daß in der Plattentheorie die Summe der Hauptkrümmungen der gebogenen Platte dieselbe Rolle spiele wie

17) E. F. F. Chladni, *Die Akustik,* Leipzig 1802. Der Verfasser gibt einen Bericht über die Geschichte seiner eigenen experimentellen Untersuchungen mit dem Zeitpunkt ihrer ersten Veröffentlichung.

18) In dem *Methodus inveniendi* . . . p. 274. Vgl. auch seine spätere Schrift „Genuina principia . . . de statu aequilibrii et motu corporum . . .", *Nov. Comm. Acad. Petropolitanae,* t. 15 (1771).

19) *Nov. Comm. Petropolitanae*, t. 10 (1776).

20) „Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques . . .", *Nov. Acta Petropolitanae,* t. 5 (1789).

21) Zuerst veröffentlicht in Leipzig im Jahre 1787. Vgl. *Die Akustik*, p. VII.

22) *Recherches sur la théorie des surfaces elastiques*, Paris 1821.



die Krümmung der elastischen Mittellinie in der Theorie der Stäbe, und sie schlug vor, die bei der Biegung geleistete Arbeit dem über die Fläche erstreckten Integral des Quadrats der Summe der Hauptkrümmungen proportional zu setzen. Aus dieser Voraussetzung und aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit leitete sie die Gleichung der Biegungsschwingungen in der jetzt allgemein angenommenen Form ab. Spätere Untersuchungen haben gezeigt, daß die Formel für die Biegungsarbeit unrichtig war.

Während der ersten Periode der Geschichte unserer Wissenschaft (1638—1820) war gleichzeitig mit diesen mannigfachen Untersuchungen über einzelne Probleme etwas im Werke, was zu großen Verallgemeinerungen führen sollte. Das war die physikalische Spekulation über die Konstitution der Körper. Im 18. Jahrhundert verdrängte die Newtonsche Auffassung von der Materie, wonach diese aus kleinen mit Zentralkräften auf einander wirkenden Teilchen aufgebaut ist, die Cartesische Idee des von „Wirbeln" durchdrungenen *plenum*. Newton legte seinen „Molekülen" bestimmte Größe und Gestalt bei[23]), aber seine Nachfolger vereinfachten sie allmählich zu *materiellen Punkten*. Der entschiedenste Vertreter dieses Gedankens ist Boscovich[24]), für den die materiellen Punkte nichts anderes als dauernde Kraftzentren waren. Dieser Gedankenrichtung gehören Laplaces Theorie der Kapillarität[25]) und Poissons erste Untersuchung über das Gleichgewicht einer „elastischen Fläche"[26]) an, aber lange scheint man keinen Versuch gemacht zu haben, zu allgemeinen Gleichungen der Bewegung und des Gleichgewichts elastischer fester Körper zu gelangen. Am Schlusse des Jahres 1820 konnte die Frucht all des auf elastische Probleme gewendeten Scharfsinns zusammengefaßt werden als — eine ungenügende Theorie der Biegung, eine unrichtige Theorie der Drillung, eine unbewiesene Theorie der Stab- und Plattenschwingungen und die Definition des Youngschen Moduls. Ein solcher Überschlag würde aber doch einen ganz verkehrten Eindruck von dem Werte der älteren Forschungen liefern. Die Erkenntnis des Unterschieds zwischen Schub und Dehnung war die Vorbedingung für eine allgemeine Theorie der Verzerrung; die Erkenntnis, daß auf die Teilchen des Querschnitts eines Balkens Kräfte mit einer gewissen Resultante wirken, war ein Schritt vorwärts zu einer Theorie der Spannung; die Anwendung von Differentialgleichungen auf die Durchbiegung eines gebogenen Balkens und die Schwingungen von Stäben und Platten war der Vorglanz der Benutzung von Differentialgleichungen der Verschiebung; die Newtonsche

---

23) Im einzelnen s. Newton, *Optics*, 2. Aufl., London 1717, 31. Frage.

24) R. J. Boscovich, *Theoria Philosophiae Naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*, Venedig 1743.

25) *Mécanique Céleste, Supplément au 10e Livre*, Paris 1806.

26) *Paris, Mém. de l'Institut*, 1814.



Vorstellung von der Konstitution der Körper, verbunden mit dem Hookeschen Gesetz, gab Mittel zur Bildung solcher Gleichungen an die Hand; und die Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Arbeit in der *Mécanique Analytique* bahnte Entdeckungen in diesem wie in jedem andern Zweige der mathematischen Physik in weitem Umfange den Weg. Die physikalische Wissenschaft hatte sich aus ihren Anfangsstadien emporgeschwungen zu bestimmten Methoden der Hypothese und Induktion und der Beobachtung und Deduktion, zu der klaren Erfassung des Ziels, die Gesetze zu entdecken, durch die die Erscheinungen miteinander verknüpft sind, und zu einer Fülle analytischen Rüstzeugs für die weitere Forschung. Die Stunde war gekommen, allgemeine Theorien zu schaffen, und an Männern dazu fehlte es nicht.

Navier[27]) war der erste, der die Grundgleichungen des Gleichgewichts und der Schwingung elastischer Körper erschloß. Er ging aus von der Newtonschen Vorstellung von der Konstitution der Körper und nahm an, daß die elastischen Rückwirkungen aus Änderungen der Molekularkräfte entspringen, welche sich aus dem Wechsel in der Anordnung der kleinsten Teilchen ergeben. Er betrachtete die Moleküle als materielle Punkte und nahm an, daß die Kraft zwischen zwei Molekülen, deren Entfernung etwas vergrößert wird, dem Produkt der Abstandszunahme und einer Funktion der anfänglichen Entfernung proportional ist. Sein Verfahren besteht darin, einen Ausdruck für die in irgend eine Richtung fallende Komponente aller Kräfte zu bilden, die auf ein verschobenes Molekül wirken, und daraus die Bewegungsgleichungen des Moleküls abzuleiten. Man erhält so die Gleichungen ausgedrückt in den Verschiebungen des Moleküls. Der Stoff wird als isotrop vorausgesetzt, und die Gleichgewichts- und Schwingungsgleichungen enthalten eine einzige Konstante von der Natur des Youngschen Moduls. Navier bildete alsdann einen Ausdruck für die Arbeit, die bei einer kleinen Verschiebung von allen Kräften geleistet wird, die auf das Molekül wirken; er stellte dieselbe dar als die Summe der Momente (im Sinne der *Mécanique analytique*) der Kräfte, die ein einzelnes Teilchen von allen andern Molekülen erfährt. Durch Anwendung der Variationsrechnung leitete er nicht nur die bereits vorher gewonnenen Differentialgleichungen ab, sondern auch die Randbedingungen, die an der Oberfläche des Körpers gelten. Diese Arbeit ist sehr wichtig als die erste allgemeine Untersuchung ihrer Art, aber mit ihren Beweisen war man nicht allgemein einverstanden. Man erhob Einwand gegen Naviers Ausdruck für die Kraft zwischen zwei „Molekülen" und gegen sein Verfahren, die Ausdrücke für die auf ein einziges Molekül wirkenden Kräfte zu

27) *Paris, Mém. Acad. Sciences,* t. 7 (1827). Die Arbeit wurde im Mai 1821 vorgelegt.

vereinfachen. Diese Ausdrücke enthalten dreifache Summen, die Navier durch Integrationen ersetzt, und die Zulässigkeit dieses Schrittes wurde bestritten.[28])

In demselben Jahre, in dem die Naviersche Arbeit vor der Akademie verlesen wurde, im Jahre 1821, erfuhr das Studium der Elastizität von unerwarteter Seite einen mächtigen Antrieb. Fresnel verkündete die Schlußfolgerung, zu der er gelangt war: daß die beobachteten Tatsachen auf dem Gebiete der Interferenz polarisierten Lichtes nur durch die Annahme transversaler Schwingungen erklärt werden könnten.[29]) Er zeigte, wie wohl ein aus „Molekülen", die durch Zentralkräfte verknüpft sind, bestehendes Medium solche Schwingungen ausführen und Wellen der verlangten Art fortpflanzen könnte. Vor Youngs und Fresnels Zeit waren die Beispiele von Transversalwellen, die man kannte, — Wasserwellen, Querschwingungen von Saiten, Stäben, Membranen und Platten — keinenfalls Beispiele von Wellen, die sich *durch* ein Medium fortpflanzen; und weder die Anhänger noch die Gegner der Undulationstheorie des Lichts scheinen unter Lichtwellen etwas anderes verstanden zu haben als „longitudinale" Verdichtungs- und Verdünnungswellen von jener Gattung, mit der man durch die Fortpflanzung des Schalls vertraut war. Die Theorie der Elastizität und insbesondere das Problem der Fortpflanzung von Wellen durch ein elastisches Medium zog jetzt die Aufmerksamkeit zweier erstklassiger Mathematiker auf sich: Cauchy[30]) und Poisson[31]) —

28) Kritische Bemerkungen zu der Navierschen Arbeit und einen Bericht über die Auseinandersetzungen, zu denen sie Anlaß gab, findet man in Todhunter und Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1., Cambridge, 1886, p. 139, 221, 277; vgl. auch die Darstellung, die H. Burkhardt in seinem Bericht über „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen", veröffentlicht in dem *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Bd. 10, Heft 2, Lieferung 3 (1903), gibt. Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, daß die Auffassung, wonach die Moleküle als ruhende materielle Punkte angesehen werden, die sich bei den gegenseitigen Anziehungs- und Abstoßungskräften im Zustande stabilen Gleichgewichts befinden und durch äußere Kräfte in etwas veränderter Lage erhalten werden, grundverschieden ist von den Molekularvorstellungen, mit denen uns die moderne Thermodynamik vertraut gemacht hat. Die „Molekulartheorien" von Navier, Poisson und Cauchy haben keine sehr engen Beziehungen zu modernen Anschauungen über Moleküle.

29) S. E. Verdet, *Œuvres complètes d'Augustin Fresnel*, t. 1, Paris, 1866, p. LXXXVI, dgl. p. 629 ff. Verdet setzt auseinander, daß Fresnel zu seiner Hypothese der Transversalschwingungen im Jahre 1816 gelangte (*loc. cit.* p. LV, 385, 394). Thomas Young schrieb in seinem Artikel „Chromatics" (*Encycl. Brit. Supplement*, 1817) den Lichtschwingungen verhältnismäßig schwache Transversalkomponenten zu.

30) Cauchys Studien über Elastizität fanden ihre erste Anregung durch seine Mitgliedschaft in der Kommission, die Bericht erstatten sollte über eine der Pariser Akademie im August 1820 vorgelegte Abhandlung Naviers über elastische Platten.

31) Wir bemerkten, daß Poisson schon 1814 über elastische Platten geschrieben hatte.

ersterer ein besonnener Befürworter, letzterer ein zweifelnder Kritiker der Fresnelschen Anschauungen. Künftighin hatte sich die Weiterbildung der Elastizitätstheorie eng anzuschließen an die Frage der Ausbreitung des Lichts, und diese Weiterbildung erfuhr sie in hohem Grade durch die Arbeiten dieser beiden Gelehrten.

Etwa bis Herbst 1822 hatte Cauchy[32]) die Anfangsgründe der reinen Elastizitätstheorie größtenteils erschlossen. Er hatte den Begriff des Spannungszustandes in einem Punkte eingeführt, wie er festgelegt wird durch die Spannungen pro Flächeneinheit, die auf alle durch den Punkt gehenden Flächenelemente wirken. Zu diesem Zwecke hatte er den Begriff des hydrostatischen Drucks verallgemeinert und gezeigt, daß sich der Spannungszustand ausdrücken läßt durch sechs Spannungskomponenten und ebenso mit Hilfe von drei nur normal wirkenden Kräften auf ein gewisses Dreiseit von Ebenen, die einander rechtwinklig schneiden — der „Hauptspannungsebenen". Er hatte auch gezeigt, wie man die Differentialquotienten der drei Verschiebungskomponenten dazu benutzen kann, die Dehnung jedes Linienelements in dem Körper zu beurteilen, und hatte den Verzerrungszustand in der Umgebung eines Punktes ausgedrückt in den sechs Verzerrungskomponenten und ebenso in den Dehnungen eines gewissen Dreikants von Linien, die sich rechtwinklig schneiden — der „Verzerrung-Hauptachsen". Er hatte die Gleichungen der Bewegung (bezw. des Gleichgewichts) bestimmt, durch die die Spannungskomponenten mit den im Innern des Körpers verteilten Fernwirkungen und den kinetischen Reaktionen verknüpft sind. Mit Hilfe von Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten hatte er aus den Gleichungen der Bewegung und des Gleichgewichts die Spannungskomponenten eliminiert und war so zu Gleichungen gelangt, die sich auf die Verschiebungen beziehen. In der veröffentlichten späteren Fassung dieser Untersuchung gewann Cauchy seine Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung mittels zweier Voraussetzungen, nämlich 1) daß die fraglichen Beziehungen linear sind, 2) daß die Hauptspannungsebenen normal zu den Verzerrungs-Hauptachsen liegen. Die experimentelle Grundlage, auf die diese Voraussetzungen sich stützen lassen, ist dieselbe wie die, auf welcher das Hookesche Gesetz

32) Cauchys Abhandlung wurde der Pariser Akademie im September 1822 mitgeteilt, aber nicht veröffentlicht. Ein Auszug erschien in dem *Bulletin des Sciences à la Société philomathique,* 1823, eine Inhaltsangabe in späteren Publikationen, nämlich in zwei Artikeln im Jahrgang 1827 von Cauchys *Exercices de mathématique* und in einem Artikel im Jahrgang 1828. Die Titel dieser Artikel sind 1) „De la pression ou tension dans un corps solide", 2) „Sur la condensation et la dilatation des corps solides", 3) „Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide". Der letztere enthält die richtigen Gleichungen der Elastizität.

ruht, aber Cauchy nahm darauf keinen Bezug. Die erhaltenen Gleichungen sind jene, welche man jetzt für isotrope feste Körper annimmt. Die in diesen Untersuchungen angewendeten Methoden sind grundverschieden von denen der Navierschen Abhandlung. Insbesondere wird von der Hypothese der materiellen Punkte und der Zentralkräfte kein Gebrauch gemacht. Die Gleichungen, die man bekommt, unterscheiden sich von den Navierschen in einem wichtigen Punkte: die Navierschen Gleichungen enthalten eine einzige Konstante, die das elastische Verhalten des Körpers kennzeichnet, während die Cauchyschen zwei solcher Konstanten erhalten.

Später dehnte Cauchy seine Theorie auf den Fall kristallinischer Körper aus und machte nun von der Hypothese materieller Punkte Gebrauch, zwischen denen Anziehungs- oder Abstoßungskräfte wirken. Er setzte voraus, daß die Kraft zwischen zwei Punkten in die Richtung ihrer Verbindungslinie falle und eine Funktion ihres Abstandes sei; ferner, daß der Punkthaufen in dem folgenden Sinne homogen sei: Sind $A$, $B$, $C$ irgend drei der Punkte, so gibt es in dem Haufen einen Punkt $D$, der so liegt, daß die Linie $CD$ mit $AB$ gleich und parallel und der Richtungssinn von $C$ nach $D$ derselbe ist wie der Richtungssinn von $A$ nach $B$. Weiter wurde angenommen, daß bei einer Verrückung des Systems die relative Verschiebung zweier Punkte, die innerhalb des wechselseitigen Wirkungsbereichs liegen, klein ist im Vergleich zu ihrer Entfernung. In der ersten Abhandlung[33]), in welcher Cauchy von dieser Hypothese Gebrauch machte, bildete er einen Ausdruck für die Kräfte, die auf einen einzelnen materiellen Punkt in dem System wirken, und leitete Differentialgleichungen der Bewegung und des Gleichgewichts ab. Im Falle der Isotropie enthielten die Gleichungen zwei Konstanten. In der zweiten Abhandlung[34]) wurden Ausdrücke für die Drucke auf irgend eine in dem Körper gelegte Ebene gebildet. Wenn der Anfangszustand spannungslos und der Stoff isotrop ist, so drückt sich die Spannung durch die Verzerrung vermöge einer einzigen Konstanten aus, und eine der Konstanten der vorigen Abhandlung muß verschwinden. Die Gleichungen sind dann identisch mit den Navierschen. In gleicher Weise fand Cauchy im allgemeinen Falle der Äolotropie 21 unabhängige Konstanten. Von diesen sind 15 wahre „elastische Konstanten“, und die übrigen 6 drücken die Anfangsspannung aus und verschwinden identisch, wenn der Anfangszustand spannungslos ist. Diese Dinge wurden

---

33) *Exercices de mathématique,* 1828, „Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle“. Dieser Aufsatz folgt unmittelbar auf den zuletzt angeführten und geht dem sogleich anzuführenden unmittelbar vorher.

34) *Exercices de mathématique,* 1828, „De la pression ou tension dans un système de points matériels“.

von Cauchy nicht ganz klar herausgearbeitet. Clausius[35]) hat jedoch gezeigt, daß das der Sinn seines Werks ist. Clausius kritisierte die beschränkenden Bedingungen, die Cauchy der Anordnung seiner materiellen Punkte auferlegte, wies aber nach, daß diese Bedingungen für die Ableitung der Cauchyschen Gleichungen nicht notwendig sind.

Die erste Poissonsche Abhandlung[36]) über denselben Gegenstand wurde im April 1828 vor der Pariser Akademie verlesen. Die Arbeit ist sehr bemerkenswert wegen ihrer zahlreichen Anwendungen der allgemeinen Theorie auf spezielle Probleme. Bei der Ableitung der Grundgleichungen gewinnt Poisson, ebenso wie Cauchy, zuerst die Gleichgewichtsbedingungen, ausgedrückt in Spannungskomponenten, und berechnet dann den aus den „Molekularkräften“ resultierenden Druck auf irgend eine Ebene. In den Größen, die die Spannungen in den Verzerrungen ausdrücken, kommen Summationen bezüglich aller „Moleküle“ vor, die innerhalb des „molekularen“ Wirkungsbereichs eines gegebenen liegen. Poisson entscheidet sich gegen das Verfahren, alle Summationen durch Integrationen zu ersetzen; vielmehr nimmt er an, daß dies zwar bei den Summationen bezüglich der von dem gegebenen „Molekül“ auslaufenden Winkel zulässig sei, nicht aber bei den Summationen bezüglich der Entfernungen von diesem „Molekül“. Die so erhaltenenen Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen für isotrope elastische Körper stimmen überein mit den Navierschen. Das Prinzip, auf Grund dessen Summationen durch Integrationen ersetzt werden können, hat Cauchy[33]) wie folgt auseinandergesetzt: Die Anzahl der Moleküle in einem Raumteil, der eine sehr große Zahl von Molekülen enthält und dessen Abmessungen gleichzeitig klein sind im Vergleich zum Radius der molekularen Wirkungssphäre, kann dem Volumen proportional gesetzt werden. Wenn wir nun absehen von den Molekülen in unmittelbarer Nähe des einen, das wir ins Auge fassen, so werden die Wirkungen aller übrigen, die in irgend einem der besagten kleinen Raumteile enthalten sind, gleichwertig sein mit einer Kraft, die in die Richtung der durch den Schwerpunkt dieses Raumteils gehenden Linie fällt und proportional ist dem Volumen und einer Funktion des Abstandes des betrachteten Moleküls von dem Schwerpunkt des Raumteils. Die Wirkung der entfernteren Moleküle wird als „regulär“, die der näheren als „irregulär“ bezeichnet; und nun nahm Poisson an, daß die irreguläre Wirkung der näheren Moleküle im Vergleich zu der regulären Wirkung der entfernteren

35) „Über die Veränderungen, welche in den bisher gebräuchlichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen notwendig geworden sind“, *Ann. Phys. Chem. (Poggendorff)*, Bd. 76 (1849).

36) „Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides“, *Mém. Paris Acad.*, t. 8 (1829).

vernachlässigt werden kann. Diese Annahme bildet die Stelle, an der später Stokes[37]) mit seiner Kritik gegen Poisson einsetzte. Wie wir gesehen haben, gelangte Cauchy von einer andern Voraussetzung aus zu den Poissonschen Resultaten.[38]) Clausius war der Ansicht, daß sowohl die Poissonschen wie die Cauchyschen Methoden sich in unanfechtbarer Form darstellen ließen.

Die Theorie der Elastizität, wie sie von Poisson und Cauchy auf der nunmehr akzeptierten Grundlage der materiellen Punkte und der Zentralkräfte aufgebaut war, wurde von ihnen und ebenso von Lamé und Clapeyron[39]) auf zahlreiche Schwingungsaufgaben und statisch-elastische Probleme angewendet; so wurden Mittel bereit gestellt, ihre Folgerungen experimentell zu prüfen, aber es dauerte lange, bis durch einwandfreie Experimente die Probe gemacht wurde. Poisson bediente sich ihrer, um die Ausbreitung von Wellen durch ein isotropes elastisches festes Medium zu untersuchen. Er fand zwei Gattungen von Wellen, die sich in großer Entfernung von den Störungsquellen praktisch als „longitudinal" und „transversal" erweisen, und es war eine Folgerung seiner Theorie, daß das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden Wellengattungen gleich $\sqrt{3}:1$ ist.[40]) Cauchy[41]) wendete seine Gleichungen auf die Frage der Ausbreitung des Lichts in kristallinischen sowohl wie in isotropen Medien an. Die Theorie wurde zuerst in ihrer Anwendung auf die Optik von Green[42]) und später nach ihrer statischen Seite von Stokes[37]) verworfen. Green

37) „On the Theory of the ... Equilibrium and Motion of Elastic Solids", *Cambridge Phil. Soc. Trans.* vol. 8 (1845 = Stokes, *Math. and Phys. Papers,* vol. 1 [Cambridge 1880], p. 75).

38) In einer späteren Abhandlung, die 1829 der Akademie vorgelegt und im *J. de l'École polytechnique,* t. 13 (1831) veröffentlicht wurde, legte Poisson eine der Cauchyschen (Fußnote 34) ganz ähnliche Methode zugrunde. Poisson dehnte seine Theorie auf äolotrope Körper aus in seinem „Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés", einer Abhandlung, die 1839 vor der Pariser Akademie verlesen und nach seinem Tode in *Mém. de l'Acad.,* t. 18 (1842) veröffentlicht wurde.

39) „Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes", *Paris, Mém. par divers savants,* t. 4 (1833). Die Abhandlung wurde auch im *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 7 (1831) veröffentlicht; sie war der Pariser Akademie vorgelegt worden, und der von Poinsot und Navier über sie erstattete Bericht datiert von 1828. Was die allgemeine Theorie anbelangt, so ist die zugrunde gelegte Methode die Naviersche.

40) S. d. von November 1828 datierten Nachtrag zu der in Fußnote 36 angezogenen Abhandlung. Cauchy verzeichnete dasselbe Resultat in den *Exercices de mathématique,* 1830.

41) *Exercices de Mathématique*, 1830.

42) „On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media", *Cambridge Phil. Soc. Trans.* vol. 7 (1839). Die Abhandlung trägt die Jahreszahl 1837. Sie ist wieder abgedruckt in *Mathematical Papers of the late George Green*, London 1871, p. 245.

befriedigte die Hypothese nicht, auf der die Theorie ruht, und er suchte nach einer neuen Begründung; Stokes' Kritik wendete sich mehr gegen das Beweisverfahren und einzelne Resultate.

Die Umwälzung, die Green in den Anfangsgründen der Theorie hervorbrachte, ist an Bedeutung vergleichbar mit derjenigen, die die Entdeckung der Grundgleichungen durch Navier herbeiführte. Ausgehend von dem, was jetzt *Prinzip der Erhaltung der Energie* genannt wird, schlug er eine neue Methode vor, diese Gleichungen zu gewinnen. Er selbst sprach sein Prinzip und seine Methode in folgenden Worten aus:

„Wie immer die Teilchen eines Massensystems aufeinander wirken mögen: multipliziert man die ausgeübten inneren Kräfte mit den Differentialen der entsprechenden Richtungen, so ist die Gesamtsumme für irgend einen bestimmten Teil der Masse stets das exakte Differential einer Funktion. Ist aber diese Funktion bekannt, so können wir unmittelbar das in der *Mécanique Analytique* angegebene allgemeine Verfahren anwenden, das gerade auf Probleme der Bewegungen solcher Systeme anwendbar erscheint, die aus einer ungeheuren Zahl wechselseitig aufeinander wirkender Teilchen zusammengesetzt sind. Von den Vorteilen, die diese Methode mit sich bringt, ist besonders wichtig der Umstand, daß wir durch bloße Rechnung und mit geringer Mühe unsererseits mit Notwendigkeit zu allen Gleichungen und Bedingungen geführt werden, die *notwendig* und *hinreichend* für die vollständige Lösung irgend eines Problems sind, auf das wir sie anwenden".

Die Funktion, von der hier die Rede ist, ist mit umgekehrtem Vorzeichen die potentielle Energie des verzerrten elastischen Körpers pro Volumeinheit, ausgedrückt in den Verzerrungskomponenten; und die Differentialquotienten der Funktion nach den Verzerrungskomponenten sind die Spannungskomponenten. Green nahm an, daß die Funktion nach Potenzen und Produkten der Verzerrungskomponenten entwickelbar sei. Er ordnete sie daher als Summe homogener Funktionen dieser Größen vom ersten, zweiten und höheren Grade. Von diesen Gliedern darf das erste nicht vorkommen, da die potentielle Energie ein wahres Minimum sein muß, wenn der Körper unverzerrt ist; und da die Verzerrungen sämtlich klein sind, so wird das zweite Glied allein in Betracht kommen. Aus diesem Prinzip leitete Green die Gleichungen der Elastizität ab, die im allgemeinen Falle 21 Konstanten enthalten. Im Fall der Isotropie treten zwei Konstanten auf, und die Gleichungen stimmen mit denen der ersten Cauchyschen Abhandlung[32]) überein.

Lord Kelvin[43]) hat den Beweis für die Existenz der Greenschen

43) Sir W. Thomson, *Quart. J. of Math.* vol. 5 (1855), wieder abgedruckt in *Phil. Mag.* (Ser. 5) vol. 5 (1878) und gleichfalls in *Mathematical and Physical Papers by Sir William Thomson*, vol. 1, Cambridge 1882, p. 291.

Verzerrungsenergie-Funktion auf den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gestützt. Aus diesen Sätzen folgerte er, daß, wenn ein fester Körper ohne Temperaturveränderung verzerrt wird, die Spannungskomponenten gleich den Ableitungen einer Funktion der Verzerrungskomponenten nach diesen einzelnen Komponenten sind. Wie sich zeigen läßt, gilt das gleiche Resultat, wenn die Verzerrung so schnell von statten geht, daß kein Teil des Körpers Wärme aufnimmt oder abgibt.

Die Poissonsche Theorie führt zu dem Schluß, daß der Widerstand eines Körpers gegen Kompression durch rundum gleichförmigen Druck zwei Drittel des Youngschen Moduls des Stoffes und der Widerstand gegen Abscheren zwei Fünftel des Youngschen Moduls beträgt. Ein mit ersterem gleichbedeutendes Resultat findet sich bei Poisson ausgesprochen[44]), letzteres ist tatsächlich enthalten in seiner Theorie der Drillungsschwingungen eines Stabes.[45]) Die Tatsache, daß Widerstand gegen Kompression und Widerstand gegen Abscheren die beiden Grundarten elastischen Widerstandes in isotropen Körpern sind, wurde von Stokes[46]) festgestellt, und er führte endgültig die beiden Hauptmoduln der Elastizität, die jene Widerstände ausdrücken, ein — den „Kompressionsmodul" und den „Schubmodul", wie man sie jetzt nennt. Aus dem Hookeschen Gesetz und aus Symmetriebetrachtungen schloß er, daß allseitig gleicher Druck an einer Stelle von einer ihm proportionalen Kompression ohne Schub und daß jede Schubspannung von einer entsprechenden ihr proportionalen Schubverzerrung begleitet ist. Als experimentelle Grundlage für das Hookesche Gesetz zog er die Tatsache heran, daß es möglich ist, Körper in den Zustand isochroner Schwingung zu versetzen. Nach einem Verfahren, das dem der ersten Cauchyschen Abhandlung[32]) analog ist, aber auf der oben genannten experimentellen Grundlage ruht, leitete er die Gleichungen mit zwei Konstanten ab, wie sie von Cauchy und Green aufgestellt worden waren. Mit Rücksicht auf die verschiedenen Grade des Widerstandes, den verschiedene Klassen von Körpern — Flüssigkeiten, weiche Körper, harte Körper — gegen Kompression und Verdrehung an den Tag legen, lehnte er den aus der Poissonschen Theorie folgenden Schluß ab, wonach der Kompressionsmodul zum Schubmodul im Verhältnis 5 : 3 stünde. Er setzte auseinander, daß, wenn das Verhältnis dieser Moduln als unendlich groß angesehen werden könnte, auch das Verhältnis der Geschwindigkeiten der „longitudinalen" und „transversalen" Wellen unendlich groß sein würde; damit aber würde, wie schon

44) *Annales de Chimie et de Physique,* t. 36 (1827).

45) Diese Theorie findet sich in der in Fußnote 36 angezogenen Abhandlung.

46) S. Fußnote 37. Auf den Unterschied zwischen den beiden Arten von Elastizität war hingewiesen worden von Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle physique et expérimentale,* Metz 1839.

Green gezeigt hatte, die Anwendung der Theorie auf die Optik erleichtert sein.

Die Methoden Naviers, Poissons und der späteren Cauchyschen Abhandlungen führen zu Bewegungsgleichungen, die weniger Konstanten enthalten als jene, zu denen man mittels der Methoden von Green, Stokes und Cauchys erster Abhandlung gelangt. Auf die Bedeutung des Widerspruchs hat zuerst Stokes nachdrücklich hingewiesen. Es handelt sich um folgende Fragen: Ist elastische Äolotropie durch 21 oder durch 15 Konstanten und elastische Isotropie durch zwei Konstanten oder eine zu charakterisieren? Pearson[47]) hat für die beiden Theorien die Ausdrücke „Multikonstanten-Theorie" bezw. „Rarikonstanten-Theorie" geprägt, und der über sie geführte Streit hat fast bis auf die heutige Zeit gedauert. Die Sache liegt so, daß man die rarikonstanten Gleichungen aus den multikonstanten durch Gleichsetzen gewisser Koeffizientenpaare ableiten kann, daß aber die rarikonstanten Gleichungen auf einer besonderen Hypothese über die Konstitution der Materie beruhen, während die Annahme der Multikonstanz diese Hypothese ausschließen soll. Auf Widersprüche zwischen den Resultaten der beiden Theorien läßt sich die Probe durch das Experiment anwenden, und man sollte meinen, daß diese eine endgültige Entscheidung bringen würde; die Schwierigkeit aber, die Isotropie des Versuchsmaterials außer Zweifel zu stellen, hat den Wert vieler experimenteller Untersuchungen fraglich gemacht, und die Neigung der multikonstanten Elastiker, sich auf Experimente mit Stoffen wie Kork, Gallerte und Gummi zu stützen, hat ihre Argumente erschüttert. Zum guten Teil drehte sich die Diskussion um den Wert des Verhältnisses der Querverkürzung zur Längsdehnung eines Stabes, dessen Enden auf Zug beansprucht werden. Dies Verhältnis nennt man oft die „Poissonsche Konstante". Poisson[36]) leitete aus seiner Theorie das Ergebnis ab, daß dies Verhältnis gleich $1/4$ sein müsse. Die Wertheimschen Experimente mit Glas und Messing bestätigten diese Folgerung nicht, und Wertheim[48]) schlug vor, den Bruch gleich $1/3$ anzunehmen — einem Wert, der keine theoretische Unterlage hat. Die zwingende Beweiskraft des Experiments veranlaßte Lamé in seinem Lehrbuch[49]), die multikonstanten Gleichungen anzunehmen, und nach dem Erscheinen dieses Buches ging man allgemein dazu über, sich ihrer zu bedienen. Saint-Venant drückte, obwohl er fest an die Rarikonstanz glaubte, die Ergebnisse seiner Untersuchungen über die Drillung und Biegung und die Verteilung der Elastizität um einen Punkt[50]) in der Sprache

47) Todhunter und Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. 1, Cambridge 1886, p. 496.

48) *Annales de Chimie*, t. 23 (1848).

49) *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris 1852.

50) Die Abhandlung über die Drillung findet sich in den *Mém. des Savants*



der Multikonstanten-Theorie aus. Kirchhoff[51]) schloß sich in seinen Arbeiten über dünne Stäbe und Platten derselben Theorie an und stützte dieselbe durch Experimente, die sich auf die Drillung und Biegung von Stahlstäben bezogen[52]); und Clebsch gebrauchte in seinem Lehrbuch[53]) die Sprache der bikonstanten Isotropie. Kelvin und Tait[54]) taten die Streitfrage mit ein paar Worten ab und machten sich die Stokesschen Anschauungen zu eigen. Die besten neueren Experimente bestätigen den Schluß, daß die Poissonsche Konstante von dem Wert $1/4$ merklich abweichen kann in Stoffen, die unbedenklich als isotrop und homogen behandelt werden können. Den schlagendsten experimentellen Nachweis hat aber wohl Voigt[55]) aus dem Studium der Elastizität von Kristallen erbracht Das Fehlen von Bürgschaften für die Isotropie der Versuchsstoffe bedeutete keine Schwierigkeit mehr, als er den Mut hatte, Experimente mit Stoffen von bekannter äolotroper Beschaffenheit anzustellen.[56]) Der Punkt, der klar zu stellen war, liegt jedoch weiter zurück. Nach Green bestehen für einen Stoff von allgemeinstem äolotropen Charakter 21 unabhängige elastische Konstanten. Die Molekularhypothese, wie sie von Cauchy ausgearbeitet und von Saint-Venant aufrecht erhalten wurde, führt auf 15 Konstanten, so daß, wenn die Rarikonstanten-Theorie richtig ist, 6 unabhängige Relationen zwischen Greens 21 Koeffizienten bestehen müssen. Diese Gleichungen nenne ich die Cauchyschen Relationen.[57]) Voigts Experimente betrafen nun die Drillung und Biegung von Prismen aus verschiedenen Krystallen; für die meisten der letzteren galten die Saint-Venantschen Formeln für äolotrope Stäbe, für die übrigen lieferte er selbst die erforderlichen Formeln. Nur bei Beryll und Steinsalz wurden die Cauchyschen Relationen wenigstens annähernd bestätigt; bei den sieben andern geprüften Krystallarten ergaben sich beträchtliche Unterschiede zwischen den Koeffizienten, die nach jenen Relationen gleich sein müßten.

Unabhängig von der deutlichen Sprache der Experimente hat die

*étrangers,* t. 14 (1855), die über die Biegung im *J. de Math. (Liouville),* (Sér. 2), t. 1 (1856), und die über die Verteilung der Elastizität im *J. d. Math. (Liouville),* (Sér. 2), t. 8 (1863).

51) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 40 (1850) und Bd. 56 (1859),

52) *Ann. Phys. Chem. (Poggendorff),* Bd. 108 (1859).

53) *Theorie der Elastizität fester Körper,* Leipzig 1862.

54) Thomson und Tait, *Natural Philosophy,* 1. Auflage, Oxford 1867, 2. Auflage Cambridge 1879—83.

55) W. Voigt, *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann),* Bde. 31 (1887), 34 und 35 (1888), 38 (1889).

56) Eine gewisse Voraussetzung, die zuerst F. E. Neumann machte, liegt in der Bemerkung, daß die Äolotropie eines Kristalls hinsichtlich der Elastizität aus der kristallographischen Form bekannt ist.

57) Anscheinend sind dieselben zuerst von Saint-Venant in der Abhandlung über die Drillung (s. Fußnote 50) explicite aufgestellt.

Erweiterung unserer Anschauungen über die Konstitution der Materie das ihrige dazu getan, der Rarikonstanten-Theorie den Boden zu entziehen. Die Hypothese der materiellen Punkte und Zentralkräfte hat heutzutage das Feld geräumt. Diese Schwenkung in der physikalischen Spekulation rührt her von mancherlei Ursachen, unter denen das Nichtübereinstimmen der Rarikonstanten-Theorie der Elastizität mit den Ergebnissen des Experiments eine ziemlich untergeordnete Stellung einnimmt. Viel nachhaltiger wirkten die Entwicklung der Atomistik in der Chemie und der statistischen Molekulartheorien in der Physik, der wachsende Umfang der Energetik und die Entdeckung der elektrischen Strahlung. Man erkennt jetzt, daß eine Theorie der Atome einen Teil einer Theorie des Äthers bilden muß und daß die Zuversicht, mit der man ehemals der Hypothese der Zentralkräfte zwischen materiellen Punkten vertraute, voreilig war. Wollen wir die Gesetze der Elastizität fester Körper ermitteln, ohne die Natur des ätherischen Mediums oder die Natur der Atome zu kennen, so bleibt uns nichts übrig als mit Green und Lord Kelvin die bekannten Energiegesetze heranzuziehen; und wir können die Theorie auf eine feste Grundlage stellen, wenn wir uns für die Behauptung, daß die Verzerrungsenergie-Funktion bis zu einem gewissen Grade der Verzerrung eine quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten ist, auf das Experiment berufen, anstatt uns mit Green auf eine Reihenentwicklung der Funktion zu stützen.

Das Problem der Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes in einem festen Körper, der gegebenen Fernwirkungen im Innern und gegebenen Drucken an der Oberfläche unterworfen ist oder aber durch geeignete Oberflächendrucke in einen Körper von vorgeschriebener Oberflächenform deformiert ist, läßt sich auf die analytische Aufgabe zurückführen: Funktionen aufzufinden, die die Verschiebungskomponenten darstellen. Diese Funktionen müssen die Differentialgleichungen des Gleichgewichts in allen Punkten innerhalb der Oberfläche des Körpers befriedigen und außerdem gewissen speziellen Bedingungen an dieser Oberfläche genügen. Die Methoden, die für die Integration der Gleichungen ersonnen worden sind, zerfallen in zwei Klassen. Die Methoden der einen Klasse stimmen darin überein, daß eine spezielle Lösung gesucht wird und die Randbedingungen durch eine Lösung in Form einer (möglicherweise unendlichen) Reihe spezieller Lösungen befriedigt werden. Die speziellen Lösungen lassen sich im allgemeinen durch harmonische Funktionen ausdrücken. Diese Klasse von Lösungen kann man auffassen als eine Erweiterung der Methode der Entwicklung nach Kugelfunktionen und in trigonometrische Reihen. Die Methoden der andern Klasse laufen darauf hinaus, die zu ermittelnden Größen durch bestimmte Integrale auszudrücken, wobei die Elemente der Integrale aus *Singularitäten* ent-

springen, die über die Oberfläche oder im Innenraum verteilt sind. Diese Klasse von Lösungen liefert eine Erweiterung der Methoden, die Green in die Potentialtheorie einführte. Zur Zeit der Entdeckung der Grundgleichungen der Elastizität war die Reihenmethode schon auf astronomische Probleme, akustische Probleme und Probleme der Wärmeleitung angewendet worden[58]; die Singularitätenmethode war noch nicht erfunden.[59] Mit der Anwendung der Reihenmethode auf Probleme des Gleichgewichts elastischer fester Körper machten Lamé und Clapeyron[39] den Anfang. Sie behandelten den Fall des von einer unendlichen Ebene begrenzten Körpers, wenn auf jener ein nach einem beliebigen Gesetz verteilter Druck lastet. Später behandelte Lamé[60] das Problem des von einer Kugel begrenzten Körpers, der durch gegebene Oberflächendrucke deformiert wird. Das Problem der Ebene ist im wesentlichen identisch mit dem der Ausbreitung einer Kraft, die lokal auf ein kleines Stück der Oberfläche eines festen Körpers wirkt, in das Innere des Körpers. Das Kugelproblem baute Lord Kelvin[61] weiter aus, der es für den Zweck der Erforschung der Erdfestigkeit zu verwerten suchte[62], ebenso G. H. Darwin in Verbindung mit andern kosmisch-physikalischen Problemen.[63] Die als Lösungen auftretenden Reihen sind ausgedrückt in Kugelfunktionen. Lösungen der Gleichungen in Zylinderkoordinaten kann man in Besselschen Funktionen ausdrücken[64], aber von Kugel und Zylinder abgesehen ist die Reihenmethode nicht sehr erfolgreich angewendet worden. Von der Singularitätenmethode machte in der Elastizitätstheorie zuerst E. Betti[65] Gebrauch; dieser ging aus von einem gewissen Reziprozitätssatz, dessen Typus sich jetzt in vielen Zweigen der mathematischen Physik wiederfindet. Aus diesem Satz leitete er ohne weiteres eine Formel für den Mittelwert jeder Gattung von Verzerrung ab, die in einem Körper durch gegebene Kräfte hervorgebracht wird. Die Singularitätenmethode ist hauptsächlich von den Elastikern der italienischen Schule weiter ausgebildet worden. Bei der Lösung des Problems der Kraftausbreitung hat sie sich als leistungsfähiger erwiesen als die Reihenmethode. Die Grundlösung,

58) S. Burkhardt, „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen", *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 10, Heft 2.

59) Sie wurde erfunden von Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, Nottingham 1828. Wiederabgedruckt in *Mathematical Papers of the late George Green*, London 1871.

60) *J. de Math. (Liouville)*, t. 19 (1854).

61) *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 153 (1863). Siehe auch *Math. and Phys. Papers*, vol. 3 (Cambridge 1890), p. 351, und Kelvin and Tait, *Nat. Phil.*, Teil 2.

62) *Brit. Assoc. Rep.* 1876, *Math. and Phys. Papers*. vol. 3, p. 312.

63) *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 170 (1879), und vol. 173 (1882).

64) L. Pochhammer, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 81 (1876), p. 33.

65) *Il Nuovo Cimento* (Ser. 2), t. 6—10 (1872 f.).

die die Verschiebung ausdrückt, welche von einer Kraft in einem Punkte eines unbegrenzten Körpers herrührt, wurde von Lord Kelvin[66]) aufgestellt. Später entdeckte sie Boussinesq[67]) gleichzeitig mit andern partikulären Lösungen, die tatsächlich aus ihr durch Synthese sich ableiten lassen. Die gewonnenen Resultate führten Boussinesq zu einer Lösuug des Problems der Ebene und zu einer Theorie der „lokalen Störungen". Nach letzterer nimmt die Wirkung einer Kraft, die in der Umgebung irgend eines Punktes des Körpers angreift, mit wachsender Entfernung von diesem Punkte sehr rasch ab, und ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem, das an einem kleinen Stück des Körpers angebracht wird, ruft eine Wirkung hervor, die in beträchtlicher Entfernung von dem Stückchen zu vernachlässigen ist. Um die Wirkung abzuschätzen, die von den nahe bei einem Punkt angreifenden Kräften in einer gewissen Entfernung von dem Punkte hervorgebracht wird, braucht man nicht die Angriffsweise der Kräfte im einzelnen in Betracht zu ziehen, sondern nur die statische Resultante und das Moment. Die direkte, auf den Bettischen Reziprozitätssatz gegründete Integrationsmethode wendete V. Cerruti[68]) auf das Problem der Ebene an. Einige der Resultate fand, unabhängig von jenem, Hertz, und unter seinen Händen führten dieselben zu einer Theorie des Stoßes und einer Theorie der Härte.[69])

Eine andere Methode zur Bestimmung des Spannungszustandes in einem Körper knüpft an ein von G. B. Airy[70]) verzeichnetes Resultat an. Dieser bemerkte, daß im Falle zweier Dimensionen aus den statischen Gleichungen für einen durch Oberflächendrucke deformierten Körper hervorgeht, daß sich die Spannungskomponenten als partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer einzigen Funktion ausdrücken lassen. Maxwell[71]) erweiterte das Resultat auf den Fall dreier Dimensionen, wo man drei solcher „Spannungsfunktionen" braucht. Später zeigte sich, daß diese Funktionen durch ein ziemlich verwickeltes System von Differentialgleichungen verknüpft sind.[72]) Die

66) Sir W. Thomson, *Cambridge and Dublin* Math. J., 1848, wieder abgedruckt in *Math. and Phys. Papers,* vol. 1, p. 97.

67) In Bezug auf frühere Untersuchungen Boussinesqs betr. einfache Lösungen siehe *Paris, C. R.,* t. 86—88 (1878—1879) und t. 93—96 (1881—1883). Ein vollständigerer Bericht findet sich in seinem Buch, *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques,* Paris 1885.

68) *Rom, Acc. Lincei, Mem. fis. mat.,* 1882.

69) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 92 (1882), und *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes,* Berlin 1882. Die Abhandlungen sind wieder abgedruckt in den *Ges. Werken von Heinrich Hertz,* Bd. 1, Leipzig 1895, p. 155 und 175.

70) *Brit. Assoc. Rep.* 1862, und *Phil. Trans. Roy. Soc.,* vol. 153 (1863), p. 49.

71) *Edinburgh Roy. Soc. Trans*, vol. 26 (1870) = *Scientific Papers*, vol. 2, p. 161.

72) W. J. Ibbetson, *An Elementary Treatise on the Mathematical Theory of perfectly Elastic Solids,* London 1887.

Spannungskomponenten müssen in der Tat mit den Verzerrungskomponenten durch die bekannten Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung verbunden sein, die Verzerrungskomponenten aber sind nicht unabhängig von einander; zwischen den zweiten Differentialquotienten der Verzerrungskomponenten nach den Koordinaten besteht ein System linearer Gleichungen, die, in Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Formeln zwischen Verzerrung und Verschiebung, die Bedingungen ausdrücken, unter welchen den Verzerrungskomponenten eine Verschiebung entspricht.[73]) Durch Berücksichtigung dieser Relationen kann man zu einem vollständigen Gleichungssystem gelangen, dem die Spannungskomponenten zu genügen haben, und damit ist die Möglichkeit eröffnet, den Spannungszustand direkt zu bestimmen ohne den Umweg der Aufstellung und Auflösung von Differentialgleichungen zur Ermittlung der Verschiebungskomponenten.[74]) Im Falle zweier Dimensionen erhält man Gleichungen von einfachem Charakter, die viele interessante Lösungen zulassen.

Die Theorie der freien Schwingungen fester Körper erfordert die Integration der Gleichungen der vibratorischen Bewegung bei vorgeschriebenen Grenzbedingungen für die Spannungen oder Verschiebungen. Poisson[36]) gab die Lösung des Problems der freien Radialschwingungen einer Vollkugel, und Clebsch[58]) begründete die allgemeine Theorie nach dem Muster der Poissonschen Lösung. Diese Theorie enthielt die Verallgemeinerung des Begriffs der „Normalkoordinaten" auf Systeme mit einer unendlichen Zahl von Freiheitsgraden, die Einführung der entsprechenden „Normalfunktionen" und den Nachweis für jene Eigenschaften dieser Funktionen, von denen die Entwicklungen willkürlicher Funktionen abhängen. Die Auseinandersetzungen, die vor und während der Zeit Poissons über die Schwingungen von Saiten, Stäben, Membranen und Platten stattgefunden hatten, hatten Clebschs Verallgemeinerungen den Weg geebnet. Vor der Veröffentlichung des Lehrbuchs von Clebsch hatte Lamé[49]) eine abweichende Theorie vorgeschlagen. Er kannte die Poissonsche Entdeckung der beiden Gattungen von Wellen und schloß, daß die Schwingungen jedes festen Körpers in zwei entsprechende Klassen zerfallen müßten; dieser Voraussetzung gemäß untersuchte er die Schwingungen verschiedener Körper. Die Tatsache, daß seine Lösungen die Bedingungen nicht befriedigen, die an der Begrenzung von Körpern mit spannungsfreier Oberfläche gelten, ist eine hinreichende Widerlegung seiner Theorie; endgültig aber wurde sie abgetan, als alle Arten der freien Schwingung einer homogenen iso-

73) Saint-Venant teilte die Identitäten zwischen den Verzerrungskomponenten mit in seiner Bearbeitung von Naviers *Résumé des Leçons sur l'application de la mécanique*, Paris 1864, „Appendice 3".

74) J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 100.

tropen Kugel ermittelt waren und sich zeigte, daß die Klassen, in die sie zerfallen, Lamés Annahme nicht bestätigen. Die rechnerische Erledigung des allgemeinen Problems der Schwingungen einer Kugel wurde zuerst von P. Jaerisch[75]) vollständig gegeben. Dieser zeigte, daß sich die Lösung ausdrücken läßt mittels Kugelfunktionen und gewisser Funktionen des Abstands vom Kugelzentrum, die praktisch genommen Besselsche Funktionen von der Ordnung einer um $^1/_2$ vermehrten ganzen Zahl sind. Zu demselben Resultate gelangte unabhängig H. Lamb[76]), der über die einfacheren Schwingungsarten der Kugel und die Knotenflächen Aufschluß gab, die in ihr bei Ausführung einer Normalschwingung auftreten. Er berechnete auch die in Betracht kommenden Wurzeln der Frequenzengleichung. L. Pochhammer[77]) hat die Methode der Normalfunktionen auf die Schwingungen von Zylindern angewendet und ist auf Schwingungsarten geführt worden, die den bekannten Schwingungstypen von Stäben analog sind.

Das Problem, mit Hilfe der Gleichungen der schwingenden Bewegung die Ausbreitung von Wellen durch ein elastisches Medium zu verfolgen, erfordert Untersuchungen anderer Art als jene, die sich auf die Normalschwingungsarten beziehen. Im Fall eines isotropen Mediums benutzten Poisson[78]) und Ostrogradsky[79]) Methoden, die auf Zusammensetzung von Lösungen vom einfachen harmonischen Typus hinauslaufen, und gelangten zu einer Lösung, die die Verschiebung zu beliebiger Zeit durch die anfängliche Verteilung von Verschiebung und Geschwindigkeit ausdrückt. Ein abweichendes Verfahren schlug später Stokes[80]) ein; dieser zeigte, daß die beiden Poissonschen Wellen wirbelfreie Dilatationswellen und dilatationsfreie Schiebungswellen sind, letztere mit Rotation der Elemente des Mediums verbunden. Cauchy[41]) und Green[81]) untersuchten die Ausbreitung ebener Wellen durch ein kristallinisches Medium und erhielten für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Gleichungen in Ausdrücken für die Richtung der Normalen zur Wellenfläche. Im allgemeinen besteht die Wellenfläche aus drei Schalen; ist das Medium isotrop, so sind es drei Kugeln, und zwei derselben fallen zusammen. Blanchet[82]) dehnte die Poissonschen Re-

75) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 88 (1880).

76) *London Math. Soc. Proc.,* vol. 13 (1882).

77) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 81 (1876), p. 324.

78) *Paris, Mém. de l'Acad.,* t. 10 (1831).

79) *St. Petersburg, Mém. de l'Acad.* 1 (1831).

80) „On the Dynamical Theory of Diffraction", *Cambridge Phil. Soc. Trans.,* vol. 9 (1849). Wieder abgedruckt in Stokes' *Math. and Phys. Papers,* vol. 2 (Cambridge, 1883).

81) *Cambridge Phil. Soc. Trans.,* vol. 7 (1839). Wieder abgedruckt in Greens *Mathematical Papers,* p. 293.

82) *J. de Math. (Liouville),* t. 5 (1840), t. 7 (1842).

sultate auf den Fall eines kristallinischen Mediums aus. Christoffel[83]) befaßte sich mit dem Fortschreiten einer Unstetigkeitsfläche in einem Medium. In jedem Augenblick scheidet diese Fläche zwei Teile des Mittels von einander, in denen die Verschiebungen sich durch verschiedene Formeln ausdrücken; Christoffel wies nun nach, daß sich die Fläche normal zu sich selbst mit einer Geschwindigkeit fortbewegt, die in jedem Punkt durch die Richtung der Flächennormale nach demselben Gesetze bestimmt ist, das für die in jener Richtung fortschreitenden ebenen Wellen gilt. Außer den Dilatations- und Schiebungswellen, die sich durch einen isotropen Körper fortpflanzen können, hat Lord Rayleigh[84]) eine dritte Gattung untersucht, die sich über die Oberfläche ausbreitet. Die Geschwindigkeit der Wellen dieser Gattung ist kleiner als die der beiden andern.

Vor der Entdeckung der Grundgleichungen besaß man Theorien der Drillung und Biegung von Balken, die von Galileis Untersuchung und von einer Coulombschen Hypothese ausgehen. Die damit aufgeworfenen Probleme gehören, was praktische Anwendungen angeht, zu den wichtigsten, die es gibt, da die meisten Probleme, mit denen die Ingenieure zu tun haben, jedenfalls für die Zwecke einer rohen Annäherung sich auf Fragen des Widerstandes von Balken zurückführen lassen. Cauchy war der erste, der die Grundgleichungen auf diese Klasse von Problemen anzuwenden suchte; seine Untersuchung über die Torsion eines rechteckigen Prismas[85]) ist, wenn auch unrichtig, so doch von geschichtlicher Bedeutung, da er erkannte, daß die Normalschnitte nicht eben bleiben. Auf die Praxis hatte sein Resultat wenig Einfluß. Die technischen Lehrbücher der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts geben eine Theorie der Drillung mit einem Endergebnis, das wir schon als von Coulomb herrührend vermerkten, nämlich daß der Drillungswiderstand proportional ist dem Produkt aus einer elastischen Konstanten, dem Betrag des Dralls und dem Trägheitsmoment des Querschnitts. Was andererseits den Fall der Biegung anbetrifft, so folgten die technischen Lehrbücher dieser Zeit der Bernoulli-Eulerschen (eigentlich Coulombschen) Theorie, die den Biegungswiderstand samt und sonders aus der Dehnung und Verkürzung der Längsfasern entspringen läßt. Saint-Venant gebührt das Verdienst, die Probleme der Balken-Drillung und -Biegung der allgemeinen Theorie zugänglich gemacht zu haben. Er erkannte, wie schwierig es ist, zu allgemeinen Lösungen zu gelangen, wie es aber andererseits für praktische Zwecke durchaus notwendig ist, eine Theorie zu haben, die sich zur Beurteilung der Festigkeit von

83) *Ann. di Mat.* (Ser. 2), t. 8 (1877).
84) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 17 (1887) = *Scientific Papers*, vol. 2, Cambridge 1900, p. 441.
85) *Exercices de mathématiques*, 4me Année, 1829.

Bauwerken anwenden läßt; weiter überlegte er, daß nur in den seltensten Fällen die genaue Angriffsweise und Verteilung der an irgend einer Vorrichtung angebrachten Last bekannt sein dürfte, und kam so dazu, über die Methoden nachzudenken, die vor der Formulierung der Grundgleichungen zur Lösung einzelner Probleme benutzt worden waren. Diese Überlegungen führten ihn zur Erfindung der nach ihm benannten *semi-inversen* Lösungsmethode. Einige der landläufigen Annahmen bezw. der gemeiniglich aus ihnen abgeleiteten Resultate werden, wenigstens in der Mehrzahl der Fälle, zutreffen; und indem man nun einzelne dieser Annahmen oder Resultate beibehält, wird es möglich sein, die Gleichungen zu vereinfachen und so zu Lösungen zu gelangen — allerdings nicht zu solchen, die willkürliche Oberflächenbedingungen befriedigen, aber doch zu solchen, die gewissen praktisch wichtigen Typen von Oberflächenbedingungen genügen.

Das erste Problem, auf das Saint-Venant seine Methode anwendete, war das der Torsion von Prismen, deren Theorie er in der berühmten Abhandlung über die Torsion vom Jahre 1855 entwickelte.[50]) Hierbei nahm er an, daß der Verzerrungszustand sich zusammensetzt aus einer einfachen Drillung um die Prismenachse, wie sie in der Coulombschen Theorie auftritt, und jener Art von Verzerrung, wie sie eine über den Querschnitt des Prismas veränderliche Längsverschiebung mit sich bringt. Die Wirkung dieser letzteren zeigt sich in einer Verwölbung der Querschnitte zu krummen Flächen. Er legte dar, daß sich ein derartiger Verzerrungszustand in dem Prisma durch Kräfte aufrecht erhalten läßt, die nur an den Enden angreifen, und daß die an den Enden anzubringenden Kräfte statisch gleichwertig sind mit einem Kräftepaar um die Achse des Primas. Die Stärke des Moments kann man ausdrücken als das Produkt aus dem Drall, der Steifigkeit des Materials, dem Quadrate des Flächeninhalts des Querschnitts und einem Zahlenfaktor, der von der Gestalt des Querschnitts abhängt. Für eine große Klasse von Querschnitten ist dieser Zahlenfaktor sehr nahe proportional dem Verhältnis des Querschnittsinhalts zum Quadrat des Trägheitsradius, bezogen auf die Achse des Prismas. Spätere Untersuchungen haben gezeigt, daß das Problem vom analytischen Standpunkt identisch ist mit zwei verschiedenen hydrodynamischen Problemen, nämlich dem Fließen einer zähen Flüssigkeit in einer engen Röhre von der Form des Prismas[86]) und der Bewegung, die eine reibungslose Flüssigkeit in einem Gefäß von der Form des Prismas annimmt, wenn das Gefäß um seine Achse gedreht wird.[87]) Diese hydrodynamischen Analogien haben zu einer beträchtlichen Vereinfachung des Problems geführt.

86) J. Boussinesq, *J. d. Math.* (*Liouville*), (Sér. 2), t. 16 (1871).
87) Kelvin and Tait, *Nat. Phil.*, Part. 2, p. 242.

Die alten Biegungstheorien schlossen zwei widersprechende Voraussetzungen in sich: 1) daß die Verzerrung aus Dehnungen und Verkürzungen der Längsfasern besteht, 2) daß die Spannung aus Zug in den gedehnten Fasern (auf der vom Krümmungsmittelpunkt abgewandten Seite) und Druck in den verkürzten Fasern (auf der dem Krümmungsmittelpunkt zugewandten Seite) besteht. Wenn der Spannungszustand streng durch die zweite Voraussetzung gegeben ist, so müssen die Längsdehnungen von Querverkürzungen und die Längsverkürzungen von Querdehnungen begleitet sein. Ferner verschwindet über jeden Normalschnitt des gebogenen Balkens die Resultante der Spannungen, wie sie die alten Theorien liefern, und diese Spannungen sind statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar um eine Achse, die zur Biegungsebene senkrecht steht. Mithin sind die Theorien auf keinen Fall der Biegung durch eine transversale Last anwendbar. Saint-Venant[88]) übernahm aus den älteren Theorien zwei Voraussetzungen. Er nahm an, daß die Dehnungen und Verkürzungen der Längsfasern ihren Abständen von derjenigen Ebene proportional sind, die durch die Linie der Schwerpunkte der Normalschnitte (die „Zentrallinie") senkrecht zur Biegungsebene gebreitet ist. Desgleichen nahm er an, daß auf die zur Zentrallinie parallelen Ebenen keine Normalspannungen wirken. Die Spannungs- und Verzerrungszustände, die diesen Bedingungen in einem prismatischen Körper genügen, lassen sich durch Kräfte und Momente erhalten, die allein an den Enden angebracht sind, und schließen zwei Fälle in sich. Der eine ist der der gleichförmigen Biegung eines Stabes durch Kräftepaare, die an den Enden angreifen. In diesem Falle ist die Spannung durch die älteren Theorien richtig gegeben, und die Krümmung der Zentrallinie ist proportional dem Biegungsmoment, wie in jenen Theorien; aber die Querverkürzungen und Querdehnungen bewirken eine Verkrümmung der zur Biegungsebene senkrechten Längsschnitte zu anticlastischen Flächen. Der zweite, in der Saint-Venantschen Theorie eingeschlossene Fall der Biegung bezieht sich auf einen in horizontaler Lage am einen Ende eingemauerten Sparren oder Balken, der durch eine am andern Ende angebrachte vertikale Last gebogen wird. In diesem Falle ist der Spannungszustand, wie ihn die älteren Theorien liefern, durch Hinzufügen von Schubspannungen zu berichtigen. Die über irgend einen Normalschnitt verteilten Normalspannungen sind statisch gleichwertig mit einem Moment, das der Krümmung der Zentrallinie an der Schnittstelle proportional ist, genau wie in der Theorie der einfachen Biegung. Die Tangentialkräfte über einen Normalschnitt sind mit der Endlast statisch gleichwertig, aber in jedem Punkt sind Größe und Richtung der Tangentialspannung völlig bestimmt und

88) S. die in Fußnote 50 angezogenen Abhandlungen von 1855 und 1856.

folgen ziemlich verwickelten Gesetzen. Die von den älteren Theorien gelieferte Verzerrung ist durch Hinzufügen von Querverkürzungen und Querdehnungen zu berichtigen, genau wie in der Theorie der einfachen Biegung, ferner durch Überlagerung der den Schubspannungen entsprechenden Schiebungen.

In der Saint-Venantschen Theorie der Torsion und der Biegung sind die Momente und Kräfte, die die Drillung und Biegung bewirken, die Resultanten von Spannungen, die an den End-Querschnitten ausgeübt werden, und diese Spannungen sind dort auf eine völlig bestimmte Art und Weise verteilt. Die an wirklichen Bauwerken angebrachten Kräfte und Momente sind aber selten auf diese Art und Weise verteilt. Die Anwendung der Theorie auf praktische Probleme beruht nun auf einem von Saint-Venant eingeführten Prinzip, das man wohl das „Prinzip der elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichwirkender Lastensysteme" genannt hat. Nach diesem Prinzip sind die Wirkungen, die aus Abweichungen von dem angenommenen Lastenverteilungsgesetz entspringen, unerheblich, ausgenommen in der Nähe der Enden des gebogenen Balkens oder gedrillten Stabes; in der Nähe der Enden aber rufen sie nur „lokale Störungen" hervor. Bedingung für die praktische Brauchbarkeit der Resultate ist, daß die Länge des Balkens ein beträchtliches Vielfaches von dem größten Durchmesser seines Querschnitts ist.

Spätere Untersuchungen von A. Clebsch[53]) und W. Voigt[89]) haben zu beträchtlichen Vereinfachungen der Saint-Venantschen Theorie geführt. Clebsch zeigte, daß die Annahme, es wirkten auf die zur Zentrallinie parallelen Ebenen keine Normalspannungen, für sich vier Gleichgewichtsfälle für einen prismatischen Körper ergibt, nämlich 1) einfache Dehnung durch Zugbeanspruchung an den Enden, 2) einfache Biegung durch Kräftepaare, 3) Drillung, 4) Biegung eines Sparrens durch transversale Endlast. Voigt zeigte, daß die Annahme, die Spannung in jedem Punkte sei unabhängig von der längs des Balkens gemessenen Koordinate, für sich auf die ersten drei Fälle führt und daß die Annahme, die Spannung sei eine lineare Funktion jener Koordinate, den vierten Fall ergibt. Nimmt man statt der linearen Funktion eine quadratische, so kann man noch den Fall des an den Enden unterstützten Balkens einbeziehen, der durch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Last gebogen wird.[90]) Der Fall der ungleichförmigen Belastung läßt sich, sofern die Oberflächendrucke hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der längs des Balkens gemessenen Koordinate ganze rationale Funktionen sind, auf den Fall der gleich-

---

89) „Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle", *Göttinger Abhandlungen*, Bd. 34 (1887).

90) J. H. Michell, *Quart. J. of Math.*, vol. 32 (1901).



förmigen Belastung zurückführen.[91]) Aus diesen Theorien geht hervor, daß, wenn an dem Balken seitliche Kräfte angreifen, die in der Saint-Venantschen Theorie geltende Proportionalität zwischen der Krümmung der Zentrallinie und dem Biegungsmoment nicht mehr genau zutrifft.[92]) Von ungewöhnlichen Belastungsverhältnissen abgesehen ist jedoch die Abänderung, die in jener Beziehung Platz zu greifen hat, von geringer praktischer Bedeutung.

Die Saint-Venantsche Theorie der Torsion und der einfachen Biegung haben in technische Lehrbücher Eingang gefunden; in den meisten Büchern über angewandte Mechanik wird aber die Theorie der Biegung durch transversale Belastung nach einer Methode behandelt, die von Jouravski[93]) und Rankine[94]) erfunden und später von Grashof[95]) weiter ausgebildet wurde. Die nach dieser Methode bestimmten Spannungskomponenten befriedigen nicht die notwendigen Bedingungen, die es verbürgen, daß ihnen irgend ein mögliches Verschiebungssystem entspricht.[73]) Die Spannungsverteilung, die man mit dieser Methode findet, ist jedoch annähernd richtig im Falle eines Balkens, dessen Breite nur ein kleiner Bruchteil der Höhe ist.[96])

Die wichtigste praktische Anwendung der Biegungstheorie ist jene, die Navier[97]) auf die Biegung eines auf Stützen ruhenden Balkens machte. Die Last mag aus dem Eigengewicht des Balkens und aus Gewichten bestehen, die am Balken befestigt sind. Den Youngschen Modul bestimmt man gewöhnlich durch Beobachtung der Durchbiegung eines an den Enden unterstützten und in der Mitte belasteten Stabes. Dergleichen Anwendungen der Theorie gründen sich sämtlich auf die Proportionalität der Krümmung mit dem Biegungsmoment. Das Problem des durchlaufenden Trägers, der auf mehreren Stützen ruht, war anfangs recht schwierig; für jeden Abschnitt hatte man nach der Navierschen Methode eine Lösung zu finden und dann die Lösungen unter einander zu vergleichen, um die Integrationskonstanten zu be-

---

91) E. Almansi, *Rom, Acc. Lincei Rend.* (Ser. 6), t. 10 (1901), p. 333, 400. Im zweiten dieser Aufsätze wird eine Lösung des Problems der Biegung durch gleichmäßige Belastung durch eine Methode gewonnen, die von der Michellschen in dem eben angezogenen Aufsatz abweicht.

92) Dies Resultat vermerkte zuerst K. Pearson, *Quart. J. of Math.*, vol. 24 (1889), in Verbindung mit einem besonderen Gesetz der Lastverteilung über den Querschnitt.

93) *Ann. des ponts et chaussées*, 1856.

94) *Applied Mechanics*, 1. Auflage, London 1858. Die Methode ist in späteren Auflagen beibehalten worden.

95) *Elastizität und Festigkeit*, 2. Auflage, Berlin 1878. Grashof gibt ebensowohl die Saint-Venantsche Theorie.

96) Saint-Venant vermerkte dies Resultat in seiner Ausgabe der Navierschen *Leçons*, p. 394.

97) In der zweiten Auflage seiner *Leçons* (1833).

stimmen. Die rechnerischen Schwierigkeiten verminderten sich außerordentlich, als Clapeyron[98]) bemerkte, daß die Biegungsmomente in drei auf einander folgenden Unterstützungspunkten durch eine unveränderliche Beziehung verknüpft sind; immerhin hat man in vielen besonderen Fällen noch eine umständliche Rechnung. Mohr[99]) hat jedoch eine graphische Lösungsmethode erfunden, und diese macht einen großen Teil der Rechnungen, die früher mittels des Clapeyronschen „Drei-Momenten-Satzes" erledigt wurden, überflüssig. Viele andere Anwendungen der Biegungstheorie auf Fachwerkprobleme findet man in Büchern wie Müller-Breslaus *Neuere Methoden der Festigkeitslehre* (Leipzig 1886), Weyrauchs *Theorie elastischer Körper* (Leipzig 1884), Ritters *Anwendungen der graphischen Statik* (Zürich 1888). Eine umfangreiche Literatur ist über diesen Gegenstand entstanden, die Elastizitätstheorie findet darin aber nur spärliche Verwendung.

Die Theorie der Biegung und Drillung dünner Stäbe und Drähte — einschließlich der Theorie der Spiralfedern — wurde lange unabhängig von den Grundgleichungen der Elastizität mit Hilfe von Methoden entwickelt, die den von Euler benutzten verwandt sind. Anfangs nahm man an, daß das Biegungsmoment in die Oskulationsebene der von der Zentrallinie gebildeten Kurve fallen müsse; und als Binet[100]) die Gleichung der Momente um die Tangente einführte, schloß Poisson[101]) daraus, daß das Drillungsmoment konstant sei. Erst allmählich gelangte man zu der Vorstellung, daß zwei Biegungsmomente in den beiden Hauptebenen in Betracht kommen, und zum Verständnis des Drallbetrags. Nachdem man so die Anfangsgründe der Theorie gewonnen hatte, brauchte man offenbar nur noch zu wissen, wie die Biegungs- und Drillungsmomente sich durch die Krümmung und den Drall ausdrücken[102]), um mit Hilfe der gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen die von der Zentrallinie angenommene Kurvenform, den Drall des Drahts um jene Linie und die in jedem Querschnitt übertragenen Zug- und Schubkräfte zu ermitteln. Die Biegungs- und Drillungsmomente sowohl wie die über einen Querschnitt resultierenden Kräfte müssen

98) *Paris, C. R.,* t. 45 (1857). Die Geschichte des Clapeyronschen Satzes gibt J. M. Heppel, *Proc. Roy. Soc., London,* vol. 19 (1871).

99) „Beitrag zur Theorie des Fachwerks", *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 1874. Dies ist der von Müller-Breslau gegebene Hinweis. Lévy berichtet über die Methode in seiner *Statique Graphique,* t. 2 und schreibt sie Mohr zu. Einen etwas abweichenden Bericht gibt Canevazzi in *Memorie dell' Accademia di Bologna* (Ser. 4), t. 1 (1880). Eine Erweiterung der Methode findet sich bei Culmann, *Die graphische Statik*, Bd. 1, Zürich 1875. S. auch Ritter, *Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken,* Zürich 1883.

100) *J. de l'École polytechnique*, t. 10 (1815).

101) *Correspondance sur l'École polytechnique*, t. 3 (1816).

102) Die entsprechenden Formeln verdankt man Saint-Venant, *Paris, C. R.,* t. 17, 19 (1843, 1844).

von den auf die Querschnittselemente wirkenden Spannungen herrühren, und die richtigen Ausdrücke für jene hat man mittels der allgemeinen Theorie zu suchen. Hier erhebt sich aber die Schwierigkeit, daß die Grundgleichungen nur bei kleinen Verschiebungen anwendbar sind, während in Spiralfedern u. dgl. die Verschiebungen keineswegs klein sind. Kirchhoff[103]) war der erste, der dieser Schwierigkeit die Spitze bot. Er legte dar, daß die Grundgleichungen auf jedes Stückchen eines dünnen Stabes streng anwendbar sind, wenn alle linearen Abmessungen des Stückchens von derselben Größenordnung sind wie die Durchmesser des Querschnitts. Er wies darauf hin, daß die Gleichgewichts- oder Bewegungsgleichungen für eine erste Annäherung sich vereinfachen ließen durch Weglassung der kinetischen Reaktionen und der im Innern verteilten Fernwirkungen. Mit Hilfe eines größtenteils kinematischen Verfahrens entwickelte Kirchhoff seine Theorie. Wenn ein dünner Stab gebogen und gedrillt wird, so erfährt jedes Element eine Verzerrung, die der in einem Saint-Venantschen Prisma analog ist; benachbarte Elemente aber müssen fortgesetzt aneinander passen. Um diese Art der Kontinuität auszudrücken, sind gewisse Bedingungen anzusetzen; diese Bedingungen nun nehmen die Gestalt von Differentialgleichungen an, die die relativen Verschiebungen von Punkten in einem Stückchen des Stabes verknüpfen mit den Relativkoordinaten der Punkte und den Größen, die die Lage des Stückchens inbezug auf den Stab als Ganzes bestimmen. Aus diesen Differentialgleichungen leitete Kirchhoff eine ungefähre Schätzung der Verzerrung in einem Stabelemente ab und daraus den Betrag der potentiellen Energie pro Längeneinheit, ausgedrückt durch die Dehnung, die Krümmungskomponenten und den Drall. Die Gleichgewichts- und Schwingungsgleichungen gewann er durch Variation der Energie-Funktion. Im Falle des dünnen Stabes, an dem nur an den Enden Kräfte angreifen, zeigte er, daß die die Form der Zentrallinie bestimmenden Gleichungen identisch sind mit den Bewegungsgleichungen eines schweren starren Körpers, der in einem Punkte befestigt ist. Dieser Satz ist bekannt als „Kirchhoffs kinetische Analogie".

Die Kirchhoffsche Theorie hat zu vielen Erörterungen Anlaß gegeben. Clebsch[53]) schlug vor, jenen Teil derselben, mittels dessen die Biegungs- und Drillungsmomente sich berechnen lassen, durch Berufung auf die Resultate der Saint-Venantschen Biegungs- und Drillungstheorie zu ersetzen. Kelvin und Tait[54]) regten an, die Kirchhoffsche Formel für die potentielle Energie durch allgemeine Überlegungen zu begründen. J. Boussinesq[104]) schlug vor, durch

103) „Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes", *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 56 (1859). Die Theorie findet sich auch in Kirchhoffs *Vorlesungen über math. Phys., Mechanik* (3. Auflage, Leipzig 1883).

104) *J. de Math.* (*Liouville*), (Sér. 2), t. 16 (1871).

derartige Überlegungen zu Kirchhoffs Näherungsausdruck für die Dehnung einer Längsfaser zu gelangen. Clebsch[53]) gab die abgeänderten Formeln für die Biegungs- und Drillungsmomente bei einem Stabe, dessen Zentrallinie im ungespannten Zustand krumm ist; spätere, unabhängige Untersuchungen haben seine Resultate bestätigt. Die Auseinandersetzungen, die stattgefunden haben, haben manche Schwierigkeiten geklärt, und die Ergebnisse der Theorie sind, losgelöst von den Methoden, durch die man sie gewann, durch die späteren Schriftsteller[105]) bestätigt worden.

Die Anwendungen der Kirchhoffschen Theorie dünner Stäbe umfassen die Theorie der *Elastica*, die im einzelnen mittels des Theorems von der kinetischen Analogie untersucht worden ist[106]), die Theorie der Spiralfedern, deren Einzelheiten Kelvin und Tait[54]) ausgearbeitet haben, und mannigfache Probleme elastischer Stabilität. Von letzteren sei erwähnt das Problem des Knickens eines elastischen Ringes, der unter radial nach innen gerichtetem und ringsum gleichmäßigem Drucke steht.[107])

Die Theorie der Schwingungen dünner Stäbe wurde den allgemeinen Gleichungen der schwingenden Bewegung elastischer fester Körper durch Poisson[36]) untergeordnet. Er betrachtete den Stab als Kreiszylinder von kleinem Querschnitt und entwickelte alle vorkommenden Größen nach Potenzen der Entfernung eines Teilchens von der Zylinderachse. Vernachlässigt man Glieder, die über eine gewisse Größenordnung (die vierte Potenz des Radius) hinausgehen, so sind die Gleichungen für die Biegungsschwingungen identisch mit den Eulerschen Gleichungen der Querschwingung. Die für die Längsschwingungen gefundene Gleichung hatte Navier[108]) aufgestellt. Die Gleichung für die Torsionsschwingungen gewann zuerst Poisson[36]) Das Neue in Poissons Resultaten bestand, was das Problem der Schwingungen von Stäben betrifft, vorzüglich darin, daß die Koeffizienten, von denen die Frequenzen abhängen, durch die in den Grundgleichungen vorkommenden Konstanten ausgedrückt waren; einen Fortschritt in der Methode aber bedeutete die Ableitung der allgemein anerkannten speziellen Differentialgleichungen, die diese Schwingungsarten beherrschen, aus den Grundgleichungen der Elastizität. Auf L. Pochhammers vollständigere Untersuchung[77]) wurde schon Bezug genommen. Die Poissonsche Theorie wird als Näherungstheorie durch

105) S. z. Bsp. A. B. Basset, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 23 (1892), und *Amer. J. of Math.*, vol. 17 (1895), und J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 130.

106) W. Heß, *Math. Ann.*, Bde. 23 (1884) und 25 (1885).

107) Die erste Untersuchung dieses Problems scheint herzurühren von Bresse, *Cours de mécanique appliquée, Première partie*, Paris 1859.

108) *Bulletin des Sciences à la Société philomatique*, 1824.

Anwendung der Kirchhoffschen Resultate bestätigt. Diese Anwendung hat man ausgedehnt auf die Schwingungen krummer Stäbe; das erste Problem, das gelöst wurde, war das der Biegungsschwingungen eines Kreisringes, der in seiner eigenen Ebene schwingt.[109])

Ein wichtiges Problem, das sich in Zusammenhang mit der Theorie der Längsschwingungen ergibt, ist das Problem des Stoßes. Wenn zwei Körper zusammenprallen, so gerät jeder in einen Zustand innerer Schwingung; man scheint nun gehofft zu haben, daß eine Lösung des Problems der Schwingungen, die in zwei in ihrer Längsrichtung aufeinander stoßenden Balken entstehen, über die Gesetze des Stoßes Licht verbreiten würde. Poisson[110]) war der erste, der von diesem Gesichtspunkte aus eine Lösung des Problems versuchte. Seine Integrationsmethode mittels trigonometrischer Reihen vermehrt außerordentlich die Schwierigkeit, allgemeine Resultate abzuleiten; durch einen unseligen Rechenfehler gelangte er zu der paradoxen Schlußfolgerung, daß die Balken, wenn sie aus gleichem Stoff bestehen und gleichen Querschnitt besitzen, sich nie wieder trennen, es sei denn, daß sie gleich lang wären. Saint-Venant[111]) behandelte das Problem mit Hilfe der Lösung der Schwingungsgleichung in willkürlichen Funktionen und gelangte zu gewissen Ergebnissen, deren wichtigste sich auf die Dauer des Stoßes und die Existenz eines scheinbaren „Restitutionskoeffizienten“ für vollkommen elastische Körper beziehen.[112]) Diese Theorie wird durch das Experiment nicht bestätigt. Eine von Voigt[113]) angedeutete Verbesserung ergab, ins einzelne ausgeführt, keine merklich bessere Übereinstimmung; es scheint also, daß der Versuch, die Erscheinungen des Stoßes aus Schwingungsvorgängen zu verstehen, aufgegeben werden muß. Viel erfolgreicher erwies sich die Hertzsche Theorie[114]), die man aus einer Lösung jenes Problems gewinnt, das wir das Problem der Kraftausbreitung nannten. Hertz stellte über einen besonderen Fall desselben, den zweier gegeneinander gedrückter Körper, eine selbständige Untersuchung an. Er schlug vor, die in ihnen durch den Stoß hervorgerufene Verzerrung als örtliche statische Wirkung anzusehen, die allmählich entsteht und allmählich wieder verschwindet; und er fand Mittel und Wege, die Dauer des Stoßes und Umfang und Gestalt der zur Berührung

---

109) R. Hoppe, *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 73 (1871).

110) In seinem *Traité de Mécanique,* 1833.

111) „Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques...“, *J. de Math. (Liouville),* (Sér. 2), t. 12 (1867).

112) Vgl. Hopkinson, *Messenger of Mathematics,* vol. 4, 1874.

113) *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann),* Bd. 19 (1882). S. auch Hausmanninger in denselben *Annalen,* Bd. 25 (1885).

114) „Über die Berührung fester elastischer Körper“, *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 92 (1882).

kommenden Teile zu bestimmen. Die Theorie gestattete einen befriedigenden Vergleich mit dem Experiment.

Die Theorie der Schwingungen läßt sich auf Probleme anwenden, die sich auf mancherlei Arten von Erschütterungen und auf den Einfluß beweglicher Lasten beziehen. Sowohl die Trägheit wie die elastischen Rückwirkungen der Körper spielen beim Widerstand gegen Verzerrung unter rasch wechselnden Bedingungen mit; den hierbei auftretenden Widerstand bezeichnet man zuweilen als „dynamischen Widerstand". Mit dem speziellen Problem des longitudinalen Stoßes eines schweren Körpers gegen das eine Ende eines Stabes beschäftigten sich Sébert und Hugoniot[115]), sowie Boussinesq.[116]) Die Folgerungen, zu denen sie gelangten, hat Saint-Venant[117]) tabellarisch und zeichnerisch dargestellt. Praktisch bedeutsamer sind aber wohl die Probleme dynamischen Widerstandes gegen Impulse, welche Biegung hervorzubringen suchen. Wenn ein Körper senkrecht gegen einen Stab anschlägt, so gerät der Stab in Schwingung; falls sich nun der Körper mit dem Stabe bewegt, so wird die gewöhnliche, in Normalfunktionen ausgedrückte Lösung für die Schwingungen des Stabes hinfällig. Lösungen verschiedener derartiger Probleme, ausgedrückt in den Normalfunktionen des von dem Stab und dem anschlagenden Körper gebildeten zusammengesetzten Systems, stammen von Saint-Venant.[118])

Von den Problemen dynamischen Widerstandes müssen wir besonders Willis' Problem der wandernden Last anführen. Wenn ein Zug über eine Brücke fährt, so ist die entstehende Verzerrung nicht identisch mit jener, welche auftritt, wenn derselbe Zug auf der Brücke steht. Um die damit vorgelegte Aufgabe zu erläutern, schlug Willis[119]) vor, die Brücke als geraden Draht und den Zug als durchbiegendes Gewicht anzusehen. Indem er die Trägheit des Drahtes vernachlässigte, erhielt er eine Differentialgleichung, die hernach von Stokes[120]) gelöst wurde. Spätere Schriftsteller haben gezeigt, daß der vernachlässigte Einfluß der Trägheit sehr bedeutend ist. Zu einer vollständigeren Lösung gelangten M. Philipps[121]) und Saint-Venant[122]); ein ausgezeichnetes

115) *Paris, C. R.*, t. 95 (1882).

116) *Applications des Potentiels* ..., Paris 1885. Die Resultate wurden veröffentlicht in einer Note in *Paris, C. R.*, t. 97 (1883).

117) In Abhandlungen in *Paris, C. R.*, t. 97 (1883), wieder abgedruckt als Anhang zu seiner Übersetzung des Lehrbuchs von Clebsch (Paris 1883).

118) In der eben angezogenen Clebsch-Ausgabe, *Note du* § 61. Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Kap. VIII.

119) Anhang zum *Report of the Commissioners ... to enquire into the Application of Iron to Railway Structures* (1849).

120) *Cambridge, Phil. Soc. Trans.* vol. 8 (1849) = Stokes, *Math. and Phys. Papers*, vol. 2 (Cambridge 1883), p. 178.

121) *Paris, Ann. des Mines*, t. 7 (1855).

122) In der Clebsch-Ausgabe, *Note du* § 61.

*précis* ihrer Resultate kann man im zweiten Bande von Todhunter und Pearsons *History* (Artikel 373 ff.) nachlesen.

Wir sahen bereits, wie Probleme des Gleichgewichts und der Schwingungen ebener Platten und krummer Schalen vor der Entdeckung der Grundgleichungen der Elastizität in Angriff genommen wurden und wie diese Aufgaben zu jenen gehörten, die zur Erschließung solcher Gleichungen führten. Nach der Formulierung der Gleichungen scheint man in der Behandlung des Problems der Schalen viele Jahre lang wenig Fortschritte gemacht zu haben; viel Beachtung fand aber das speziellere Problem der Platten. Sowohl Poisson[123]) wie Cauchy[124]) behandelten es, ausgehend von den Grundgleichungen der Elastizität und von der Annahme, daß alle vorkommenden Größen sich nach Potenzen des Abstandes von der Mittelfläche entwickeln lassen. Die Gleichungen des Gleichgewichts und der freien Schwingung, die für den Fall gelten, daß die Verschiebung rechtwinkelig zur Ebene der Platte gerichtet ist, wurden abgeleitet. Über die Poissonschen Randbedingungen ist viel gestritten worden. Dieselben drücken aus, daß die resultierenden Kräfte und Kräftepaare, die am Rande angreifen, gleich sein müssen den Kräften und Kräftepaaren, die aus der Verzerrung entspringen. In einer berühmten Abhandlung wies Kirchhoff[125]) nach, daß von jenen Bedingungen eine überzählig ist, sie sich also im allgemeinen nicht gleichzeitig befriedigen lassen. Seine Methode ruht auf zwei Voraussetzungen: 1) anfänglich zur Mittelfläche der Platte normale Fasern bleiben nach der Verzerrung gerade und normal zur Mittelfläche, 2) alle Elemente der Mittelfläche bleiben ungedehnt. Diese Voraussetzungen ermöglichten es ihm, die potentielle Energie der gebogenen Platte durch die in der Mittelfläche hervorgerufenen Krümmungen auszudrücken. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit wurden sodann die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen abgeleitet; schließlich wurden diese auf das Problem der Biegungsschwingungen einer Kreisplatte angewendet.

Man kann das Problem der Platten mittels ähnlicher Überlegungen in Angriff nehmen, wie sie Kirchhoff in seiner Theorie dünner Stäbe gebrauchte. Eine Behandlung des Problems nach diesem Verfahren wurde von Gehring[126]) geliefert und später in verbesserter Form von

123) In der Abhandlung vom Jahre 1828. Die Untersuchung ist zum großen Teil in Todhunter und Pearsons *History* wiedergegeben.

124) In einem Artikel „Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide" in den *Exercices de mathématiques,* vol. 3 (1828). Von diesem Artikel ist das meiste ebenfalls von Todhunter und Pearson wiedergegeben.

125) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 40 (1850).

126) „De Æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ crystallinæ definiuntur" (Diss.), Berlin 1860. Man kann die Entwicklungen in Kirchhoffs *Vorlesungen über math. Phys., Mechanik,* zum Teil auch im Lehrbuch von Clebsch nachlesen.

Kirchhoff[127]) übernommen. Im einzelnen ähnelt die Ausführung außerordentlich jener in Kirchhoffs Theorie dünner Stäbe; sie führt zu einem Ausdruck für die potentielle Energie pro Flächeneinheit der Mittelfläche der Platte. Dieser Ausdruck besteht aus zwei Teilen: der eine ist eine quadratische Funktion der Größen, welche die Dehnung der Mittelfläche definieren, mit einem der Plattendicke proportionalen Koeffizienten, der andere eine quadratische Funktion der Größen, welche die Biegung der Mittelfläche definieren, mit einem Koeffizienten, der der dritten Potenz der Dicke proportional ist. Die Gleichungen der kleinen Bewegung werden durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit abgeleitet. Wenn die Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche sehr klein ist, so hängt die Biegung nur von den zur Plattenebene senkrechten Verschiebungen, die Dehnung nur von den zur Plattenebene parallelen Verschiebungen ab, und die Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen. Die Gleichung der Biegungsschwingungen und die Grenzbedingungen stimmen überein mit denjenigen, die Kirchhoff früher aufgefunden und diskutiert hatte.[125])

Wie in der Theorie der Stäbe, so wendet sich auch in der Plattentheorie die Aufmerksamkeit vielmehr den auf die Gesamtdicke bezogenen Drucken, Schubkräften und Biegungsmomenten zu als den auf die Flächenelemente wirkenden Spannungen, die zu solchen Kräften und Momenten Anlaß geben. Um die Vorstellungen zu fixieren, denken wir die Platte horizontal und betrachten die auf eine gedachte vertikale Schnittebene ausgeübten Kräfte; auf dieser Ebene wollen wir durch zwei benachbarte Vertikalen ein kleines Flächenstück begrenzen. Die Entfernung dieser beiden Linien heiße die „Breite“ des Flächenstücks. Die Spannungen auf die Elemente dieses Flächenstücks sind statisch gleichwertig mit einer Kraft im Schwerpunkt desselben und einem Moment. Ist die „Breite“ sehr klein, so ist die Größe der Kraft und des Moments der Breite proportional und wir können sie auf die Längeneinheit der Linie beziehen, in der unsere vertikale Schnittebene die Mittelfläche der Platte durchsetzt. Die so gerechneten Kraft- und Momentenkomponenten nennen wir die „Spannungsresultanten“ und „Spannungsmomente“. Die Spannungsresultanten bestehen aus einem Zug senkrecht zur Ebene des Flächenstücks, einer wagerechten Schubkraft und einer lotrechten Schubkraft. Die Spannungsmomente haben eine Komponente um die Normale der Schnittebene, welche wir das „Drillungsmoment“ nennen, und eine Komponente in der diese Normale enthaltenden Vertikalebene, welche wir das „Biegungsmoment“ nennen. Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente hängen ab von der Richtung der Schnittebene, sie sind aber für alle derartigen Richtungen bekannt, wenn man sie für zwei derselben kennt.

127) *Vorlesungen über math. Phys., Mechanik.*

Clebsch[53]) übernahm aus der Kirchhoff-Gehringschen Theorie die ungefähre Schätzung der Verzerrung und Spannung in einem kleinen von vertikalen Schnittebenen begrenzten Teil der Platte und stellte die in den Spannungsresultanten und Spannungsmomenten ausgedrückten Gleichgewichtsbedingungen für die Platte auf. Seine Gleichungen zerfallen in zwei Gruppen: die eine Gruppe enthält die Zugspannungen und die horizontalen Schubkräfte, die andere Gruppe die Spannungsmomente und die vertikalen Schubkräfte. Die letztere Gleichungsgruppe bezieht sich auf die Biegung der Platte und ist von der Form, daß, wenn der Zusammenhang zwischen den Spannungsmomenten und der Deformation der Mittelebene bekannt ist, die vertikalen Schubkräfte sich bestimmen lassen und eine Gleichung für die Durchbiegung der Platte aufgestellt werden kann. Die Ausdrücke für die Momente sind aus der Kirchhoffschen Theorie zu entnehmen. Clebsch löste seine Gleichung für die Durchbiegung einer Kreisplatte, die am Rande eingeklemmt und irgendwie belastet ist.

Die ganze Theorie der in Spannungsresultanten und Spannungsmomenten ausgedrückten Gleichgewichtsbedingungen wurde von Kelvin und Tait[54]) über jede Kritik erhoben. Diese Autoren bemerkten auch, daß im Falle der gleichförmigen Biegung die Ausdrücke für die Spannungsmomente sich aus der Saint-Venantschen Theorie der antiklastischen Biegung eines Balkens ableiten lassen; die Verschmelzung zweier Poissonschen Randbedingungen zu einer Kirchhoffschen erklärten sie als Beispiel für das Prinzip der elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichwirkender Lastensysteme. Neuere Untersuchungen haben dazu beigetragen, die Schwierigkeiten zu beseitigen, die man hinsichtlich der Kirchhoffschen Theorie empfunden hatte.[128]) Weiteren Fortschritten ist das Fehlen strenger Lösungen von Problemen der Plattenbiegung, wie sie Saint-Venant für Balken gefunden hatte, hinderlich gewesen. Die wenigen derartigen Lösungen, die man gewonnen hat[129]), deuten auf eine Bestätigung des Hauptergebnisses der Theorie, das nicht streng bewiesen ist, nämlich des Näherungsausdrucks für den Zusammenhang zwischen den Spannungsmomenten und der Krümmung der Mittelfläche.

Das Problem der krummen Platten oder Schalen nahm von den Grundgleichungen der Elastizität aus zuerst H. Aron[130]) in Angriff. Er drückte die Geometrie der Mittelfläche nach Gaußischer Weise

---

128) S. z. Bsp. J. Boussinesq, *J. de Math. (Liouville),* (Sér. 2), t. 16 (1871) und (Sér. 3), t. 5 (1879); H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.,* vol. 21 (1890); J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.,* vol. 31 (1900); J. Hadamard, *Trans. Amer. Math. Soc.,* vol. 3 (1902).

129) Einige Lösungen gab Saint-Venant in seiner Clebsch-Ausgabe, p. 337 ff. Andere findet man in Kap. XXII dieses Buches.

130) *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 78 (1874).

mittels zweier Parameter aus und übertrug auf das Problem die Methode, die Clebsch bei den Platten benutzt hatte. Er gelangte zu einem Ausdruck für die potentielle Energie der verzerrten Schale, der von derselben Form ist wie jener, den Kirchhoff für die Platten erhalten hatte; nur traten an die Stelle der Größen, die die Krümmung der Mittelfläche definieren, die Unterschiede ihrer Werte im verzerrten und im unverzerrten Zustand. E. Mathieu[131]) übertrug auf das Problem die Methode, die Poisson bei den Platten benutzt hatte. Er bemerkte, daß die bei einer Schale möglichen Schwingungsarten nicht in Klassen zerfallen, die bezüglich durch normale und tangentiale Verschiebungen gekennzeichnet sind, und legte Bewegungsgleichungen zugrunde, die sich aus der Aronschen Formel für die potentielle Energie durch Beibehaltung jener Glieder ableiten ließen, welche nur von der Dehnung der Mittelfläch eabhängen. Lord Rayleigh[132]) schlug eine andere Theorie vor. Aus physikalischen Überlegungen schloß er, daß die Mittelfläche einer schwingenden Schale ungedehnt bleibt, und ermittelte in Übereinstimmung mit dieser Bedingung den Charakter der Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche. Die unmittelbare Anwendung des Kirchhoff-Gehringschen Verfahrens[133]) führte zu einer Formel für die potentielle Energie von derselben Gestalt wie die der Aronschen und zu Bewegungsgleichungen und Randbedingungen, die mit der Lord Rayleighschen Theorie schwerlich zu vereinbaren waren. Spätere Untersuchungen haben gezeigt, daß die Dehnungen, die so als notwendige Begleiterscheinung der Schwingungen erwiesen waren, praktisch auf einen schmalen Bereich am Rande der Schale beschränkt sein werden, während der größte Teil der Schale nach dem Lord Rayleighschen Typus schwingt.

Wann immer sehr dünne Stäbe oder Platten bei Bauwerken verwendet werden, wird es nötig, die Möglichkeit des Knickens in Betracht zu ziehen; so tritt uns das allgemeine Problem der *elastischen Stabilität* entgegen. Wir sahen bereits, daß die ersten Untersuchungen über derartige Probleme von Euler und Lagrange angestellt wurden. Es sind eine Reihe einzelner Probleme gelöst worden. Bei allen diesen sind zwei Gleichgewichtslagen für die gleiche Anordnung äußerer Kräfte möglich, und der gewöhnliche Beweis[134]) für die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen der Elastizität versagt. Eine allgemeine Theorie der elastischen Stabilität entwarf G. H. Bryan[135]). Er gelangte zu dem Resultat, daß der Eindeutigkeitssatz nur in solchen Fällen hinfällig wird, wo große wechselseitige Verschiebungen

131) *J. de l'École polytechnique,* t. 51 (1883).
132) *London Math. Soc. Proc.,* vol. 13 (1882).
133) A. E. H. Love, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 179 (1888).
134) Kirchhoff, *Vorlesungen über math. Phys., Mechanik.*
135) *Cambridge Phil. Soc. Proc.,* vol. 6 (1889), p. 199.

bei sehr kleinen Verzerrungen auftreten können, wie in dünnen Stäben und Platten; ferner in Fällen, wo Verschiebungen, die sich nur wenig von den bei einem starren Körper möglichen Verrückungen unterscheiden, stattfinden können, wie bei einer Kugel, die in einen Kreisring von etwas kleinerem Durchmesser gedrückt wird. In allen Fällen, wo zwei Gleichgewichtslagen möglich sind, ist das Kriterium für die Bestimmung der wirklich angenommenen Lage durch die Bedingung gegeben, daß die Energie ein Minimum sein muß.

Die Geschichte der mathematischen Theorie der Elastizität zeigt deutlich, daß die Entwicklung der Theorie nicht ausschließlich durch Rücksichten auf ihre Brauchbarkeit für die technische Mechanik geleitet wurde. Den meisten Männern, durch deren Forschungen sie begründet und ausgestaltet wurde, lag mehr am wissenschaftlichen als am materiellen Fortschritt, mehr daran, die Welt zu verstehen, als sie bequemer zu machen. Diese Geistesrichtung hat es möglicherweise bewirkt, daß die Elastizitätstheorie weniger zum materiellen Fortschritt der Menschheit beigetragen hat, als sie es sonst wohl getan haben würde. Sei dem wie ihm wolle, der geistige Gewinn, der aus der Arbeit dieser Männer erwachsen ist, ist sehr hoch anzuschlagen. Die Auseinandersetzungen, die über die Zahl und Bedeutung der elastischen Konstanten stattgefunden haben, haben über die tiefsten Fragen betreffend die Natur der Moleküle und die Art ihrer Wechselwirkung Licht verbreitet. Die Versuche, die optischen Erscheinungen mittels der Hypothese eines Mediums zu erklären, das denselben physikalischen Charakter wie ein elastischer Körper besitzt, führten in erster Linie zur Erfassung eines konkreten Beispiels für ein Medium, das transversale Schwingungen fortzupflanzen vermag, und auf einer späteren Stufe zu dem endgültigen Schluß, daß das als Lichtträger dienende Medium nicht den in der Hypothese angenommenen physikalischen Charakter besitzt. So haben sie in letzter Linie unsere Vorstellungen von der Natur des Äthers und der Natur der Lichtschwingungen wesentlich erweitert. Die Methoden, die man für die Lösung der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen festen Körpers ersonnen hat, bilden einen wichtigen Teil einer analytischen Theorie, die in der reinen Mathematik eine hohe Bedeutung besitzt. Die Anwendung dieser Methoden auf das Problem der inneren Konstitution der Erde hat zu Ergebnissen geführt, die sowohl in der Geologie als in der kosmischen Physik auf die Richtung des spekulativen Denkens nachhaltig einwirken müssen. Selbst bei den mehr technischen Problemen, wie bei der Ausbreitung der Kraft und dem Widerstand von Stäben und Platten, hat größtenteils eher die theoretische als die praktische Seite dieser Fragen die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Darin Einsicht zu erlangen, was beim Stoß vorgeht, die Theorie des Verhaltens dünner Stäbe mit den Grundgleichungen

in Einklang zu bringen — diese und ähnliche Ziele waren für die meisten der Männer, denen wir die Elastizitätstheorie verdanken, verlockender als das Streben, Mittel ausfindig zu machen, um bei Maschinenkonstruktionen Ersparnisse zu bewirken oder die Sicherheitsbedingungen bei Bauwerken festzustellen. Die Tatsache, daß große materielle Fortschritte der indirekte Erfolg von in diesem Geiste geleisteter Arbeit sind, ist nicht ohne Bedeutung. Die ebenso bedeutsame Tatsache, daß die meisten großen Fortschritte in der Naturwissenschaft von Männern herrühren, die aus erster Hand mit den Bedürfnissen der Praxis und experimentellen Methoden bekannt waren, ist oft genug betont worden; und obwohl Namen wie Green, Poisson, Cauchy zeigen, daß diese Regel nicht ohne wichtige Ausnahmen besteht, finden wir sie doch durch zahlreiche Beispiele in der Geschichte unserer Wissenschaft bestätigt.

# Kapitel I.

## Analyse der Verzerrung.

### § 1. Dehnung.

Wenn infolge irgend welcher Ursachen in der gegenseitigen Lage der Teile eines Körpers Änderungen eintreten, so nennt man den Körper „verzerrt“ (engl. „strained“). Ein sehr einfaches Beispiel eines verzerrten Körpers ist ein gedehnter Stab. Ein Stab von quadratischem Querschnitt sei vertikal aufgehängt und am unteren Ende mit einem Gewichte belastet. Man ziehe auf dem Stabe in seiner Längsrichtung eine Linie, bezeichne auf ihr zwei Punkte und messe den Abstand dieser Punkte. Wenn das Gewicht angehängt ist, ist der fragliche Abstand ein wenig größer als bevor es angehängt war. Sei $l_0$ die Länge vor der Reckung, $l$ die Länge nach derselben. Dann ist $(l - l_0) / l_0$ eine Zahl (im allgemeinen eine sehr kleine Bruchzahl), welche die *Dehnung* (engl. *extension*) der fraglichen Linie genannt wird. Ist diese Zahl die gleiche für alle zur Balkenlänge parallelen Linien, so kann man sie als „die Dehnung des Stabes“ bezeichnen. Ein Stahlstab von 1 Quadratzoll ($= 6 \cdot 4515$ cm$^2$) Querschnittsinhalt, der mit 1 Tonne ($= 1016 \cdot 05$ kg) belastet wird, wird eine Dehnung von ungefähr $7 \times 10^{-5}$ erfahren. Es ist klar, daß zur Messung solch kleiner Größen ziemlich genaue Apparate und verfeinerte Beobachtungsmethoden erforderlich sind.[1]) Ohne auf Messungsverfahren einzugehen, wollen wir etwas näher den Verzerrungszustand in dem gereckten Stabe betrachten. Es bezeichne $e$ die Dehnung des Stabes, sodaß seine Länge im Verhältnis $1 + e : 1$ gewachsen ist; wir betrachten das Volumen eines Stabteils, der von zwei bestimmten Querschnitten begrenzt wird. Dies Volumen wird durch Recken des Stabes vergrößert, nicht aber im Verhältnis $1 + e : 1$. Wird der Stab in der Längsrichtung gereckt, so zieht er sich seitlich zusammen. Wenn $e'$ die lineare Querverkürzung ist, so verkleinert sich der Querschnittsinhalt im Verhältnis $(1 - e')^2 : 1$, und das fragliche Volumen wächst im Verhältnis $(1 + e)(1 - e')^2 : 1$. Im Falle eines durch Zug gespannten Stabes ist $e'$ ein gewisses Vielfaches von $e$, etwa $\sigma e$, und $\sigma$ beträgt für sehr viele Stoffe ungefähr $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$. Ist $e$ sehr klein und wird $e^2$ vernachlässigt, so ist die Flächenkontraktion gleich $2\sigma e$ und die kubische Dilatation gleich $(1 - 2\sigma) e$.

1) S. z. B. Ewing, *Strength of Materials* (Cambridge 1899), p. 73 ff.

Um den Verzerrungszustand rechnerisch zu beschreiben, würden wir ein Koordinatensystem $x, y, z$ mit dem Ursprung auf der Achse nehmen und die $z$-Koordinate längs der Stablänge messen. Irgend ein Teilchen des Stabes, das vor Anhängung des Gewichtes die Koordinaten $x, y, z$ hat, wird hernach eine neue Lage einnehmen. Das Teilchen, das sich zu Anfang im Ursprung befand, möge den Weg $z_0$ zurücklegen, dann bewegt sich das Teilchen, das an der Stelle $(x, y, z)$ war, nach einem Punkte, dessen Koordinaten sind

$$x(1 - \sigma e), \quad y(1 - \sigma e), \quad z_0 + (z - z_0)(1 + e).$$

Der Verzerrungszustand ist also nicht gerade einfach. Könnte man am Stabe seitliche Kräfte anbringen, um die Querverkürzung zu verhindern, so würde sich der Verzerrungszustand sehr vereinfachen. Man wird ihn dann als „einfache Dehnung" kennzeichnen.

## § 2. Reiner Schub.

Als zweites Beispiel einer Verzerrung wollen wir annehmen, daß am Stabe seitliche Kräfte angebracht werden, die eine Dehnung der zur $x$-Achse parallelen Linien vom Betrage $\varepsilon_1$ und eine Dehnung der zur $y$-Achse parallelen Linien vom Betrage $\varepsilon_2$ hervorrufen, ferner daß nötigenfalls Längskräfte angebracht werden, um Dehnung oder Verkürzung parallel zur $z$-Achse zu verhindern. Das Teilchen, das an der Stelle $(x, y, z)$ war, wird sich nach $(x + \varepsilon_1 x,\ y + \varepsilon_2 y,\ z)$ bewegen und der Inhalt des Querschnitts im Verhältnis $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) : 1$ wachsen. Sind $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ so miteinander verknüpft, daß dies Verhältnis gleich eins ist, so wird im Flächeninhalt des Querschnitts oder im Volumen irgend eines Stabteils keine Änderung eintreten, die Gestalt des Querschnitts aber wird sich verzerren. Es ist dann entweder $\varepsilon_1$ oder $\varepsilon_2$ negativ, d. h. man hat *Verkürzung* der entsprechenden Linienschar. Die in dem Stabe hervorgerufene Verzerrung heißt „reiner Schub" („reine Schiebung"). Fig. 1 unten zeigt ein Quadrat $ABCD$, das durch reinen Schub zu einem Rhombus $A'B'C'D'$ von gleichem Flächeninhalt verzerrt wird.

## § 3. Einfacher Schub.

Als drittes Beispiel einer Verzerrung wollen wir annehmen, daß der Stab, nachdem er durch reinen Schub entstellt wurde, als Ganzes um seine Achse gedreht wird. Es sei die $x$-Achse die Richtung, in der die Verkürzung stattfindet; wir setzen

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Wir können dann zeigen, daß, wenn die Drehung den Betrag $\alpha$ im Sinne von $y$ nach $x$ hat, die von jedem Teilchen eingenommene Lage dieselbe ist, in die es gelangt wäre, falls alle Teilchen in der Richtung einer bestimmten Linie Wege zurückgelegt hätten, die den Abständen

der Teilchen von einer gewissen diese Linie enthaltenden Ebene proportional sind.

Da $(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)=1$ und $\varepsilon_2-\varepsilon_1=2\operatorname{tg}\alpha$, so haben wir

$$1+\varepsilon_1=\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha,\quad 1+\varepsilon_2=\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha.$$

Durch den reinen Schub wird das Teilchen, das sich in $(x, y)$ befand, nach $(x_1, y_1)$ bewegt, wo

$$x_1=x(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha),\quad y_1=y(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha);$$

durch die Drehung wiederum wird es nach $(x_2, y_2)$ versetzt, wo

$$x_2=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha,\quad y_2=-x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha;$$

sodaß wir haben

$$x_2=x+\operatorname{tg}\alpha\,\{-x\cos\alpha+y(1+\sin\alpha)\},$$
$$y_2=y+\operatorname{tg}\alpha\,\{-x(1-\sin\alpha)+y\cos\alpha\}.$$

Schreiben wir nun $\beta$ für $\frac{1}{2}\pi-\alpha$, so haben wir

$$x_2=x+2\operatorname{tg}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\,(-x\sin\tfrac{1}{2}\beta+y\cos\tfrac{1}{2}\beta),$$
$$y_2=y+2\operatorname{tg}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\,(-x\sin\tfrac{1}{2}\beta+y\cos\tfrac{1}{2}\beta);$$

wir bemerken, daß

$$-x_2\sin\tfrac{1}{2}\beta+y_2\cos\tfrac{1}{2}\beta=-x\sin\tfrac{1}{2}\beta+y\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

und daß

$$x_2\cos\tfrac{1}{2}\beta+y_2\sin\tfrac{1}{2}\beta=x\cos\tfrac{1}{2}\beta+y\sin\tfrac{1}{2}\beta+2\operatorname{tg}\alpha\,(-x\sin\tfrac{1}{2}\beta+y\cos\tfrac{1}{2}\beta).$$

Nehmen wir daher ein $(X, Y)$-Achsensystem, das aus dem $(x, y)$-System durch Drehung um $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\alpha$ im Sinne von $x$ nach $y$ erhalten wird, so sehen wir, daß das Teilchen, welches sich in $(X, Y)$ befand, durch den reinen Schub mit nachfolgender Drehung nach dem Punkte $(X_2, Y_2)$ hinbewegt wird, wo

$$X_2=X+2\operatorname{tg}\alpha\cdot Y,\quad Y_2=Y.$$

Somit gleitet jede Ebene des Körpers, die zur $(X, z)$-Ebene parallel ist, in sich in der Richtung der $X$-Achse um ein Stück, das der Entfernung der Ebene von der $(X, z)$-Ebene proportional ist. Die eben beschriebene Art der Verzerrung heißt „einfacher Schub“, der Winkel $\alpha$ ist der „Schubwinkel“ und $2\operatorname{tg}\alpha$ der „Betrag des Schubs“.

Fig. 1 zeigt ein Quadrat $ABCD$, das durch reinen Schub zu einem Rhombus $A'B'C'D'$ von gleichem Inhalt verzerrt wird; das letztere wird dann in die Lage

Fig. 1.

$A''B''C''D''$ gedreht. $A'OA''$ ist der Schubwinkel und der Winkel $AOX$ das halbe Komplement desselben. Die Linien $AA''$, $BB''$, $CC''$, $DD''$ sind parallel zur Achse $OX$ und proportional den Abständen von derselben.

Wir werden finden, daß alle Verzerrungsarten sich in einfache Dehnungen und einfache Schiebungen zergliedern lassen; um aber verwickelte Verzerrungszustände darzulegen und mittels einfacherer Verzerrungen auszudrücken, brauchen wir eine allgemeine kinematische Theorie.[1])

## § 4. Verschiebung.

Wir haben in allen Fällen bei einem Körper zwei Zustände zu unterscheiden — einen ersten und einen zweiten Zustand. Aus ihrer Lage im ersten Zustand gehen die Teilchen des Körpers in ihre Lage im zweiten Zustand über durch eine *Verschiebung* (engl. *displacement*). Die Verschiebung kann so sein, daß die Linie, die zwei Teilchen des Körpers verbindet, im zweiten Zustand dieselbe Länge hat wie im ersten; dann ist die Verschiebung eine solche, wie sie in einem starren Körper möglich ist. Wenn dagegen die Verschiebung die Länge irgend einer Linie verändert, so kennzeichnet man den zweiten Zustand des Körpers als „verzerrten Zustand" und spricht dann von dem ersten Zustand als dem „unverzerrten Zustand".

Im Folgenden werden wir die Koordinaten des Punktes, den ein Teilchen im unverzerrten Zustand des Körpers einnimmt, mit $x, y, z$ bezeichnen und die Koordinaten des Punktes, den dasselbe Teilchen im verzerrten Zustand einnimmt, mit $x+u$, $y+v$, $z+w$. Dann sind $u$, $v$, $w$ die Projektionen einer Vektorgröße — der Verschiebung — auf die Achsen. Wir nehmen $u$, $v$, $w$ als stetige Funktionen von $x, y, z$ an und werden im allgemeinen voraussetzen, daß es analytische Funktionen sind.

Es ist klar, daß der Verzerrungszustand völlig bestimmt ist, wenn die Verschiebung $(u, v, w)$ gegeben ist; insbesondere läßt sich die Länge der Linie bestimmen, die irgend zwei Teilchen verbindet.

## § 5. Verschiebung bei einfacher Dehnung und einfachem Schub.

Bei einer zur $x$-Achse parallelen einfachen Dehnung ist die Verschiebung gegeben durch die Gleichungen

$$u = ex, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

wo $e$ der Betrag der Dehnung. Ist $e$ negativ, so besteht *Verkürzung.*

1) Man verdankt die Theorie zum größten Teil Cauchy (S. Einleitung). Einige Verbesserungen lieferte Clebsch in seinem Lehrbuch von 1862, andere lieferten Kelvin und Tait, *Nat. Phil.* Teil I.



Bei einfachem Schub vom Betrag $s$, bei dem die zur $x$-Achse parallelen Linien in sich gleiten und Teilchen in einer zur $(x, y)$-Ebene parallelen Ebene in dieser verbleiben, ist die Verschiebung gegeben durch die Gleichungen

$$u = sy, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

In Fig. 2 ist $AB$ ein Abschnitt einer zur $x$-Achse parallelen Linie, der von $O$ aus unter dem Wirbel $2\alpha$ erscheint und von $Oy$ halbiert wird. Durch den einfachen Schub werden die auf der Linie $OA$ liegenden Teilchen so verschoben, daß sie auf $OB$ zu liegen kommen. Das Teilchen in irgend einem Punkt $P$ auf $AB$ wird nach $Q$ auf $AB$ so verschoben, daß $PQ = AB$, und die Teilchen auf $OP$ werden nach Punkten auf $OQ$ verschoben. Ein Parallelogramm wie $OPNM$ geht in ein Parallelogramm wie $OQKM$ über.

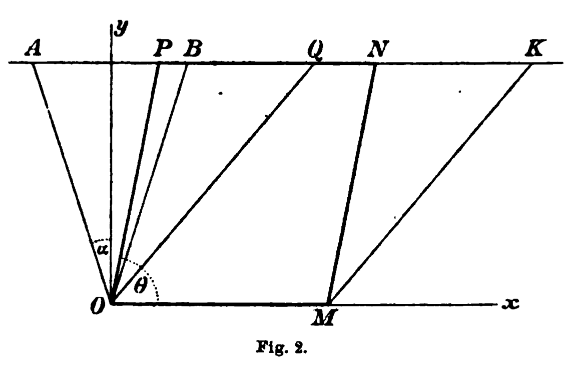


Fig. 2.

Ist der Winkel $xOP = \theta$, so läßt sich beweisen, daß

$$\operatorname{tg} POQ = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \theta}{\sec^2 \theta + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}, \quad \operatorname{tg} xOQ = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta}.$$

Ist insbesondere $\theta = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\cot xOQ = s$, d. h. wenn $s$ klein ist, ist $s$ das Komplement des Winkels zwischen zwei materiellen Linien im verzerrten Zustande, die im unverzerrten Zustande zueinander rechtwinklig liefen.

## § 6. Homogene Verzerrung.

In den Fällen der einfachen Dehnung und des einfachen Schubs drücken sich die Verschiebungskomponenten als lineare Funktionen der Koordinaten aus. Allgemein wird, wenn ein Körper so verzerrt wird, daß die Verschiebungskomponenten sich auf diese Weise ausdrücken lassen, die Verzerrung *homogen* genannt.

Die einer homogenen Verzerrung entsprechende Verschiebung sei gegeben durch die Gleichungen

$$u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Da $x, y, z$ in $x + u, y + v, z + w$ übergehen, also durch eine lineare Substitution umgeformt werden, so wird jede Ebene in eine Ebene und jedes Ellipsoid im allgemeinen in ein Ellipsoid übergeführt. Wir schließen unmittelbar auf folgende Eigenschaften der homogenen Verzerrung: 1) Gerade Linien bleiben gerade. 2) Parallele Geraden bleiben parallel. 3) Alle Geraden von derselben Richtung werden im gleichen

Verhältnis gedehnt oder verkürzt. 4) Eine Kugel geht in ein Ellipsoid über, und irgend drei zu einander senkrechte Durchmesser der Kugel werden in drei konjugierte Durchmesser des Ellipsoids übergeführt. 5) Ein Ellipsoid von bestimmter Gestalt und Stellung geht in eine Kugel über, und jedes Tripel konjugierter Durchmesser des Ellipsoids wird in ein Tripel zueinander senkrechter Durchmesser der Kugel übergeführt. 6) Es gibt drei im unverzerrten Zustand zueinander senkrechte Linien, die nach der Verzerrung orthogonal bleiben; die Richtungen dieser Linien werden im allgemeinen durch die Verzerrung geändert. Im unverzerrten Zustand sind es die Hauptachsen des unter 5) erwähnten Ellipsoids; im verzerrten Zustand sind es die Hauptachsen des unter 4) erwähnten Ellipsoids.

Das Ellipsoid, von dem in 4) die Rede ist, heißt das *Verzerrungsellipsoid* (engl. *strain ellipsoid*); es hat die Eigenschaft, daß das Verhältnis der Länge einer Linie von gegebener Richtung im verzerrten Zustand zur Länge der entsprechenden Linie im unverzerrten Zustand proportional ist dem Radiusvektor der Oberfläche, den man vom Mittelpunkt aus in der gegebenen Richtung zieht. Das Ellipsoid, von dem in 5) die Rede ist, kann man das *reziproke Verzerrungellipsoid* nennen; es hat die Eigenschaft, daß die Länge einer Linie, die im unverzerrten Zustand eine gegebene Richtung hat, durch die Verzerrung in einem Verhältnis wächst, das dem vom Mittelpunkt aus in der gegebenen Richtung gezogenen Radiusvektor der Oberfläche umgekehrt proportional ist.

Die Hauptachsen des reziproken Verzerrungsellipsoids werden die *Hauptachsen der Verzerrung* (engl. *principal axes of the strain*) genannt. Die Dehnungen der in den entsprechenden Richtungen gezogenen Linien sind stationär bei kleinen Richtungsvariationen. Eine von ihnen ist die größte Dehnung, eine andere die kleinste.

## § 7. Relativverschiebung.

Wir gehen jetzt über zu dem allgemeinen Fall, wo die Verzerrung nicht notwendig homogen ist, und nehmen an, $(x + \boldsymbol{x},\ y + \boldsymbol{y},\ z + \boldsymbol{z})$ sei ein Punkt in der Nähe von $(x, y, z)$, $(u + \boldsymbol{u},\ v + \boldsymbol{v},\ w + \boldsymbol{w})$ die entsprechende Verschiebung. Für die Größen $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ setzen wir Reihenentwicklungen nach Potenzen von $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ an, schreiben also

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{z}\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots, \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \boldsymbol{y}\frac{\partial v}{\partial y} + \boldsymbol{z}\frac{\partial v}{\partial z} + \cdots, \\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \boldsymbol{y}\frac{\partial w}{\partial y} + \boldsymbol{z}\frac{\partial w}{\partial z} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder Potenzen von $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ von höherer als der ersten Ordnung enthalten. Wenn $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ hinreichend klein sind, so kann man jene Glieder vernachlässigen. Die Größen $u, v, w$ sind die Verschiebungen eines Teilchen, das im unverzerrten Zustande sich in $(x + \boldsymbol{x}, y + \boldsymbol{y}, z + \boldsymbol{z})$ befindet, relativ zu dem Teilchen, das im gleichen Zustand sich in $(x, y, z)$ befindet. Demgemäß können wir sagen, daß in hinreichender Nähe irgend eines Punktes die Relativverschiebungen lineare Funktionen der Relativkoordinaten sind. Mit andern Worten, *die Verzerrung in der Umgebung eines Punktes ist merklich homogen.* Alles, was wir über das Verhalten gerader Linien bei homogener Verzerrung sagten, bleibt also richtig für Linienelemente, die von einem Punkte ausgehen. Insbesondere werden drei im unverzerrten Zustand zueinander senkrechte Linienelemente existieren, die nach der Verzerrung orthogonal bleiben; die Richtungen dieser Linien aber werden im allgemeinen durch die Verzerrung geändert. In jedem Punkte sind die Richtungen jener Linienelemente im unverzerrten Zustand die „Hauptachsen der Verzerrung" in dem Punkte.

## § 8. Analyse der Relativverschiebung.[1])

Bei der Diskussion der Formel (1) werden wir uns beschränken auf Verschiebungen in der Umgebung eines Punktes und daher Glieder von höherer als der ersten Ordnung in $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ vernachlässigen. Wir führen passend die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z},\\
e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},\\
2\varpi_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, & 2\varpi_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, & 2\varpi_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Formeln (1) lassen sich dann so schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
u &= e_{xx}\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}e_{xy}\boldsymbol{y} + \tfrac{1}{2}e_{xz}\boldsymbol{z} - \varpi_z\boldsymbol{y} + \varpi_y\boldsymbol{z},\\
v &= \tfrac{1}{2}e_{xy}\boldsymbol{x} + e_{yy}\boldsymbol{y} + \tfrac{1}{2}e_{yz}\boldsymbol{z} - \varpi_x\boldsymbol{z} + \varpi_z\boldsymbol{x},\\
w &= \tfrac{1}{2}e_{xz}\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}e_{yz}\boldsymbol{y} + e_{zz}\boldsymbol{z} - \varpi_y\boldsymbol{x} + \varpi_x\boldsymbol{y}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Relativverschiebung stellt sich so dar als Resultante zweier Verschiebungen, deren Komponenten bezüglich von der Form $e_{xx}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}e_{xy}\boldsymbol{y} + \frac{1}{2}e_{xz}\boldsymbol{z}$ und $-\varpi_z\boldsymbol{y} + \varpi_y\boldsymbol{z}$ sind. Es besteht nun ein

1) Stokes, *Cambridge Phil. Soc. Trans.* vol. 8 (1845); *Math. and Phys. Papers*, vol. 1, p. 75.

fundamentaler kinematischer Unterschied zwischen den Fällen, wo die letztere Verschiebung verschwindet, und den Fällen, wo sie nicht verschwindet. Wenn sie verschwindet, d. h. wenn $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ verschwinden, sind die Verschiebungskomponenten die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Funktion $\Phi$ nach den Koordinaten, sodaß

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und das Linienintegral der Tangentialkomponente der Verschiebung, genommen längs irgend einer geschlossenen Kurve, verschwindet, vorausgesetzt, daß die Kurve sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt, ohne aus dem von dem Körper eingenommenen Raum herauszutreten. Solch eine Funktion $\Phi$ würde man ein „Verschiebungspotential" nennen. Durch jeden Punkt $(x, y, z)$ geht eine Fläche 2. Grades aus der Schar

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{yz}yz + e_{zx}zx + e_{xy}xy = \text{const.}, \tag{4}$$

und die Verschiebung, die man, wie oben, aus einem Verschiebungspotential ableitet, ist in jedem Punkte längs der Normalen jener Fläche der Familie (4) gerichtet, die durch diesen Punkt hindurchgeht. Die Linienelemente, die im unverzerrten Zustand in die Hauptachsen dieser Flächen 2. Grades fallen, tun es auch nachher im verzerrten Zustand, oder die drei zueinander senkrechten Linienelemente, die orthogonal bleiben, behalten ihre anfänglichen Richtungen bei. Die Verzerrung, die mit derartigen Verschiebungen verknüpft ist, wird als „reine Verzerrung" (engl. „pure strain") bezeichnet. Wir erkennen, daß die Relativverschiebung sich stets zusammensetzt aus einer Verschiebung, die mit einer reinen Verzerrung verknüpft ist, und einer Verschiebung, die durch Ausdrücke wie $-\varpi_z y + \varpi_y z$ dargestellt wird. Das Linienintegral der letzteren, genommen längs einer geschlossenen Kurve, verschwindet nicht (vgl. § 15, unten). Sind die Größen $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ klein, so stellen die Glieder von der Form $-\omega_z y + \omega_y z$ eine Verschiebung dar, wie sie in einem starren Körper möglich sein würde, nämlich eine kleine Drehung vom Betrage $\sqrt{\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2}$ um eine Achse von der Richtung $(\varpi_x : \varpi_y : \varpi_z)$. Aus diesem Grunde bezeichnet man oft die einer reinen Verzerrung entsprechende Verschiebung als „rotationsfrei".

## § 9. Verzerrung bei kleiner Verschiebung.[1])

Es ist klar, daß die Größen- und Gestaltänderungen aller Teile eines Körpers bestimmt sein werden, wenn die Länge jeder Linie im

1) In den Anwendungen der Theorie auf Verzerrungen in elastischen Körpern sind die zu betrachtenden Verschiebungen im allgemeinen so klein, daß Quadrate und Produkte der ersten Differentialquotienten von $u, v, w$ nach $x, y, z$ gegenüber

verzerrten Zustand bekannt ist. Seien $l, m, n$ die Richtungskosinus einer Linie, die vom Punkte $x, y, z$ ausgeht. Wir grenzen auf dieser Linie ein sehr kurzes Stück $r$ ab, so daß $x + lr$, $y + mr$, $z + nr$ die Koordinaten eines Nachbarpunktes auf der Linie sind. Nach der Verzerrung kommt das Teilchen, das sich in $(x, y, z)$ befand, nach $(x + u, y + v, z + w)$, und das im Nachbarpunkte befindliche Teilchen rückt nach dem Punkt, dessen Koordinaten sind

$$\left.\begin{aligned} &x + lr \;\; + u + r\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\ &y + mr + v \;\; + r\left(l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ &z + nr \;\; + w + r\left(l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

vorausgesetzt, daß $r$ so klein ist, daß wir sein Quadrat vernachlässigen können. Sei nach der Verzerrung $r_1$ die Länge des Stückes, das der Strecke $r$ vor der Verzerrung entspricht. Dann haben wir

$$\begin{aligned} r_1^2 = r^2\Big[&\left\{l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^2 + \left\{l\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + n\frac{\partial v}{\partial z}\right\}^2\\ &+ \left\{l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}^2\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn die Relativverschiebungen sehr klein sind und die Quadrate und Produkte von Größen wie $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ vernachlässigt werden können, so geht diese Formel über in

$$r_1 = r\,[1 + e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{yz}mn + e_{zx}nl + e_{xy}lm], \tag{7}$$

wo die Bezeichnung dieselbe ist wie in den Gleichungen (2).

## § 10. Die Komponenten der Verzerrung[1]).

Nach Formel (7) kennen wir die Länge $r_1$ einer Linie, die im unverzerrten Zustand eine vorgegebene kleine Länge $r$ und eine vorgegebene Richtung $(l, m, n)$ besitzt, sobald wir die Werte der sechs Größen $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$ kennen. Diese sechs Größen heißen die „Verzerrungskomponenten“. Im Falle der homogenen Verzerrung sind es Konstanten; im allgemeinen Falle sind sie von Punkt zu Punkt eines Körpers veränderlich.

---

den ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Die allgemeinere Theorie, in der diese Vereinfachung nicht gemacht wird, wird im Anhang zu diesem Kapitel erörtert werden.

1) Ist die Relativverschiebung nicht klein, so ist die Verzerrung nicht vollständig durch die Größen $e_{xx}, \cdots e_{yz}, \cdots$ gekennzeichnet. Dieser Punkt wird im Anhang zu diesem Kapitel behandelt. Lord Kelvin hat auf den unsymme-

Die Dehnung $e$ der kurzen Linie in der Richtung $(l, m, n)$ ist unmittelbar durch (7) gegeben in der Form

$$e = e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + e_{yz} mn + e_{zx} nl + e_{xy} lm, \tag{8}$$

sodaß die drei Größen $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{zz}$ die Dehnungen der Linienelemente sind, die im unverzerrten Zustand zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Sei hinwieder $(l_1, m_1, n_1)$ die Richtung eines Linienelements im verzerrten Zustand, das im unverzerrten Zustand die Richtung $(l, m, n)$ hat, und sei $e$ die entsprechende Dehnung; die gleichen, gestrichenen Buchstaben mögen sich auf ein zweites Linienelement und seine Dehnung beziehen. Aus den Formeln (5) leuchtet ein, daß

$$l_1 = \frac{r}{r_1}\left\{l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right\},$$

entsprechend $m_1$ uud $n_1$. Den Kosinus des Winkels zwischen den beiden Elementen im verzerrten Zustand findet man leicht zu

$$\begin{aligned} l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1' &= (ll' + mm' + nn')(1 - e - e') \\ &+ 2(e_{xx} ll' + e_{yy} mm' + e_{zz} nn') + e_{yz}(mn' + m'n) \\ &+ e_{zx}(nl' + n'l) + e_{xy}(lm' + l'm) \end{aligned} \tag{9}$$

Wenn die beiden Linien im unverzerrten Zustande mit der $x$- und der $y$-Achse zusammenfallen, so ist der Kosinus des Winkels zwischen den entsprechenden Linien im verzerrten Zustand gleich $e_{xy}$. Ebenso sind $e_{yz}$ und $e_{zx}$ die Kosinus der Winkel von zwei Linienpaaren im verzerrten Zustand, die im unverzerrten Zustand zwei Koordinatenachsenpaaren parallel sind.

Eine andere Deutung der Verzerrungskomponenten vom Typus des $e_{xy}$ bieten unmittelbar die Gleichungen von der Form

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

aus denen hervorgeht, daß $e_{xy}$ sich aus zwei einfachen Schiebungen zusammensetzt. Bei der einen dieser einfachen Schiebungen gleiten diejenigen Ebenen des Körpers, die zur $x$-Achse senkrecht stehen, in Richtung der $y$-Achse, während bei der anderen die Rollen dieser Achsen vertauscht sind. Die mit $e_{xy}$ bezeichnete Verzerrung nennen

---

trischen Charakter der hier dargelegten Verzerrungskomponenten aufmerksam gemacht. In der Tat bedeuten drei von ihnen Dehnungen und die übrigen drei Schubverzerrungen. Er hat nun ein symmetrisches System von Verzerrungskomponenten aufgestellt, und zwar handelt es sich um die Dehnungen von Linien, die zu den Kanten eines Tetraeders parallel sind. S. *Edinburgh, Proc. Roy. Soc.*, vol. **24** (1902), und *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 3 (1902), p. 95 und 444.

wir „die der $x$- und der $y$-Richtung entsprechende Schubverzerrung (engl. shearing strain)".

Die Volumänderung eines kleinen Teils des Körpers läßt sich ausdrücken durch die Verzerrungskomponenten. Das Verhältnis entsprechender sehr kleiner Volumina im verzerrten und unverzerrten Zustand wird durch die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & 1+\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt, und diese wird, wenn Quadrate und Produkte von $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ vernachlässigt werden, gleich $1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ oder gleich $1+\Delta$ etwa. Die Größe $\Delta$, die durch die Gleichung

$$\Delta = e_{xx}+e_{yy}+e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$$

definiert ist, ist die Volumzunahme pro Volumeinheit oder die „kubische Dilatation", oft einfach „Dilatation" genannt.

Mit der Einführung der Verzerrungskomponenten, der Deutung dieser Komponenten und der Aufstellung des Ausdrucks für die kubische Dilatation haben wir eine allgemeine kinematische Theorie der Verzerrungen, welche bei kleinen Verschiebungen auftreten, vollendet. Der Rest dieses Kapitels wird Sätzen und Methoden gewidmet sein, die sich auf kleine Verzerrungen beziehen und bei der Entwicklung der Elastizitätstheorie von Nutzen sein werden.

## § 11. Die Verzerrungsfläche.

Durch jeden Punkt in der Umgebung von $(x, y, z)$ geht eine und nur eine Fläche 2. Grades aus der Schar

$$e_{xx}x^2+e_{yy}y^2+e_{zz}z^2+e_{yz}yz+e_{zx}zx+e_{xy}xy = \text{const.} \quad (4')$$

Jede dieser Flächen 2. Grades heißt *Verzerrungsfläche* (engl. *strain quadric*); solch eine Fläche hat die Eigenschaft, daß das reziproke Quadrat ihres vom Mittelpunkt aus in irgend einer Richtung gezogenen Radiusvektors proportional ist der Dehnung einer Linie in jener Richtung.

Ist die Verzerrungsfläche ein Ellipsoid, so werden die vom Punkte $(x, y, z)$ auslaufenden Geraden sämtlich gedehnt bezw. sämtlich verkürzt; ist die Fläche ein Hyperboloid, so werden einige Linien gedehnt und andere verkürzt, und diese beiden Linienscharen werden durch den gemeinsamen Asymptotenkegel der Flächen voneinander

getrennt. Linien, die weder Dehnung noch Verkürzung erfahren, sind Erzeugende dieses Kegels.

Die Richtungen derjenigen Linien im unverzerrten Zustand, für die die Dehnung ein Maximum oder Minimum ist oder, ohne ein wahres Maximum oder Minimum zu sein, stationär ist, bilden die Hauptachsen der Flächen (4′). Diese Achsen sind deshalb die Hauptachsen der Verzerrung (§ 7), und die Dehnungen in den Richtungen dieser Achsen sind die „Hauptdehnungen". Bezieht man die Verzerrungsflächen auf ihre Hauptachsen, so nimmt die linke Seite von (4) die Form an

$$e_1 X^2 + e_2 Y^2 + e_3 Z^2,$$

wo die Koeffizienten $e_1$, $e_2$, $e_3$ gleich den Werten der Hauptdehnungen sind.

Wir sehen jetzt, daß wir, um einen Verzerrungszustand vollständig zu kennzeichnen, die Richtung der Hauptachsen der Verzerrung und die Größe der Hauptdehnungen in jedem Punkte des Körpers kennen müssen. Dann können wir dem Punkte eine gewisse Fläche 2. Grades anheften, die es uns ermöglicht, die Verzerrung in dem Punkte auszudrücken.

Die Richtungen der Verzerrungs-Hauptachsen bestimmt man wie folgt: Es seien $l, m, n$ die Richtungskosinus einer dieser Achsen, dann haben wir

$$\frac{e_{xx} l + \frac{1}{2} e_{xy} m + \frac{1}{2} e_{xz} n}{l} = \frac{\frac{1}{2} e_{xy} l + e_{yy} m + \frac{1}{2} e_{yz} n}{m} = \frac{\frac{1}{2} e_{xz} l + \frac{1}{2} e_{yz} m + e_{zz} n}{n},$$

und wenn man $e$ für jede dieser drei Größen schreibt, so sind die drei möglichen Werte von $e$ gleich den Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{xy} & e_{yy} - e & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{xz} & \frac{1}{2} e_{yz} & e_{zz} - e \end{vmatrix} = 0;$$

diese Wurzeln sind reell und sind gleich den Werten der Hauptdehnungen $e_1$, $e_2$, $e_3$.

## § 12. Transformation der Verzerrungskomponenten.

Einen und denselben Verzerrungszustand kann man mittels seiner auf ein beliebiges rechtwinkeliges Achsensystem bezogenen Komponenten kennzeichnen; die auf irgend ein System bezogenen Komponenten müssen daher bestimmt sein, wenn die auf irgend ein anderes System bezogenen Komponenten und die gegenseitige Lage bekannt sind. Die Bestimmung läßt sich sofort ausführen durch Benutzung einer Eigenschaft der Verzerrungsfläche, daß nämlich das reziproke Quadrat des Radiusvektors in irgend einer Richtung proportional ist der Dehnung einer Linie in jener Richtung. Wir werden die Koordinaten eines Punktes, bezogen auf das erste Achsensystem, wie früher mit $x, y, z$ bezeichnen und diejenigen desselben Punktes, bezogen auf das

zweite Achsensystem, mit $x', y', z'$ und wollen annehmen, daß das zweite System mit dem ersten verknüpft sei durch das Orthogonalschema

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y'$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z'$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

Weiter wollen wir annehmen, daß die Determinante der Transformation gleich 1 (nicht — 1) ist, sodaß sich das zweite System aus dem ersten durch eine Drehung ableiten läßt.[1]) Für die auf das zweite System bezogenen Verzerrungskomponenten wollen wir $e_{x'x'}, e_{y'y'}, e_{z'z'}, e_{y'z'}, e_{z'x'}, e_{x'y'}$ schreiben.

Die Relativkoordinaten von Punkten in der Umgebung eines gegebenen Punktes mögen im ersten System mit $x, y, z$ und im zweiten System mit $x', y', z'$ bezeichnet werden. Diese Größen transformieren sich durch dieselben Substitutionen wie $x, y, z$ und $x', y', z'$.

Transformiert man die Form

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{yz}yz + e_{zx}zx + e_{xy}xy$$

durch obige Substitution, so geht sie über in

$$e_{x'x'}x'^2 + e_{y'y'}y'^2 + e_{z'z'}z'^2 + e_{y'z'}y'z' + e_{z'x'}z'x' + e_{x'y'}x'y'.$$

Daraus folgt, daß

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx}l_1^2 + e_{yy}m_1^2 + e_{zz}n_1^2 + e_{yz}m_1n_1 + e_{zx}n_1l_1 + e_{xy}l_1m_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{y'z'} &= 2\,e_{xx}l_2l_3 + 2\,e_{yy}m_2m_3 + 2\,e_{zz}n_2n_3 + e_{yz}(m_2n_3 + m_3n_2) \\ &\quad + e_{zx}(n_2l_3 + n_3l_2) + e_{xy}(l_2m_3 + l_3m_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Dies sind die Formeln für die Transformation von Verzerrungskomponenten.

## § 13. Weitere Methoden und Resultate.

a) Die Formeln (11) hätten erschlossen werden können aus der Bedeutung von $e_{x'x'}$ als Dehnung eines zur $x$-Achse parallelen Linienelements und der Bedeutung von $e_{y'z'}$ als Kosinus des Winkels, den diejenigen Linienelemente nach der Verzerrung miteinander einschließen, die vor der Verzerrung der $y'$- und der $z'$-Achse parallel laufen.

b) Die Formeln (11) hätte man auch dadurch erhalten können, daß man die auf die $(x', y', z')$-Achsen bezogene Verschiebung $(u', v', w')$ ein-

1) Diese Beschränkung bringt für die Relationen zwischen den auf die beiden Systeme bezogenen Verzerrungskomponenten keinen Unterschied.

führte und $\partial u'/\partial x', \ldots$ bildete. Da die Verschiebung ein Vektor ist, so sind $u$, $v$, $w$ mit $x$, $y$, $z$ kogredient, und wir haben beispielsweise

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}(l_1 u + m_1 v + n_1 w) \\ &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_1 \frac{\partial}{\partial y} + n_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)(l_1 u + m_1 v + n_1 w) \\ &= l_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} + m_1 n_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ &\quad + n_1 l_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + l_1 m_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Diese Methode ließe sich auf die Transformation von $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ anwenden. Wir würden z. B. finden

$$\varpi_{x'} = l_1 \varpi_x + m_1 \varpi_y + n_1 \varpi_z \tag{12}$$

und daraus auf den Vektor-Charakter von $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ schließen können. Derselbe Schluß ließe sich aus der Bedeutung von $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ als Drehungskomponenten ziehen.

c) Nach einem wohlbekannten Theorem[1]) über die Transformation quadratischer Ausdrücke sind die folgenden Größen gegenüber Transformationen von einem rechtwinkligen Achsensysteme auf ein anderes invariant:

$$\left.\begin{aligned} & e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}, \\ & e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy} - \tfrac{1}{4}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2), \\ & e_{xx}e_{yy}e_{zz} + \tfrac{1}{4}(e_{yz}e_{zx}e_{xy} - e_{xx}e_{yz}^2 - e_{yy}e_{zx}^2 - e_{zz}e_{xy}^2). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die erste dieser Invarianten ist der Ausdruck für die kubische Dilatation.

d) Man kann direkt zeigen, daß die folgenden Größen Invarianten sind:

1) $\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2$,

2) $e_{xx}\varpi_x^2 + e_{yy}\varpi_y^2 + e_{zz}\varpi_z^2 + e_{yz}\varpi_y\varpi_z + e_{zx}\varpi_z\varpi_x + e_{xy}\varpi_x\varpi_y$,

und der Lernende mag dies zur Übung direkt verifizieren. Diese Invarianten könnte man aus der Tatsache folgern, daß $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ mit $x, y, z$ cogredient sind.

e) Ebenfalls läßt sich zeigen, daß folgende Größen Invarianten sind[2]):

3) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$,

4) $e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + 2(\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)$.

f) Ferner läßt sich zeigen[3]), daß, in der Bezeichnung von § 7, die Invariante 4) gleich ist

$$3\frac{\iiint (u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz}{\iiint (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz},$$

1) Salmon, *Geometry of three dimensions*, 4. Aufl., Dublin 1882, p. 66.
2) Die Invariante 3) wird später (Kap. VII) eine Rolle spielen.
3) E. Betti, *Il Nuovo Cimento* (Ser. 2), t. 7 (1872).

wo die Integrationen sich auf eine sehr kleine Kugel mit $(x, y, z)$ als Mittelpunkt erstrecken.

g) Folgendes Resultat besitzt eine gewisse Bedeutung[1]): Wenn die Deformation sich durch die Schiebungen $e_{xz}$, $e_{yz}$ allein ausdrücken läßt, die übrigen Komponenten also null sind, so besteht die Verzerrung in einer Schubverzerrung $e_{zx'}$; die Größe dieser Schiebung und die Richtung der $x'$-Achse in der $(x, y)$-Ebene sind aus den $e_{xz}$ und $e_{yz}$ so zu finden, daß man diese Größen als die Projektionen eines Vektors auf die $x$- und die $y$-Achse behandelt.

## § 14. Verzerrungsarten.

a) *Gleichförmige Dilatation.*

Wenn die Verzerrungsfläche eine Kugel ist, so sind die Hauptachsen der Verzerrung unbestimmt, und die Dehnung oder Verkürzung aller von einem Punkt ausgehenden Linienelemente ist die gleiche; d. h. wir haben

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \tfrac{1}{3}\Delta, \quad e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0,$$

wo $\Delta$ die kubische Dilatation ist und die $(x, y, z)$-Achsen irgend drei zu einander senkrechte Linien sind. In diesem Falle beträgt die lineare Dehnung in irgend einer Richtung ein Drittel der kubischen Dilatation — ein Ergebnis, das im allgemeinen Falle nicht zutrifft.

b) *Einfache Dehnung.*

Von der Anwendung der Methoden und Formeln von § 12 können wir ein Beispiel geben, indem wir die auf die $(x, y, z)$-Achsen bezogenen Komponenten einer Verzerrung bestimmen, die in einer einfachen Dehnung vom Betrage $e$ parallel der Richtung $(l, m, n)$ besteht. Fiele die $x'$-Achse in diese Richtung, so würden wir für die Form 4) den Wert $ex'^2$ haben; es wird deshalb

$$e_{xx} = el^2, \qquad e_{yy} = em^2, \qquad e_{zz} = en^2,$$
$$e_{yz} = 2emn, \quad e_{zx} = 2enl, \quad e_{xy} = 2elm.$$

Eine einfache Dehnung ist demgemäß gleichwertig mit einer durch diese sechs Komponenten gekennzeichneten Verzerrung.

Man hat vorgeschlagen[2]), jede gerichtete Größe, die sich in derselben Weise wie eine einfache Dehnung in Komponenten zerlegen läßt, einen *Tensor* zu nennen. Jede Verzerrung ist, wie wir bereits sahen, gleichwertig mit drei einfachen Dehnungen parallel den Verzerrungs-Hauptachsen. Man hat vorgeschlagen, jede gerichtete Größe, die sich in derselben Weise wie eine Verzerrung in Komponenten zerlegen läßt, ein *Tensortripel* zu nennen. Die Auseinandersetzung in § 12 und § 13 b) zeigt deutlich den Unterschied zwischen Tensoren und Vektoren.

c) *Schubverzerrung.*

Die mit $e_{xy}$ bezeichnete Verzerrung heißt „die der Richtung der $x$- und der $y$-Achse entsprechende Schubverzerrung". Wir bemerkten bereits, daß dieselbe gleich dem Kosinus des im verzerrten Zustande von den-

1) Vgl. Kap. XIV unten.

2) W. Voigt, *Göttinger Nachr.* (1900), p. 117. Vgl. M. Abraham in der *Ency. d. math. Wiss.* Bd. 4, Art. 14.

jenigen beiden Linienelementen eingeschlossenen Winkels ist, die im unverzerrten Zustand diesen Achsen parallel sind, und daß sie gleichwertig ist mit zwei einfachen Schiebungen, nämlich dem Aneinandergleiten der zu dem einen Element senkrechten Ebenen in der Richtung des andern. Die „Schubverzerrung" wird durch die Summe der beiden einfachen Schiebungen gemessen und ist von ihrem Verhältnis unabhängig. Die Längenänderung einer Linie und die Änderung des Winkels zwischen zwei Linien hängen von der Summe der beiden einfachen Schiebungen ab und nicht von dem Verhältnis ihrer Beträge.

Die Komponenten einer Deformation, die in einer der $x'$- und der $y'$-Achse entsprechenden Schubverzerrung besteht, sind durch die Gleichungen gegeben

$$e_{xx} = s l_1 l_2, \qquad e_{yy} = s m_1 m_2, \qquad e_{zz} = s n_1 n_2,$$
$$e_{yz} = s(m_1 n_2 + m_2 n_1), \quad e_{zx} = s(n_1 l_2 + n_2 l_1), \quad e_{xy} = s(l_1 m_2 + l_2 m_1),$$

wo $s$ gleich dem Betrag der Schubverzerrung. Kubische Dilatation ist mit der Verzerrung nicht verbunden.

Nehmen wir die $x'$- und die $y'$-Achse in der $(x, y)$-Ebene an und setzen voraus, daß die $(x, y, z)$-Achsen den Hauptachsen der Verzerrung parallel sind, so finden wir, daß $e_{zz}$ verschwindet, d. h. daß senkrecht zur Ebene der beiden betreffenden Richtungen keine Dehnung auftritt. In diesem Fall ergibt sich, daß die Form $sx'y'$ gleichwertig ist mit der Form $e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2$. Daraus folgt, daß $e_{xx} = -e_{yy} = \pm \frac{1}{2}s$ und daß die Hauptachsen der Verzerrung die Winkel zwischen den beiden fraglichen Richtungen halbieren. Mit andern Worten: gleiche Dehnung und Verkürzung zweier zu einander rechtwinkligen Linienelemente sind gleichbedeutend mit einer Schubverzerrung, die numerisch gleich dem doppelten Betrage der Dehnung oder Verkürzung ist und die den Richtungen entspricht, welche die Winkel zwischen den Elementen halbieren.

Wir könnten noch untersuchen, wie zwei Richtungen zu wählen sind, wenn die ihnen entsprechende Schubverzerrung den größtmöglichen Wert haben soll. Es läßt sich zeigen, daß die größte Schubverzerrung gleich der Differenz zwischen der algebraisch größten und kleinsten Hauptdehnung ist und daß die entsprechenden Richtungen die Winkel zwischen denjenigen Verzerrungshauptachsen halbieren, die der größten und der kleinsten Dehnung entsprechen.[1])

d) *Ebene Verzerrung.*

Eine allgemeinere Verzerrungsart, die die einfache Dehnung und Schubverzerrung als besondere Fälle umfaßt, erhält man durch die Annahme, daß *eine* der Hauptdehnungen null ist. Wenn die entsprechende Hauptachse die $z$-Achse ist, so wird die Verzerrungsfläche ein Zylinder über einem in der $(x, y)$-Ebene liegenden Kegelschnitt, den man den Verzerrungskegelschnitt nennen kann; die Gleichung desselben läßt sich schreiben

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{xy}xy = \text{const.};$$

es verschwinden also die Schubverzerrungen $e_{yz}$ und $e_{zx}$ sowohl wie die Dehnung $e_{zz}$. In dem besonderen Falle der einfachen Dehnung besteht

1) Den hier ausgesprochenen Satz verdankt man W. Hopkins, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 8 (1849).

der Kegelschnitt aus zwei parallelen Linien; im Falle der Schubverzerrung ist es eine gleichseitige Hyperbel. Ist es ein Kreis, so hat man gleichmäßige Dehnung oder Verkürzung aller vom Punkte $(x, y, z)$ ausgehenden Linienelemente in der Richtung senkrecht zur $z$-Achse.

Die der ebenen Verzerrung entsprechende Relativverschiebung ist parallel der Ebene der Verzerrung; wir haben also $w = \text{const.}$, während $u$ und $v$ Funktionen von $x$ und $y$ allein sind. Die Achse der resultierenden Drehung ist normal zur Ebene der Verzerrung. Die kubische Dilatation $\Delta$ und die Drehung $\varpi$ sind mit der Verschiebung durch die Gleichungen verknüpft:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varpi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wir können Zustände ebener Verzerrung erhalten, bei denen sowohl $\Delta$ wie $\varpi$ verschwindet; die Verzerrung ist reiner Schub, d. h. Schubverzerrung in Verbindung mit einer Drehung dergestalt, daß die Hauptachsen der Verzerrung ihre ursprüngliche Richtung beibehalten. Bei jedem derartigen Zustand sind die Verschiebungskomponenten $v, u$ konjugierte Funktionen von $x$ und $y$, oder $v + iu$ ist eine Funktion der komplexen Veränderlichen $x + iy$

## § 15. Beziehungen zwischen der Dilatation, der Drehung und der Verschiebung.

Die kubische Dilatation $\Delta$ ist mit der Verschiebung $(u, v, w)$ durch die Gleichung verknüpft

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Eine Skalargröße, die mittels dieser Formel aus einem Vektor abgeleitet ist, wird als die *Divergenz* des Vektors bezeichnet. Wir schreiben

$$\Delta = \text{div.}\,(u, v, w) \tag{14}$$

Diese Beziehung ist von den Koordinaten unabhängig und läßt sich wie folgt ausdrücken: Es möge irgend eine geschlossene Fläche $S$ in dem Vektorfelde beschrieben werden, und es bezeichne $N$ die Projektion des Vektors auf die nach außen gerichtete Normale in einem Punkte von $S$, ferner $d\tau$ irgend ein Volumelement innerhalb $S$, dann ist

$$\iint N\,dS = \iiint \Delta\,d\tau, \tag{15}$$

wo sich die Integration rechter Hand auf den Raum innerhalb $S$, diejenige linker Hand über die Oberfläche $S$ erstreckt.[1])

Die Drehung $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ ist mit der Verschiebung $(u, v, w)$ durch die Gleichungen verknüpft

$$2\varpi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varpi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varpi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

---

1) Dies Resultat ist ein besonderer Fall des als „Greenscher Satz" bekannten Theorems. S. *Ency. d. math. Wiss.* II A 2, Nr. 45—47.

Eine Vektorgröße, die durch das hier angegebene Verfahren aus einem andern Vektor abgeleitet ist, wird als der *Curl* des andern Vektors bezeichnet. Wir schreiben

$$2(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z) = \text{curl}\,(u, v, w). \tag{16}$$

Diese Beziehung ist von den Koordinaten unabhängig[1]) und läßt sich wie folgt ausdrücken: Es möge irgend eine geschlossene Kurve $s$ in dem Vektorfelde gezogen und irgend eine Fläche $S$ in der Weise beschrieben werden, daß sie die Kurve $s$ als Rand hat; sei $T$ die Komponente des Vektors $(u, v, w)$ längs der Tangente in einem Punkte von $s$, ferner $2\varpi_\nu$ die Projektion des Vektors $2(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ auf die Normale in einem Punkte von $S$, dann ist

$$\int T ds = \iint 2\varpi_\nu dS, \tag{17}$$

wo die Integration rechts über die Fläche $S$, links längs der Kurve $s$ erstreckt ist.[2])

## § 16. Zerlegung einer beliebigen Verzerrung in Dilatation und Schubverzerrungen.

Wenn die Verzerrung nicht mit kubischer Dilatation verknüpft ist, so verschwindet die Invariante $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$, und es ist möglich, ein System rechtwinkeliger Koordinaten $x', y', z'$ so zu wählen, daß die Form

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{yz}yz + e_{zx}zx + e_{xy}xy$$

übergeht in die Form

$$e_{y'z'}y'z' + e_{z'x'}z'x' + e_{x'y'}x'y',$$

in der keine Glieder in $x'^2, y'^2, z'^2$ auftreten. Die Verzerrung ist dann gleichwertig mit Schubverzerrungen, die den Richtungspaaren

$$(y', z'), \quad (z', x'), \quad (x', y')$$

entsprechen.

Wenn die Verzerrung mit kubischer Dilatation verknüpft ist, so läßt sich die Verschiebung in der Weise in zwei Teilverschiebungen auflösen, daß die kubische Dilatation, die der einen von ihnen entspricht, null ist; die aus diesem Bestandteil abgeleiteten Verzerrungen sind, wenn die Bezugsachsen passend gewählt werden, bloß Schub-

---

1) Dabei ist angenommen, daß die $(x, y, z)$-Achsen ein rechtshändiges System bilden. Will man auch Transformation auf ein linkshändiges System zulassen, so muß über das Vorzeichen des Vektorcurls eine Verabredung getroffen werden.

2) Man schreibt dies Resultat im allgemeinen Stokes zu. Vgl. *Ency. d. math. Wiss.* II A 2, Nr. 46. Es liegt darin die Voraussetzung, daß eine gewisse Beziehung besteht zwischen dem Sinn, in welchem die Integration entlang $s$ genommen wird, und der Richtung, in der die Normale $\nu$ gezogen ist. Es ist dies dieselbe Beziehung wie jene zwischen Drehung und Translation in einer rechtshändigen Schraube.

verzerrungen. Die Verschiebung, die zu der kubischen Dilatation Anlaß gibt, ist gleich dem Gradienten[1]) eines Skalar-Potentials ($\Phi$), und der übrige Teil der Verschiebung ist gleich dem Curl eines Vektor-Potentials ($F, G, H$), dessen Divergenz verschwindet. Um diesen Satz zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß sich jeder Vektor ($u, v, w$) in der Form

$$(u, v, w) = \text{Gradient von } \Phi + \text{curl}\,(F, G, H), \tag{18}$$

ausdrücken läßt; darin liegen drei Gleichungen vom Typus

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \tag{19}$$

wobei $F, G, H$ die Gleichung befriedigen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

In dem vorliegenden Fall der Verschiebung in einem Körper muß diese Zerlegung für alle Punkte innerhalb der den Körper begrenzenden Fläche gelten.

Es gibt vielerlei Wege, um diese Zerlegung von ($u, v, w$) auszuführen.[2]) Wir bemerken, daß, wenn sie gelingt, Dilatation und Rotation sich in der Form ausdrücken

$$\Delta = \nabla^2 \Phi, \quad 2\varpi_x = -\nabla^2 F, \quad 2\varpi_y = -\nabla^2 G, \quad 2\varpi_z = -\nabla^2 H; \tag{21}$$

die drei letzten Gleichungen ergeben sich, wenn man die Beziehung $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$ berücksichtigt. Nun lassen sich Lösungen von (21) schreiben in der Form

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\Delta'}{r}\, dx'\,dy'\,dz', \quad F = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\varpi'_x}{r}\, dx'\,dy'\,dz', \tag{22}$$

wo $r$ der Abstand des Punktes ($x', y', z'$) vom Punkte ($x, y, z$), für den $\Phi, F, \cdots$ berechnet werden, $\Delta'$ und ($\varpi_x', \varpi_y', \varpi_z'$) die Werte von $\Delta$ und ($\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$) im Punkte ($x', y', z'$); die Integration ist dabei über den vom Körper erfüllten Raum ausgedehnt. Die in (22) angeschriebenen Lösungen befriedigen aber nicht immer die Gleichung div $(F, G, H) = 0$. Ein Fall, wo sie tatsächlich diese Gleichung befriedigen, bietet sich dar, wenn sich der Körper nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt und die Verschiebungen in unendlicher Entfernung mindestens wie $r^{-2}$ gegen null streben. Um dies einzusehen, nehmen wir an, der Körper sei durch eine Fläche $S$ begrenzt, und schreiben die erste der Gleichungen (22), d. h.

1) Der Gradient von $\Phi$ ist der Vektor $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$.

2) S. z. B. E. Betti, *Il Nuovo Cimento* (Ser. 2), oder P. Duhem, *J. de Math.* (*Liouville*), (Sér. 5), t. 6 (1900). Die Zerlegung wurde zuerst von Stokes in seiner Abhandlung über die Beugung ausgeführt. (S. Einleitung, Fußnote 80.)

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\,dx'dy'dz',$$

in der gleichwertigen Form

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{r}\left\{u'\cos(x,\nu) + v'\cos(y,\nu) + w'\cos(z,\nu)\right\}dS$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{u'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x'} + v'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y'} + w'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z'}\right\}dx'dy'dz'$$

und lassen das Oberflächenintegral weg, wenn $S$ unendlich weit entfernt ist. Im gleichen Falle können wir setzen

$$F = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left(w'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y'} - v'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z'}\right)dx'dy'dz', \cdots$$

oder wir haben, da $\partial r^{-1}/\partial x' = -\partial r^{-1}/\partial x, \cdots$

$$F = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{w'}{r}\,dx'dy'dz'\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{v'}{r}\,dx'dy'dz'\right\},$$

entsprechende Ausdrücke für $G$ und $H$. Diese Form zeigt deutlich, daß

$$\operatorname{div}(F, G, H) = 0.$$

Die Ausdrücke, in die die rechten Seiten der Gleichungen (22) in dem speziellen Falle umgeformt werden, sind in jedem Falle mögliche Formen für $\Phi, F, G, H$, d. h. eine Zerlegungsart ist stets gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\left(u'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + v'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + w'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'dy'dz',\\
F &= \frac{1}{4\pi}\iiint\left(w'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - v'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'dy'dz',\\
G &= \frac{1}{4\pi}\iiint\left(u'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} - w'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right)dx'dy'dz',\\
H &= \frac{1}{4\pi}\iiint\left(v'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} - u'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right)dx'dy'dz',
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

wo die Integration über den vom Körper erfüllten Raum ausgedehnt ist; denn es ist klar, daß damit $\operatorname{div}(F, G, H) = 0$ befriedigt ist, ebenso

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\iiint\frac{u'}{r}\,dx'dy'dz' = u,$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

## § 17. Identische Beziehungen zwischen den Verzerrungskomponenten.[1])

Die Werte der Verzerrungskomponenten $e_{xx}, \cdots e_{yz}, \cdots$ als Funktionen von $x, y, z$ können nicht willkürlich vorgegeben werden; viel-

1) Diese Beziehungen teilte Saint-Venant in seiner Bearbeitung von Naviers *Leçons,* Appendix III, mit. Der dort angedeutete Beweis wurde ausgeführt von

mehr müssen sie gewissen Beziehungen unterworfen sein, welche aussprechen, daß es Funktionen $u, v, w$ gibt, die mit ihnen durch die sechs Gleichungen verknüpft sind

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdots, \quad e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \cdots \tag{24}$$

Die fraglichen Beziehungen kann man dadurch erhalten, daß man die drei Gleichungen

$$2\varpi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \cdots,$$

in Betracht zieht; denn alle Differentialquotienten von $u, v, w$ lassen sich mittels $e_{xx}, \ldots e_{yz}, \ldots \varpi_x, \ldots$ ausdrücken In der Tat haben wir drei solche Paare von Gleichungen, wie

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{2} e_{xy} - \varpi_z, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{1}{2} e_{xy} + \varpi_z;$$

die Bedingungen dafür, daß diese mit den drei Gleichungen $\partial u/\partial x = e_{xx}$ usw. verträglich sind, drücken sich aus durch neun Gleichungen von dem Typus

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial y} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_z}{\partial x},$$

und diese Gleichungen stellen die ersten Ableitungen von $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ mittels jener von $e_{xx}, \ldots e_{yz}, \ldots$ dar. Wenn wir zum Beispiel die drei Gleichungen, die $\varpi_x$ enthalten, niederschreiben, so können wir sofort sehen, wie wir zu den Bedingungen dafür, daß sie miteinander verträglich sind, gelangen. Es sind dies die drei Gleichungen

$$2\frac{\partial \varpi_x}{\partial x} = \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z},$$

$$2\frac{\partial \varpi_x}{\partial y} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} - 2\frac{\partial e_{yy}}{\partial z},$$

$$2\frac{\partial \varpi_x}{\partial z} = 2\frac{\partial e_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial z},$$

und aus der Gesamtheit der neun Gleichungen von diesem Typus können wir $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ eliminieren und die sechs identischen Beziehungen zwischen den Verzerrungskomponenten gewinnen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, & 2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}, & 2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, & 2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Kirchhoff, *Mechanik*, Vorlesung 27. Der im Text gegebene Beweis rührt her von Beltrami, *Paris C. R.*, t. 108 (1889); vgl. Koenigs, *Leçons de Cinématique*, Paris 1899, p. 411.

## § 18. Die einer gegebenen Verzerrung entsprechende Verschiebung.[1])

Wenn die Verzerrungskomponenten gegebene Funktionen sind, die die identischen Beziehungen des letzten Paragraphen befriedigen, so kann man die Verschiebungskomponenten dadurch ableiten, daß man die Gleichungen (24) als Differentialgleichungen für $u, v, w$ auflöst. Diese Gleichungen sind linear, und die vollständigen Lösungen derselben setzen sich zusammen aus 1) einem beliebigen System partikulärer Lösungen, 2) Ergänzungslösungen, welche willkürliche Konstanten enthalten. Die Ergänzungslösungen erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (26)$$

Differentiieren wir die linken Seiten dieser Gleichungen nach $x, y, z$, so erhalten wir achtzehn lineare Gleichungen, die die achtzehn zweiten Ableitungen von $u, v, w$ miteinander verknüpfen; es folgt daraus, daß alle diese zweiten Differentialquotienten verschwinden. Mithin sind die Ergänzungslösungen $u, v, w$ lineare Funktionen von $x, y, z$, und vermöge der Gleichungen (26) müssen sie sich ausdrücken lassen durch Gleichungen von der Form

$$u = u_0 - ry + qz, \quad v = v_0 - pz + rx, \quad w = w_0 - qx + py; \quad (27)$$

dies sind aber die Formeln für die Verrückung eines starren Körpers durch eine Translation $(u_0, v_0, w_0)$ und eine kleine Drehung $(p, q, r)$.

In den so erhaltenen Ergänzungslösungen müssen die Konstanten $p, q, r$ kleine Größen von derselben Größenordnung wie die gegebenen Funktionen $e_{xx}, \ldots$ sein; denn andernfalls würden, wie die Gleichungen (6) von § 9 zeigen, diese Funktionen die Verzerrung im Körper nicht richtig zum Ausdruck bringen, und die Glieder von (27), welche $p, q, r$ enthalten, würden keine in einem starren Körper mögliche Verschiebung darstellen. Behalten wir diese Beschränkung im Sinne, so schließen wir, daß, wenn die sechs Verzerrungskomponenten gegeben sind, die entsprechende Verschiebung bestimmt ist bis auf eine hinzukommende willkürliche Verrückung vom Typus (27); fügen wir aber noch sechs unabhängige Bedingungen hinzu der Art, daß im Ursprungspunkte die Verschiebung $(u, v, w)$ und die Drehung $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ verschwinden, oder auch daß in demselben Punkte

$$u = 0, \; v = 0, \; w = 0, \; \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (28)$$

so ist der Ausdruck für die Verschiebung bei gegebenen Verzerrungen eindeutig festgelegt. Die besondere Gleichungsgruppe (28) sagt aus, daß ein Punkt des Körpers (der Ursprungspunkt), ein Linienelement des Körpers (jenes längs der $z$-Achse, ausgehend vom Ursprung) und

1) Vgl. Kirchhoff, *Mechanik*, Vorlesung 27.

ein Ebenenelement des Körpers (jenes in der $[z, x]$-Ebene, das den Ursprung enthält) nach der Verzerrung ihre Lage beibehalten. Selbstverständlich ist es möglich, einen Körper, der in irgend einer Weise verzerrt wurde, wieder dahin zu bringen, daß ein gegebener Punkt, ein durch den Punkt gehendes gegebenes Linienelement und ein die Linie enthaltendes gegebenes Ebenenelement ihre ursprüngliche Lage wieder einnehmen.

## § 19. Krummlinige rechtwinklige Koordinaten.[1])

Bei vielen Problemen ist es angezeigt, Systeme krummliniger Koordinaten statt gewöhnlicher kartesischer Koordinaten zu gebrauchen. Man kann dieselben wie folgt einführen. Es sei $f(x, y, z) = \alpha$ (d. h. $=$ const.) die Gleichung einer Fläche. Lassen wir $\alpha$ variieren, so erhalten wir eine Schar von Flächen. Im allgemeinen wird durch einen vorgegebenen Punkt eine Fläche der Schar hindurch gehen, und ein benachbarter Punkt wird im allgemeinen auf einer benachbarten Fläche der Schar liegen, so daß $\alpha$ eine Funktion von $x, y, z$, eben die mit $f$ bezeichnete Funktion, ist. Ist $\alpha + d\alpha$ der Parameter jener Fläche der Schar, welche durch $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ hindurch geht, so haben wir

$$d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz.$$

Haben wir drei voneinander unabhängige Flächenscharen, die durch die Gleichungen

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma$$

in der Weise gegeben sind, daß durch einen vorgegebenen Punkt im allgemeinen eine Fläche jeder Schar hindurchgeht, so läßt sich ein Punkt festlegen durch die Werte von $\alpha, \beta, \gamma$, die zu den durch ihn gehenden Flächen gehören[2]), und ein Nachbarpunkt wird durch die Nachbarwerte $\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta,\ \gamma + d\gamma$ bestimmt sein. Größen wie $\alpha, \beta, \gamma$ heißen „krummlinige Koordinaten“ des Punktes.

Am geeignetsten für die Anwendungen auf die Elastizitätstheorie sind jene Systeme krummliniger Koordinaten, die bestimmt sind durch Scharen von Flächen, welche einander überall rechtwinklig schneiden. In solchem Falle haben wir eine dreifache orthogonale Flächenschar.

1) Die Theorie rührt her von Lamé. S. seine *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris 1859.

2) Die Bestimmung des Punktes ist möglicherweise nicht eindeutig, z. B. bei elliptischen Koordinaten, wo ein Ellipsoid und zwei konfokale Hyperboloide durch einen beliebigen Punkt hindurch gehen, sich aber auch noch in sieben andern Punkten schneiden. Die Mehrdeutigkeit verschwindet, wenn der betrachtete Raumteil passend begrenzt wird, im Falle elliptischer Koordinaten z. B., wenn man einen von Hauptebenen begrenzten Oktanten nimmt.

Bekanntlich gibt es eine unendliche Zahl solcher Tripel von Flächenscharen, und nach einem berühmten, von Dupin herrührendem Satz ist die Schnittlinie zweier Flächen, die zu zwei verschiedenen Scharen eines solchen Tripels gehören, auf jeder von ihnen Krümmungslinie.[1]) Im Folgenden werden wir $\alpha, \beta, \gamma$ als Parameter einer derartigen dreifachen Flächenschar nehmen, so daß folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}&=0,\\
\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}&=0,\\
\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}&=0.
\end{aligned}$$

Der Abschnitt $dn_1$, der auf der Normalen zu einer Fläche der Schar $\alpha$ begrenzt wird durch die Flächen $\alpha$ und $\alpha + d\alpha$, bestimmt sich durch folgende Überlegung. Die Richtungskosinus der Normalen zu $\alpha$ im Punkte $x, y, z$ sind

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial y}, \quad \frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial z}, \tag{29}$$

wo $h_1$ sich durch die erste der Gleichungen (31) unten ausdrückt. Projizieren wir nun die Verbindungslinie zweier Nachbarpunkte auf der Normalen zu $\alpha$, so erhalten wir die Gleichung

$$dn_1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}dz\right) = \frac{d\alpha}{h_1} \tag{30}$$

Ebenso sind die Elemente $dn_2, dn_3$ der Normalen zu $\beta$ und $\gamma$ gleich $d\beta/h_2$ und $d\gamma/_3$, wo

$$\left.\begin{aligned}
h_1^2 &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2,\\
h_2^2 &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2,\\
h_3^2 &= \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Da der Abstand zwischen zwei Nachbarpunkten gleich $(dn_1^2 + dn_2^2 + dn_3^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, so erhalten wir den Ausdruck für das „Bogenelement“ $ds$, d. h. den Abstand zwischen den Punkten $(\alpha, \beta, \gamma)$ und $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$, in der Form

$$(ds)^2 = (d\alpha/h_1)^2 + (d\beta/h_2)^2 + (d\gamma/h_3)^2 \tag{32}$$

Im allgemeinen sieht man $h_1, h_2, h_2$ als Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma$ an.

1) Salmon, *Geometry of three dimensions*, 4. Aufl., p. 269.

## § 20. Komponenten der Verzerrung, bezogen auf krummlinige rechtwinklige Koordinaten.[1])

Die Länge der Verbindungslinie der Punkte $(\alpha, \beta, \gamma)$ und $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ im unverzerrten Zustand ist gegeben durch (32); wir suchen die Länge der Verbindungslinie desselben Paars von Teilchen im verzerrten Zustand. Es seien $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_\gamma$ die Projektionen der Verschiebung irgend eines Teilchens auf die Normalen zu den Flächen $\alpha, \beta, \gamma$, die durch den Ort desselben im unverzerrten Zustand hindurchgehen. Ist die Verschiebung klein, so werden die Koordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ des von einem Teilchen eingenommenen Punktes in $\alpha + h_1 u_\alpha$, $\beta + h_2 u_\beta$, $\gamma + h_3 u_\gamma$ übergeführt. Die $\alpha$-Koordinate $(\alpha + d\alpha)$ eines benachbarten Punktes wird übergeführt in

$$\alpha + d\alpha + \left\{ h_1 u_\alpha + d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_1 u_\alpha) + d\beta \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1 u_\alpha) + d\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u_\alpha) \right\},$$

und entsprechende Änderungen treten in der $\beta$- und $\gamma$-Koordinate $(\beta + d\beta$ und $\gamma + d\gamma)$ ein. Andererseits unterscheiden sich die Werte von $h_1, \ldots$ für ein verschobenes Teilchen von denen für seine ursprüngliche Lage. Beispielsweise wird $\frac{1}{h_1}$ übergeführt in

$$\frac{1}{h_1} + h_1 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{h_1}\right).$$

Daraus folgt, daß $\frac{d\alpha}{h_1}$ zu ersetzen ist durch

$$\left[d\alpha \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(h_1 u_\alpha\right)\right\} + d\beta \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1 u_\alpha) + d\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u_\alpha)\right]$$
$$\times \left[\frac{1}{h_1} + h_1 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{h_1}\right) + h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{h_1}\right)\right];$$

wenn man Produkte von Größen von der Ordnung $u_\alpha$ vernachlässigt, hat man hierfür

$$\frac{d\alpha}{h_1} + d\alpha \left\{ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{h_1}\right)\right\}$$
$$+ d\beta \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_1 u_\alpha) + d\gamma \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u_\alpha). \tag{33}$$

Entsprechende Änderungen hat man in $\frac{d\beta}{h_2}$ und $\frac{d\gamma}{h_3}$ einzuführen. Die Länge der Verbindungslinie zweier Teilchen im verzerrten Zustand findet man, indem man aus der Summe der Quadrate der drei Ausdrücke vom Typus (33) die Quadratwurzel zieht. Sei $ds$ die Länge des Linienelements im unverzerrten Zustand, und seien $l, m, n$ die Richtungs-

1) Die hier wiedergegebene Methode rührt her von Borchardt, *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 76 (1873). Ein anderes Verfahren wird in der „Bemerkung über Anwendung beweglicher Achsen" am Ende des Buches entwickelt.

kosinus desselben, bezogen auf die Normalen zu den Flächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in einem Punkte, sodaß $\frac{d\alpha}{h_1} = l ds, \ldots$ Sei ferner $ds(1+e)$ die Länge des entsprechenden Linienelements im verzerrten Zustand. Dann ist $e$ gegeben durch die Gleichung

$$(1+e)^2 = \left[l\left\{1 + h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_1 h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right\} + m\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1 u_\alpha) + n\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1 u_\alpha)\right]^2 + \cdots + \cdots \quad (34)$$

Vernachlässigen wir Quadrate und Produkte von $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_\gamma$, so können wir das Resultat in der Form schreiben

$$e = e_{\alpha\alpha} l^2 + e_{\beta\beta} m^2 + e_{\gamma\gamma} n^2 + e_{\beta\gamma} mn + e_{\gamma\alpha} nl + e_{\alpha\beta} lm, \quad (35)$$

worin

$$\left.\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 h_1 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right),\\
e_{\beta\beta} &= h_2 \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + h_2 h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right) + h_1 h_2 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right),\\
e_{\gamma\gamma} &= h_3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + h_3 h_1 u_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right) + h_2 h_3 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_3}\right),\\
e_{\beta\gamma} &= \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial \beta}(h_3 u_\gamma) + \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_2 u_\beta),\\
e_{\gamma\alpha} &= \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1 u_\alpha) + \frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_3 u_\gamma),\\
e_{\alpha\beta} &= \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_2 u_\beta) + \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1 u_\alpha).
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Die Größen $e_{\alpha\alpha}, \ldots e_{\beta\gamma}, \ldots$ sind die sechs Verzerrungskomponenten, bezogen auf die krummlinigen rechtwinkligen Koordinaten. In der Tat, $e_{\alpha\alpha}$ ist die Dehnung eines Linienelements, das im unverzerrten Zustand längs der Normalen zur Fläche $\alpha$ liegt; und $e_{\beta\gamma}$ ist der Kosinus des Winkels zwischen den Linienelementen, die im unverzerrten Zustand längs der Normalen zu den Flächen $\beta$ und $\gamma$ liegen.

## § 21. Dilatation und Drehung, bezogen auf krummlinige rechtwinklige Koordinaten.

Die Resultate von § 15 kann man benutzen, um die kubische Dilatation $\Delta$ und die Drehungskomponenten $\varpi_\alpha$, $\varpi_\beta$, $\varpi_\gamma$ um die Normalen zu den drei Flächen auszudrücken durch die Komponenten $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_\gamma$ der Verschiebung.

Um den Ausdruck für $\Delta$ zu erhalten, bilden wir das Oberflächenintegral der Normalkomponente der Verschiebung[1]) über die Oberfläche eines Volumelements, das von drei Flächenpaaren $(\alpha, \alpha + d\alpha)$, $(\beta, \beta + d\beta)$,

1) Diese Methode rührt her von Lord Kelvin. (Sir W. Thomson, *Math. and Phys. Papers,* Vol. 1, p. 25. Die Untersuchung stammt aus dem Jahr 1843.)

$(\gamma, \gamma + d\gamma)$ begrenzt wird; dabei sei die Normale vom Innern des Elements weg gerichtet. Die Anteile der Seitenflächen des Elements lassen sich in folgender Form niederschreiben:

$$\text{Anteil von } \alpha \qquad = -u_\alpha \frac{d\beta}{h_2}\frac{d\gamma}{h_3},$$

$$\text{,, \quad ,, } \alpha + d\alpha = \quad u_\alpha \frac{d\beta}{h_2}\frac{d\gamma}{h_3} + d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(u_\alpha \frac{d\beta}{h_2}\frac{d\gamma}{h_3}\right), \quad \text{usw.};$$

addieren wir die sechs Anteile, so erhalten wir

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma \left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1 h_2}\right)\right\};$$

dies muß identisch sein mit $\Delta d\alpha d\beta d\gamma / h_1 h_2 h_3$. Wir haben also

$$\Delta = h_1 h_2 h_3 \left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\beta}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u_\gamma}{h_1 h_2}\right)\right\}. \tag{37}$$

Dasselbe Resultat würden wir durch Addieren der in (36) gegebenen Ausdrücke für $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\gamma\gamma}$ finden.

Um den Ausdruck für $2\varpi_\gamma$ zu erhalten, bilden wir das Linienintegral der Tangentialkomponente der Verschiebung längs der Umrandung des Elements in der Fläche $\gamma + d\gamma$. Die Anteile der vier Stücke des Randes lassen sich mit Hilfe von Fig. 3 wie folgt niederschreiben:

$$\text{Anteil von } RP = \quad u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1},$$

$$\text{,, \quad ,, } R'Q = -u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1} - d\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(u_\alpha \frac{d\alpha}{h_1}\right),$$

$$\text{,, \quad ,, } QR = -u_\beta \frac{d\beta}{h_2},$$

$$\text{,, \quad ,, } PR' = \quad u_\beta \frac{d\beta}{h_2} + d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(u_\beta \frac{d\beta}{h_2}\right).$$



Fig. 3.

Addieren wir diese Anteile, so erhalten wir

$$d\alpha\, d\beta \left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right\}.$$

Dies muß identisch sein mit $2\varpi_\gamma d\alpha d\beta / h_1 h_2$, und damit haben wir für $\varpi_\gamma$ den in der dritten der Gleichungen (38) angegebenen Ausdruck; die andern Gleichungen dieser Gruppe können wir auf dieselbe Weise erhalten. Die Formeln[1]) lauten

1) Die Formeln (38), ebenso wie (36) und (37) verdankt man Lamé. Die Methode, nach welcher hier die Gleichungen (38) abgeleitet sind und welche in etwas mehr analytischer Form auch von Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità* (Turin 1894), p. 193, angewendet wird, ist in der Elektrodynamik gebräuchlich. Vgl. H. Lamb, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 178 (1888), p. 150, oder J. J. Thomson, *Recent Researches in Electricity and Magnetism*,

$$\left.\begin{aligned}2\varpi_\alpha &= h_2 h_3 \left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)\right\}\\ 2\varpi_\beta &= h_3 h_1 \left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)\right\}\\ 2\varpi_\gamma &= h_1 h_2 \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

## § 22. Zylinder- und Polarkoordinaten.

Im Falle von *Zylinderkoordinaten* $r$, $\theta$, $z$ haben wir das Bogenelement

$$\left\{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2\right\}^{1/2}$$

und die Verschiebungen $u_r$, $u_\theta$, $u_z$. Die allgemeinen Formeln nehmen folgende Gestalt an:

1) für die Verzerrungen

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$e_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad e_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta};$$

2) für die kubische Dilatation

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

3) für die Drehungskomponenten

$$2\varpi_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$2\varpi_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2\varpi_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}.$$

Im Falle von *Polarkoordinaten* $r$, $\theta$, $\Phi$ haben wir das Bogenelement

$$\left\{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\Phi)^2\right\}^{1/2}$$

und die Verschiebungen $u_r$, $u_\theta$, $u_\Phi$. Die allgemeinen Formeln nehmen folgende Gestalt an:

---

Oxford 1893, p. 367. Physikalisch gesprochen handelt es sich natürlich um die Beziehung zwischen der „Zirkulation" und der „Wirbelstärke", die von Lord Kelvin in seiner Abhandlung „On Vortrex Motion", *Edinburgh, Roy. Soc. Trans.*, vol. 25 (1869), aufgedeckt wurde.

1) für die Verzerrungen

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{\Phi\Phi} = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial u_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{\theta\Phi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\Phi}{\partial \theta} - u_\Phi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \Phi},$$

$$e_{\Phi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \Phi} + \frac{\partial u_\Phi}{\partial r} - \frac{u_\Phi}{r}, \quad e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta};$$

2) für die kubische Dilatation

$$\Delta = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r u_\theta \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \Phi}(r u_\Phi)\right\};$$

3) für die Drehungskomponenten

$$2\varpi_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}(r u_\Phi \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \Phi}(r u_\theta)\right\},$$

$$2\varpi_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\Phi \sin\theta)\right\},$$

$$2\varpi_\Phi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right\}.$$

Die Verifikation dieser Formeln sei dem Lernenden zur Übung empfohlen.

## Anhang zu Kapitel I.

### Allgemeine Theorie der Verzerrung.

§ 23. Der vorhergehende Teil dieses Kapitels enthält alle auf Verzerrungen bezüglichen Resultate, die in der mathematischen Elastizitätstheorie, soweit sie bis heute ausgebaut ist, von Bedeutung sind. Die Untersuchung der Verzerrungszustände, welche Verschiebungen im allgemeinen, im Gegensatz zu kleinen Verschiebungen, entsprechen, bildet einen interessanten Zweig der Kinematik; über diesen soll nun kurz berichtet werden.[1]) Vorausgeschickt sei, daß die hier gegebenen Entwicklungen im übrigen Teil dieses Buches nicht werden erfordert werden.

In neueren Büchern über Kinematik ist es gebräuchlich, die Theorie der Verzerrungen im allgemeinen auf dem in § 7 ausgesprochenen Resultate zu begründen, daß die Verzerrung in der Umgebung eines Punktes merklich homogen ist, und die Theorie der endlichen Verzerrung nur im Falle homogener Verzerrung zu entwickeln. Vom Gesichtspunkt einer strengen Analysis aus erscheint es wünschenswert, die Theorie der Verzerrungen im allgemeinen auf unabhängiger Grundlage aufzubauen. Wir werden mit einem Bericht über die einer beliebigen Verschiebung entsprechende Verzerrung beginnen und hernach die homogene Verzerrung etwas eingehender untersuchen.

### § 24. Die einer beliebigen Verschiebung entsprechende Verzerrung.

Wir betrachten den Einfluß der Verschiebung auf Aggregate von Teilchen, die im unverzerrten Zustand gegebene Kurven bilden. Irgend ein Teilchen, das im unverzerrten Zustand sich an der Stelle $(x, y, z)$ befindet, greifen wir heraus. Dasselbe Teilchen befindet sich im verzerrten Zustand im Punkte $(x + u, y + v, z + w)$. Die Teilchen, die

1) Man wolle bei Cauchy, *Exercices de mathématiques, Année 1827,* den Artikel „Sur la condensation et la dilatation des corps solides" nachsehen; ferner Greens Abhandlung über die Reflexion des Lichts, die in der Einleitung (Fußnote 42) angezogen wurde; Saint-Venant, „Mémoire sur l'équilibre des corps solides ... quand les déplacements ... ne sont pas très petits", *Paris, C. R.*, t. 24 (1847); Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 115—144; Todhunter und Pearson, *History,* Bd. 1, Artikel 1619—1622; J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes,* Paris 1903, Kap. VI.

in dem ersten Zustand auf einer gegebenen Kurve liegen, liegen im allgemeinen im zweiten Zustand auf einer andern Kurve. Ist $ds$ das Bogenelement einer Kurve im ersten Zustand, so sind die Richtungskosinus der Kurventangente in irgend einem Punkte gleich $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Ist $ds_1$ das Bogenelement der entsprechenden Kurve im zweiten Zustand, so sind die Richtungskosinus der Tangente dieser Kurve gleich $\frac{d(x+u)}{ds_1}$, $\frac{d(y+v)}{ds_1}$, $\frac{d(z+w)}{ds_1}$. Hierin ist z. B.

$$\frac{d(x+u)}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1}\left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right), \tag{1}$$

ähnliche Formeln gelten für die beiden andern Ausdrücke.

Es seien $l, m, n$ die Richtungskosinus einer Linie im unverzerrten Zustand, $l_1, m_1, n_1$ die Richtungskosinus der entsprechenden Linie im verzerrten Zustand, $ds, ds_1$ die Bogenelemente entsprechender Kurven, die diese Linie bezüglich zu Tangenten haben. In der oben benutzten Bezeichnung wird

$$l = \frac{dx}{ds}, \qquad m = \frac{dy}{ds}, \qquad n = \frac{dz}{ds},$$

$$l_1 = \frac{d(x+u)}{ds_1}, \quad m_1 = \frac{d(y+v)}{ds_1}, \quad n_1 = \frac{d(z+w)}{ds_1},$$

und die Gleichungen vom Typus (1) lassen sich in der Form schreiben

$$l_1 = \frac{ds}{ds_1}\left\{l\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{2}$$

Quadrieren und addieren wir die rechten und linken Seiten und erinnern uns der Gleichungen

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,$$

so finden wir eine Gleichung, die sich schreiben läßt

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = (1 + 2\varepsilon_{xx})l^2 + (1 + 2\varepsilon_{yy})m^2 + (1 + 2\varepsilon_{zz})n^2 + 2\varepsilon_{yz}mn + 2\varepsilon_{zx}nl + 2\varepsilon_{xy}lm, \tag{3}$$

wo $\varepsilon_{xx}, \ldots$ gegeben sind durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\},\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\},\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\},\\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},\\
\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x},\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Der Verzerrungszustand ist völlig bestimmt, wenn wir die Längen entsprechender Linien im verzerrten und im unverzerrten Zustand kennen.[1]) Die Größe $\frac{ds_1}{ds} - 1$ ist die *Dehnung* des Linienelements $ds$. Dieselbe bestimmt sich durch die Formel (3). Wir bemerken, daß die Dehnungen von Linienelementen, die im unverzerrten Zustand zu den Koordinatenachsen parallel sind, bezüglich gleich

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1, \quad \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1, \quad \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1$$

sind, wo die positiven Werte der Quadratwurzeln zu nehmen sind. So erhalten wir eine Deutung der Größen $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{zz}$. Wir werden sogleich für die Größen $\varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{zx}$, $\varepsilon_{xy}$ eine Deutung mittels der von solchen Linienelementen im verzerrten Zustand eingeschlossenen Winkel erhalten, die im unverzerrten Zustand den Koordinatenachsen parallel sind. Inzwischen bemerken wir, daß in jedem Punkte die Verzerrung durch die sechs Größen $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{zz}$, $\varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{zx}$, $\varepsilon_{xy}$ völlig bestimmt ist. Diese Größen wird man die *Verzerrungskomponenten* nennen. Die Größen $e_{xx}, \ldots$, die in früheren Paragraphen „Verzerrungskomponenten" genannt wurden, bilden das hinreichend genaue Äquivalent der $\varepsilon_{xx}, \ldots$, wenn die Quadrate und Produkte von Größen wie $\partial u/\partial x$ vernachlässigt werden.

## § 25. Kubische Dilatation.

Das Verhältnis eines Volumelements im verzerrten Zustand zu dem entsprechenden Volumelement im unverzerrten Zustand ist gleich der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x + u,\ y + v,\ z + w)}{\partial(x,\ y,\ z)}$$

oder gleich

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & 1 + \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Man bezeichnet dasselbe mit $1 + \Delta$. Dann ist $\Delta$ der Volumzuwachs pro Volumeinheit in einem Punkte oder gleich der *kubischen Dilatation*. Die Größe $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ ist ein hinreichend genaues Äquivalent für $\Delta$, wenn die Verschiebung klein ist.

---

1) Lord Kelvins Methode (§ 10, Fußnote) ist, wie er darlegt, auf Verzerrungen von unbeschränkter Größe anwendbar.

Wir können $\Delta$ durch die Verzerrungskomponenten ausdrücken. Durch Quadrieren der Determinante finden wir, daß

$$(1+\Delta)^2 = (1+2\varepsilon_{xx})(1+2\varepsilon_{yy})(1+2\varepsilon_{zz}) + 2\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy} \\ -(1+2\varepsilon_{xx})\varepsilon_{yz}^2 - (1+2\varepsilon_{yy})\varepsilon_{zx}^2 - (1+2\varepsilon_{zz})\varepsilon_{xy}^2. \qquad (5)$$

## § 26. Reziprokes Verzerrungsellipsoid.

Das Verhältnis $ds_1 : ds$, von dem die Dehnung eines von einem Punkte ausgehenden Linienelements abhängt, ist in der Formel (3) ausgedrückt durch die Richtungskosinus des Elements im unverzerrten Zustand und die Verzerrungskomponenten in dem betreffenden Punkte. Die Formel zeigt, daß für eine beliebige Richtung das fragliche Verhältnis umgekehrt proportional ist dem vom Mittelpunkt aus in jener Richtung gezogenen Radiusvektor eines Ellipsoids, das durch die Gleichung gegeben ist

$$(1+2\varepsilon_{xx})x^2 + (1+2\varepsilon_{yy})y^2 + (1+2\varepsilon_{zz})z^2 + 2\varepsilon_{yz}yz \\ + 2\varepsilon_{zx}zx + 2\varepsilon_{xy}xy = \text{const.} \qquad (6)$$

Dies ist das *reziproke Verzerrungsellipsoid*, das bereits (§ 6) im Falle homogener Verzerrungen definiert wurde. Seine Achsen heißen die *Hauptachsen der Verzerrung*; sie fallen in die Richtung jener Linienelemente im unverzerrten Zustande, welche stationäre (maximale oder minimale oder minimaxe) Dehnung erfahren. Die Dehnungen der mit diesen Richtungen zusammenfallenden Linienelemente heißen die *Hauptdehnungen*, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. Die Werte von $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2$, $1+\varepsilon_3$ sind gleich den positiven Quadratwurzeln aus den drei Werten von $\varkappa$, die der Gleichung genügen

$$\begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_{xx}-\varkappa, & \varepsilon_{xy}, & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy}, & 1+2\varepsilon_{yy}-\varkappa, & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz}, & \varepsilon_{yz}, & 1+2\varepsilon_{zz}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Die invariante Beziehung des reziproken Verzerrungsellipsoids zum Verzerrungszustand kann man zwecks Transformation der Verzerrungskomponenten von einem rechtwinkligen Achsensystem auf ein anderes benutzen, gerade wie in § 12 die Verzerrungsfläche transformiert wurde. So würde sich zeigen, daß die Größen $\varepsilon_{xx}, \cdots \varepsilon_{xy}$ Komponenten eines „Tensortripels" sind. Man würde also drei Invarianten finden, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\frac{1}{4}(\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{zx}^2+\varepsilon_{xy}^2), \\ \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\frac{1}{4}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy}-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2-\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zx}^2-\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

## § 27. Änderung des Winkels zwischen zwei Kurven durch die Verzerrung.

Wir wollen den Einfluß der Verzerrung auf den Winkel zwischen zwei vom Punkte $(x, y, z)$ ausgehenden Linienelementen berechnen. Seien $l, m, n$ und $l', m', n'$ die Richtungkosinus der beiden Linien im unverzerrten Zustand und $\theta$ der Winkel zwischen ihnen; seien ferner $l_1, m_1, n_1$ und $l'_1, m'_1, n'_1$ die Richtungskosinus der entsprechenden Linien im verzerrten Zustand und $\theta_1$ der Winkel zwischen ihnen. Aus (2) und den analogen Formeln finden wir

$$\cos\theta_1 = \frac{ds}{ds_1}\frac{ds'}{ds'_1}\Big\{\cos\theta + 2\left(\varepsilon_{xx}ll' + \varepsilon_{yy}mm' + \varepsilon_{zz}nn'\right) + \varepsilon_{yz}(mn' + m'n) + \varepsilon_{zx}(nl' + n'l) + \varepsilon_{xy}(lm' + l'm)\Big\}, \tag{9}$$

wo $ds_1/ds$ und $ds'_1/ds'$ die Verhältnisse der Längen entsprechender, in die beiden Richtungen fallender Linienelemente vor und nach der Verzerrung sind.

Wir bemerken, daß, wenn die beiden vorgegebenen Richtungen mit den positiven Richtungen der $x$- und der $y$-Achse übereinstimmen, die Formel übergeht in

$$\varepsilon_{yz} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}\cos\theta_1, \tag{10}$$

und wir erhalten so eine Deutung der Größe $\varepsilon_{yz}$. Ähnliche Deutungen lassen sich für $\varepsilon_{zx}$ und $\varepsilon_{xy}$ finden. Aus obiger Formel leuchtet auch ein, daß, wenn die Koordinatenachsen den Hauptachsen der Verzerrung in einem Punkte parallel sind, die von dem betreffenden Punkt in den Richtungen dieser Achsen auslaufenden Linienelemente nach der Verzerrung immer noch rechtwinklig einander schneiden.

Wir können sagen, daß dies im allgemeinen das einzige Tripel orthogonaler Linienelemente in einem Punkte ist, das durch die Verzerrung wieder in ein Orthogonaltripel übergeführt wird. Denn die Bedingung, daß Linienelemente, die sich im unverzerrten Zustand rechtwinklig schneiden, auch im verzerrten Zustand einander rechtwinklig schneiden, erhalten wir, indem wir sowohl $\cos\theta$ wie $\cos\theta_1$ in Gleichung (9) gleich null setzen. Wir finden so die Gleichung

$$\{(1 + 2\varepsilon_{xx})l + \varepsilon_{xy}m + \varepsilon_{xz}n\}l' + \{\varepsilon_{xy}l + (1 + 2\varepsilon_{yy})m + \varepsilon_{yz}n\}m' + \{\varepsilon_{xz}l + \varepsilon_{yz}m + (1 + 2\varepsilon_{zz})n\}n' = 0,$$

worin $ll' + mm' + nn' = 0$. Diese Gleichung zeigt, daß ein jedes von zwei solchen Linienelementen (außer daß es auf dem andern senkrecht steht) zu der Ebene parallel ist, die bezüglich des reziproken Verzerrungsellipsoids zu dem andern konjugiert ist. Von einem Tripel derartiger Linienelemente gilt daher, daß sie zugleich aufeinander senkrecht stehen und zu konjugierten Durchmessern dieses Ellipsoids parallel sind.

Die bis dahin erhaltenen Formeln können in dem Sinne gedeutet werden, daß ein kleines Körperelement, welches im unverzerrten Zustand Gestalt und Lage des seinem Mittelpunkte entsprechenden reziproken Verzerrungsellipsoids hat, nach der Verzerrung die Gestalt einer Kugel besitzt und daß jedes Tripel konjugierter Durchmesser des Ellipsoids in drei orthogonale Durchmesser der Kugel übergeführt wird.

## § 28. Das Verzerrungsellipsoid.

Wir könnten das Verhältnis $ds_1 : ds$ durch die Richtung des Linienelements im verzerrten Zustand ausdrücken statt durch die im unverzerrten Zustand. Wenn wir die Gleichungen vom Typus (2) nach $l, m, n$ auflösten, würden wir finden, daß dies lineare Funktionen von $l_1, m_1, n_1$ sind mit Koeffizienten, die $ds_1/ds$ als Faktor enthalten; und durch Quadrieren und Addieren würden wir, nachdem wir $l^2 + m^2 + n^2$ durch eins ersetzt hätten, eine Gleichung von der Form finden

$$\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 = (a_1 l_1 + b_1 m_1 + c_1 n_1)^2 + (a_2 l_1 + b_2 m_1 + c_2 n_1)^2 + (a_3 l_1 + b_3 m_1 + c_3 n_1)^2,$$

wo $a_1, \ldots$ nur von $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \frac{\partial w}{\partial z}$ abhängen.

Das Ellipsoid, das durch die Gleichung

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = \text{const.}$$

dargestellt wird, würde die Eigenschaft haben, daß sein Radiusvektor, der vom Mittelpunkt aus in irgend einer Richtung gezogen wird, proportional ist dem Verhältnis $ds_1 : ds$ für das Linienelement, das im verzerrten Zustand in die betreffende Richtung fällt. Dies Ellipsoid heißt das *Verzerrungsellipsoid*. Die Längen der Hauptachsen dieses Ellipsoids und des reziproken Verzerrungsellipsoids sind zueinander invers, so daß die beiden Ellipsoide hinsichtlich der Gestalt zueinander reziprok sind; ihre Hauptachsen liegen jedoch im allgemeinen nicht in den gleichen Richtungen. In der Tat, die Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids fallen in die Richtungen jener Linienelemente im verzerrten Zustand, welche stationäre (maximale oder minimale oder minimaxe) Dehnung erfahren haben. Am einfachsten findet man diese Richtungen, wenn man beachtet, daß die entsprechenden Linienelemente im unverzerrten Zustand zu den Hauptachsen der Verzerrung parallel sind, sodaß ihre Richtungen bekannt sind. Die Formeln vom Typus (2) drücken die Richtungskosinus irgend eines Linienelements im verzerrten Zustand aus, dessen Richtungskosinus im unverzerrten Zustand gegeben sind. Somit können die Richtungskosinus der Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids aus diesen Formeln gefunden werden.

## § 29. Änderung der Richtung durch die Verzerrung.

Der Zusammenhang zwischen den Richtungen der Linienelemente im verzerrten und im unverzerrten Zustand läßt sich noch deutlicher machen, wenn man auf die Hauptachsen der Verzerrung Bezug nimmt. Sind die Koordinatachsen den Hauptachsen parallel, so ist die Gleichung des reziproken Verzerrungsellipsoids von der Form

$$(1+\varepsilon_1)^2x^2 + (1+\varepsilon_2)^2y^2 + (1+\varepsilon_3)^2z^2 = \text{const.},$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Hauptdehnungen. In der Formel (9) für den Kosinus des Winkels zwischen den verzerrten Lagen zweier Linienelemente haben wir zu setzen

$$1+2\varepsilon_{xx} = (1+\varepsilon_1)^2, \quad 1+2\varepsilon_{yy} = (1+\varepsilon_2)^2, \quad 1+2\varepsilon_{zz} = (1+\varepsilon_3)^2,$$
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xy} = 0.$$

Die Linie $(l', m', n')$ der Formel (9) möge nun nacheinander die Lage der drei Hauptachsen annehmen; die Linie $(l, m, n)$ sei irgend eine vorgegebene Linie im unverzerrten Zustand.

Wir haben $ds'/ds'_1$ der Reihe nach mit $(1+\varepsilon_1)^{-1}$, $(1+\varepsilon_2)^{-1}$, $(1+\varepsilon_3)^{-1}$ gleich zu setzen und für $ds/ds_1$ den Ausdruck

$$[(1+\varepsilon_1)^2l^2 + (1+\varepsilon_2)^2m^2 + (1+\varepsilon_3)^2n^2]^{-\frac{1}{2}}$$

einzuführen. Die Formel gibt dann die Kosinus der Winkel, die das entsprechende Linienelement im verzerrten Zustand mit den Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids einschließt. Bezeichnen wir diese Kosinus mit $\lambda, \mu, \nu$, so finden wir

$$(\lambda, \mu, \nu) = [(1+\varepsilon_1)^2l^2+(1+\varepsilon_2)^2m^2+(1+\varepsilon_3)^2n^2]^{-\frac{1}{2}}\{(1+\varepsilon_1)l, (1+\varepsilon_2)m, (1+\varepsilon_3)n\}. \tag{11}$$

Lösen wir dies nach $l, m, n$ auf, so finden wir

$$(l, m, n) = \left[\frac{\lambda^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{\mu^2}{(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{\nu^2}{(1+\varepsilon_3)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda}{1+\varepsilon_1}, \frac{\mu}{1+\varepsilon_2}, \frac{\nu}{1+\varepsilon_3}\right). \tag{12}$$

Hier sind $l, m, n$ die Richtungskosinus einer Linie im unverzerrten Zustand, bezogen auf die Hauptachsen der Verzerrung, und $\lambda, \mu, \nu$ die Richtungskosinus der entsprechenden Linie im verzerrten Zustand, bezogen auf die Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids. Die Aufgabe, die letztere dieser Richtungen aus der ersteren abzuleiten, läßt sich daher in zwei Schritten erledigen. Der erste Schritt[1]) besteht darin, ein Tripel von Richtungskosinus $(\lambda, \mu, \nu)$ aus dem Tripel $(l, m, n)$ abzuleiten; der zweite Schritt besteht in einer Drehung der Hauptachsen der Verzerrung in die Lage der Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids.

1) Diese Operation läuft auf eine homogene reine Verzerrung hinaus. S. § 33, unten.

Die Formeln lassen auch in dem Sinne eine Deutung zu, daß irgend ein kleines Körperelement, das im unverzerrten Zustand kugelförmig ist und einen gegebenen Punkt als Zentrum hat, nach der Verzerrung Gestalt und Lage des Verzerrungsellipsoids mit dem gegebenen Punkt als Zentrum annimmt und daß irgend ein Tripel orthogonaler Durchmesser der Kugel in ein Tripel konjugierter Durchmesser des Ellipsoids übergeht.

## § 30. Anwendung auf die Kartographie.

Die Methoden dieses Kapitels würden sich auf das Problem der Landkartenkonstruktion anwenden lassen. Die aufzunehmende Fläche und das ebene kartographische Bild derselben bilden das Analogon zu einem Körper im unverzerrten und im verzerrten Zustand. Der Satz, daß die Verzerrung um einen Punkt merklich homogen ist, liefert den Satz, daß jedes kleine Stück der Landkarte ähnlich ist einer der orthographischen Projektionen des entsprechenden Stücks der Originalfläche. Das Analogon zu den Eigenschaften des Verzerrungsellipsoids findet sich in dem Satz, daß jedem kleinen Kreis auf der Originalfläche eine kleine Ellipse auf der Karte entspricht; sind die Abmessungen und die Lage der Ellipse, die in irgend einem Punkte ihr Zentrum hat, bekannt, so sind der Maßstab der Karte in der Nähe des Punktes und alle Längen-, Flächen- und Winkelverzerrungen bestimmt. Diese Sätze bilden die Grundlage der Theorie der Kartographie. [Vgl. Tissot, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Paris 1881].

## § 31. Bedingungen, denen die Verschiebung genügt.

Die Verschiebungskomponenten $u, v, w$ sind nicht völlig willkürliche Funktionen von $x, y, z$. Bei der vorhergehenden Auseinandersetzung wurde vorausgesetzt, daß sie jenen Differentiierbarkeits- und Stetigkeitsbedingungen unterworfen sind, welche die Gültigkeit des „Satzes vom totalen Differential[1]" sicherstellen. Für unsern Zweck drückt sich der Satz durch Gleichungen von folgender Art aus:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Außer dieser analytischen Beschränkung sind deren noch andere, die durch die Bedingung auferlegt werden, daß die Verschiebung als in einem kontinuierlichen Körper stattfindend gedacht werden kann. So würde z. B. eine Verschiebung, bei der jeder Punkt durch sein optisches Bild bezüglich einer Ebene ersetzt wird, ausgeschlossen sein. Ebenso würden Funktionen, die an irgend einer Stelle innerhalb des von dem Körper erfüllten räumlichen Bereichs unendlich werden, als Ausdruck für eine Verschiebungskomponente ausgeschlossen sein. Jede

1) Vgl. Harnack, *Introduction to the Calculus*, London 1891, p. 92.



analytisch mögliche Verschiebung, durch die die Länge irgend einer Linie auf null reduziert würde, ist gleichfalls auszuschließen. Somit haben wir es mit reellen Transformationen zu tun, die innerhalb eines gewissen räumlichen Bereichs folgende Eigenschaften besitzen: 1) Die neuen Koordinaten

$$(x + u,\ y + v,\ z + w)$$

sind stetige Funktionen der alten Koordinaten $(x, y, z)$ und unterliegen als solche dem Satze vom totalen Differential. 2) Die reellen Funktionen $u, v, w$ sind derart, daß die quadratische Funktion

$$(1 + 2\varepsilon_{xx})l^2 + (1 + 2\varepsilon_{yy})m^2 + (1 + 2\varepsilon_{zz})n^2 + 2\varepsilon_{yz}mn + 2\varepsilon_{zx}nl + 2\varepsilon_{xy}lm$$

definit und positiv ist. 3) Die mit $1 + \Delta$ bezeichnete Funktionaldeterminante ist positiv und verschwindet nicht.

Die Bedingung 3) sorgt dafür, daß der verzerrte Zustand so beschaffen ist, daß man ihn aus dem unverzerrten Zustand durch eine stetige Reihe kleiner reeller Verschiebungen ableiten kann. Es läßt sich zeigen, daß sie die Bedingung 2) mit umfaßt, wenn die Transformation reell ist. Vom geometrischen Gesichtspunkt aus kommt das auf die Bemerkung hinaus, daß, wenn das Volumen eines veränderlichen Tetraeders sich nicht auf null reduziert, keine seiner Kanten je zu null werden kann.

In dem besonderen Falle der homogenen Verzerrung sind die Verschiebungen lineare Funktionen der Koordinaten. Somit fallen alle homogenen Verzerrungen unter die linearen homogenen Transformationen. Die Bedingung 3) schließt dann solche Transformationen aus, die die Operation der Spiegelung an einer Ebene neben jenen Transformationen enthalten, welche sich durch eine stetige Reihe kleiner Verschiebungen erzielen lassen. Einige lineare homogene Transformationen, die der Bedingung 3) gehorchen, drücken Drehungen um Achsen aus, die durch den Ursprungspunkt gehen. Alle andern sind mit Verzerrung einer Linie verbunden. Bei der Erörterung homogener Verzerrungen und Drehungen wird es bequem sein, $(x + u, y + v, z + w)$ durch $(x_1, y_1, z_1)$ zu ersetzen.

## § 32. Endliche homogene Verzerrung.

Als Gleichungen, durch die die Koordinaten im verzerrten Zustand mit den Koordinaten im unverzerrten Zustand verknüpft sind, nehmen wir folgende:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1 + a_{11})\,x + a_{12}y + a_{13}z\,, \\ y_1 &= a_{21}x + (1 + a_{22})\,y + a_{23}z\,, \\ z_1 &= a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z\,. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die entsprechenden Verzerrungskomponenten sind durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{xx} = a_{11} + \frac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{yz} = a_{32} + a_{23} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \qquad (14)$$

Die in § 8 definierten Größen $e_{xx}, \ldots$ haben auch dann ihre Bedeutung, wenn die Verschiebungen nicht klein sind. Die hier benutzte Bezeichnungsweise können wir mit der von § 8 identifizieren, wenn wir statt der Ausdrücke

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{23} + a_{32},\ a_{31} + a_{13},\ a_{12} + a_{21},\ a_{32} - a_{23},\ a_{13} - a_{31},\ a_{21} - a_{12}$$

die Ausdrücke

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{zx},\ e_{xy},\ 2\varpi_x,\ 2\varpi_y,\ 2\varpi_z$$

schreiben. Bezeichnen wir den Radiusvektor vom Ursprung aus nach irgend einem Punkte $P$ oder $(x, y, z)$ mit $r$, so können wir die Verschiebung von $P$ auf die Richtung von $r$ projizieren und das Verhältnis dieser Verschiebungskomponente zur Länge $r$ ins Auge fassen. Dies Verhältnis sei gleich $E$. Wir können $E$ als *Elongation* des Materials in der Richtung $r$ definieren. Wir finden

$$E = \frac{1}{r}\left\{(x_1 - x)\frac{x}{r} + (y_1 - y)\frac{y}{r} + (z_1 - z)\frac{z}{r}\right\}; \qquad (15)$$

dies ist gleichbedeutend mit

$$Er^2 = e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + e_{yz}yz + e_{zx}zx + e_{xy}xy. \qquad (16)$$

Eine Fläche zweiten Grades, die man durch Gleichsetzen der rechten Seite dieser Gleichung mit einer Konstanten erhält, möge *Elongationsfläche* (engl. *elongation quadric*) genannt werden. Sie hat die Eigenschaft, daß die Elongation in beliebiger Richtung umgekehrt proportional ist dem Quadrat des in jene Richtung fallenden Radiusvektors vom Mittelpunkt aus. Im Falle sehr kleiner Verschiebung geht die Elongationsfläche in die früher (§ 11) besprochene Verzerrungsfläche über. Die in § 13, c) verzeichneten invarianten Ausdrücke hören nicht auf, invariant zu sein, wenn die Verschiebungen nicht klein sind.

Die durch (13) ausgedrückte Verschiebung läßt sich in zwei Teilverschiebungen auflösen. Der eine Teil leitet sich aus einem Potential ab, das gleich der Hälfte des rechts stehenden Gliedes von (16) ist; diese Verschiebung hat in jedem Punkte die Richtung der Normalen der Elongationsfläche, die durch den Punkt hindurchgeht. Der andere Teil läßt sich aus einem Vektorpotential

$$-\tfrac{1}{2}\left[\varpi_x(y^2 + z^2),\quad \varpi_y(z^2 + x^2),\quad \varpi_z(x^2 + y^2)\right] \qquad (17)$$

durch Bildung des Curls ableiten.

## § 33. Homogene reine Verzerrung.

Die Richtung einer durch den Ursprungspunkt gehenden Linie wird durch die Verzerrung nicht geändert, wenn die Koordinaten $x, y, z$ eines Punktes der Linie die Gleichungen befriedigen:

$$\frac{(1+a_{11})x+a_{12}y+a_{13}z}{x}=\frac{a_{21}x+(1+a_{22})y+a_{23}z}{y}=\frac{a_{31}x+a_{32}y+(1+a_{33})z}{z}. \quad (18)$$

Wird jede dieser Größen gleich $\lambda$ gesetzt, so ist $\lambda$ die Wurzel der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1+a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1+a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1+a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

Die Gleichung hat stets eine reelle Wurzel, so daß es stets eine Linie gibt, deren Richtung durch die Verzerrung ungeändert bleibt; ist die Wurzel positiv, so bleibt auch der Richtungs*sinn* der Linie ungeändert. Gibt es drei solcher Linien, so sind sie nicht notwendig orthogonal; falls sie aber aufeinander senkrecht stehen, sind sie nach Definition die Hauptachsen der Verzerrung. In diesem Falle heißt die Verzerrung *rein*. Es ist nicht überflüssig, eine förmliche Definition aufzustellen; wir sagen: Reine Verzerrung ist so beschaffen, daß die drei zueinander senkrechten Linien, die orthogonal bleiben, auch ihre Richtung nebst Richtungssinn beibehalten.

Wir können nachweisen, daß die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß die den Gleichungen (13) entsprechende Verzerrung rein sei, folgende sind: 1) Die quadratische Form auf der linken Seite von (20), unten, muß definit und positiv sein; 2) $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ müssen verschwinden. — Daß diese Bedingungen *hinreichend* sind, läßt sich wie folgt zeigen: Wenn $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ verschwinden, also $a_{23} = a_{32}, \ldots$, so ist die Gleichung (19) die Diskriminantengleichung der Fläche 2. Grades

$$(1+a_{11})x^2+(1+a_{22})y^2+(1+a_{33})z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = \text{const.}; \quad (20)$$

ist die linke Seite positiv, so hat die kubische Gleichung drei reelle, positive Wurzeln, welche den Gleichungen (18) gemäß drei reelle Richtungen bestimmen; diese Richtungen sind zueinander senkrecht, denn es sind die Richtungen der Hauptachsen der Fläche (20). Ferner bestimmen sie die Hauptachsen der Elongationsfläche

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = \text{const.}, \quad (21)$$

denn diese Fläche und (20) haben die Richtungen der Hauptachsen gemein.

Das Verschwinden von $\varpi_x$, $\varpi_y$ und $\varpi_z$ ist eine *notwendige* Be-

dingung dafür, daß die Verzerrung rein sei. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß die Gleichungen (13) eine reine Verzerrung darstellen und daß die Hauptachsen der Verzerrung die Achsen eines $(\xi, \eta, \zeta)$-Koordinatensystems bestimmen. Die Wirkung der Verzerrung besteht in der Überführung eines beliebigen Punktes $(\xi, \eta, \zeta)$ in den Punkt $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ derart, daß, wenn z. B. $\eta$ und $\zeta$ verschwinden, $\eta_1$ und $\zeta_1$ gleichfalls verschwinden. Bezogen auf die Hauptachsen müssen die Gleichungen (13) gleichwertig sein mit drei Gleichungen von der Form

$$\xi_1 = (1 + \varepsilon_1)\,\xi, \quad \eta_1 = (1 + \varepsilon_2)\,\eta, \quad \zeta_1 = (1 + \varepsilon_3)\,\zeta, \qquad (22)$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ gleich den Hauptdehnungen sind. Wir können die Koordinaten $\xi, \eta, \zeta$ durch $x, y, z$ mittels eines Substitutionskreuzes ausdrücken. Dies Kreuz laute

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $\eta$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $\zeta$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

Dann haben wir

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1\xi_1 + l_2\eta_1 + l_3\zeta_1 \\ &= (1+\varepsilon_1)\,l_1\,(l_1x + m_1y + n_1z) + (1+\varepsilon_2)\,l_2\,(l_2x + m_2y + n_2z) \\ &\qquad + (1+\varepsilon_3)\,l_3\,(l_3x + m_3y + n_3z). \end{aligned}$$

Mithin $\quad a_{12} = (1+\varepsilon_1)\,l_1m_1 + (1+\varepsilon_2)\,l_2m_2 + (1+\varepsilon_3)\,l_3m_3.$

Denselben Ausdruck würden wir für $a_{21}$ finden, und auf dieselbe Weise würden wir für die Koeffizientenpaare $a_{23}, a_{32}$ und $a_{31}, a_{13}$ identische Ausdrücke finden.

Aus dieser Auseinandersetzung geht hervor, daß eine homogene reine Verzerrung gleichwertig ist mit drei einfachen Dehnungen in drei zueinander senkrechten Richtungen. Diese Richtungen stimmen überein mit denen der Hauptachsen der Verzerrung.

## § 34. Zerlegung einer beliebigen homogenen Verzerrung in eine reine Verzerrung und eine Drehung.

Es leuchtet geometrisch ein, daß jede homogene Verzerrung in einem Körper durch eine geeignete reine Verzerrung, verbunden mit einer geeigneten Drehung, hervorgerufen werden kann. Um diese selbst zu ermitteln, können wir folgendermaßen vorgehen: Wenn wir die Verzerrungskomponenten gefunden haben, die der gegebenen Verzerrung entsprechen, können wir die Gleichung des reziproken Verzerrungs-

ellipsoids finden. Die Längen der Hauptachsen bestimmen die Hauptdehnungen, und die Richtungen dieser Achsen fallen zusammen mit denen der Hauptachsen der Verzerrung. Die gesuchte reine Verzerrung hat diese Hauptdehnungen und Hauptachsen und ist daher völlig bestimmt. Die gesuchte Drehung ist jene, durch die die Hauptachsen der gegebenen Verzerrung mit den Hauptachsen des Verzerrungsellipsoids zur Deckung gebracht werden. Nach § 28 führt diese Drehung drei zueinander senkrechte Linien von bekannter Lage in drei andere orthogonale Linien von bekannter Lage über. Winkel und Achse der gesuchten Drehung lassen sich daher durch eine wohlbekannte geometrische Konstruktion bestimmen. [Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 69.]

## § 35. Drehung.[1])

Wenn die Verzerrungskomponenten verschwinden, ist die durch § 32, (13) ausgedrückte Verschiebung eine Drehung um eine Achse, die durch den Ursprungspunkt geht. Wir wollen den Drehungswinkel gleich $\theta$ annehmen und voraussetzen, daß die Richtungskosinus $l, m, n$ der Achse so gewählt sind, daß die Drehung rechtshändig ist. Irgend ein Punkt $P$ $(x, y, z)$ bewegt sich auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt $(C)$ auf der Achse liegt, und gelangt in die Lage $P_1$ $(x_1, y_1, z_1)$. Es seien $\lambda, \mu, \nu$ die Richtungskosinus von $CP$ im Sinne von $C$ nach $P$ und $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ diejenigen von $CP_1$ im Sinne von $C$ nach $P_1$. Von $P_1$ werde das Lot $P_1N$ auf $CP$ gefällt. Die Richtungskosinus von $NP_1$ im Sinne von $N$ nach $P_1$ sind[2])

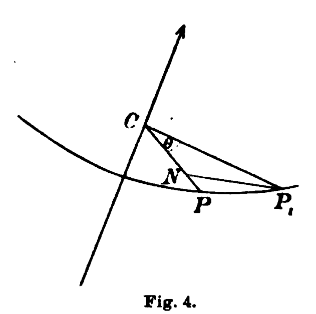


Fig. 4.

$$m\nu - n\mu, \quad n\lambda - l\nu, \quad l\mu - m\lambda.$$

Es seien $\xi, \eta, \zeta$ die Koordinaten von $C$. Dann genügen dieselben den Gleichungen

$$\frac{\xi}{l} = \frac{\eta}{m} = \frac{\zeta}{n},$$

$$l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0,$$

sodaß $\xi = l(lx + my + nz)$, und ähnliche Ausdrücke für $\eta, \zeta$.

Die Koordinaten von $P_1$ erhalten wir, indem wir die Projektion von $CP_1$ auf jede Koordinatenachse den Summen der Projektionen von $CN$ und $NP_1$ gleichsetzen. Projizieren wir auf die $x$-Achse, so finden wir, wenn wir die Länge von $CP$ oder $CP_1$ gleich $\varrho$ annehmen,

$$\lambda_1 \varrho = \lambda \varrho \cos\theta + (m\nu - n\mu)\varrho \sin\theta,$$

oder $$x_1 - \xi = (x - \xi)\cos\theta + \{m(z - \zeta) - n(y - \eta)\}\sin\theta,$$

oder $$x_1 = x + (mz - ny)\sin\theta - \{x - l(lx + my + nz)\}(1 - \cos\theta) \quad (23)$$

1) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 69, und Minchin, *Statics*, 3. Aufl., Oxford 1886, Bd. 2, p. 103.

2) Wir nehmen an, daß die Koordinatenachsen ein rechtshändiges System bilden.

Ähnliche Ausdrücke für $y_1$ und $z_1$ lassen sich nach Symmetrie niederschreiben.

Die Koeffizienten der linearen Transformation (13) werden in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= -(1-l^2)(1-\cos\theta), \\ a_{12} &= -n\sin\theta + lm(1-\cos\theta), \\ a_{13} &= \phantom{-}m\sin\theta + ln(1-\cos\theta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und die Rechnung zeigt, daß die Verzerrungskomponenten verschwinden, wie es sein muß.

## § 36. Einfache Dehnung.

Beim Beispiel der einfachen Dehnung, die durch die Gleichungen

$$x_1 = (1+e)\,x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

gegeben ist, verschwinden die Verzerrungskomponenten mit Ausnahme von $\varepsilon_{xx}$, und

$$\varepsilon_{xx} = e + \tfrac{1}{2}e^2.$$

Wir können die invariante Eigenschaft des reziproken Verzerrungsellipsoids anwenden, um die Komponenten einer Verzerrung zu finden, die in einer einfachen Dehnung vom Betrag $e$ und von der Richtung $l, m, n$ besteht. Wir würden finden

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{l^2} = \cdots = \cdots = \frac{\varepsilon_{yz}}{2mn} = \cdots = \cdots = e + \tfrac{1}{2}e^2.$$

Dieselbe Eigenschaft können wir anwenden, um die Bedingungen dafür zu ermitteln, daß eine durch sechs Komponenten gekennzeichnete Verzerrung eine einfache Dehnung sei. Diese Bedingungen gehen dahin, daß die Invarianten

$$\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \cdots + \cdots - \tfrac{1}{4}(\varepsilon^2_{yz} + \cdots + \cdots),$$

$$\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \tfrac{1}{4}(\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xx}\varepsilon^2_{yz} - \cdots - \cdots)$$

verschwinden müssen. Der Betrag der Dehnung drückt sich durch die verbleibende Invariante mittels der Formel $\sqrt{1 + 2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})} - 1$ aus, wobei für die Quadratwurzel der positive Wert zu nehmen ist. Zwei Wurzeln der kubischen Gleichung in $\varkappa$ [§ 26, (7)] sind gleich eins, und die dritte ist gleich $1 + 2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$. Die Richtung der Dehnung ist die Richtung $(l, m, n)$, die gegeben ist durch die Gleichungen

$$\frac{2\varepsilon_{xx}l + \varepsilon_{xy}m + \varepsilon_{zx}n}{2l} = \frac{\varepsilon_{xy}l + 2\varepsilon_{yy}m + \varepsilon_{yz}n}{2m} = \frac{\varepsilon_{zx}l + \varepsilon_{yz}m + 2\varepsilon_{zz}n}{2n}$$

$$= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

## § 37. Einfacher Schub.

Beim Beispiel des einfachen Schubs, der durch die Gleichungen

$$x_1 = x + sy, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

gegeben ist, sind die Verzerrungskomponenten gegeben durch die Gleichungen

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \tfrac{1}{2}s^2, \quad \varepsilon_{xy} = s.$$

Setzen wir $s = 2\operatorname{tg}\alpha$, so können wir zeigen, daß die beiden Hauptdehnungen, die nicht null sind, wie in § 3 durch die Gleichungen

$$1 + \varepsilon_1 = \sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha, \quad 1 + \varepsilon_2 = \sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

gegeben sind. Wir können beweisen, daß der Flächeninhalt einer Figur in der $(x, y)$-Ebene durch den Schub ungeändert bleibt und daß der Unterschied der beiden Hauptdehnungen gleich dem Betrag des Schubs ist. Ferner können wir zeigen, daß die Richtungen der Hauptachsen der Verzerrung durch die Halbierungslinien des Winkels $AOx$ in Fig. 2, § 5, gegeben sind und daß der Winkel, durch den die Hauptachsen gedreht werden, gleich dem Winkel $\alpha$ ist. Daher ist der einfache Schub gleichwertig mit einem „reinen Schub" und einer nachfolgenden Drehung durch einen Winkel $\alpha$, wie zuvor auseinandergesetzt.

Indem wir die in § 26 vermerkten Invarianten benutzen, können wir nachweisen, daß die Bedingungen dafür, daß eine Verzerrung mit gegebenen Komponenten $\varepsilon_{xx}, \ldots$ eine Schubverzerrung sei, so lauten:

$$2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 4(\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}) - (\varepsilon^2_{yz} + \varepsilon^2_{zx} + \varepsilon^2_{xy}) = 0$$

$$4\,\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}\varepsilon_{xy} - \varepsilon_{xx}\varepsilon^2_{yz} - \varepsilon_{yy}\varepsilon^2_{zx} - \varepsilon_{zz}\varepsilon^2_{xy} = 0$$

und daß der Betrag des Schubs gleich $\sqrt{2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}$ ist.

## § 38. Weitere Resultate aus der Theorie des Schubs.

Ein gutes Beispiel für Schub[1]) liefert eine Kugel, die aus parallel geschichteten kreisförmigen Karten aufgebaut ist. Wird jede Karte in ihrer eigenen Ebene verschoben, so daß die Linie der Mittelpunkte in eine zu den Kartenebenen schräg geneigte gerade Linie übergeht, so wird die Kugel zum Ellipsoid, und die Karten decken sich mit der einen Schar der Kreisschnitte des Ellipsoids. Eine lehrreiche Übung ist es, die Hauptachsen der Verzerrung und die Hauptdehnungen zu bestimmen.

Beachtenswert sind nachstehende Methoden[2]) zur Erzeugung einer beliebigen homogenen Verzerrung durch eine Folge von Operationen:

a) Jede derartige Verzerrung läßt sich erzeugen durch einen einfachen Schub der zu einer Achse senkrechten Ebenen parallel zu einer andern Achse, eine einfache Dehnung in der zu beiden Achsen senkrechten Richtung, eine gleichförmige Dilatation und eine Drehung.

---

1) Angegeben von Hrn. R. R. Webb. Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 122.

2) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.* Teil I, §§ 118 f.

b) Jede derartige Verzerrung läßt sich erzeugen durch drei einfache Schiebungen, deren jede in einem Schub der zu einer Achse senkrechten Ebenen parallel zu einer andern Achse besteht (wobei die drei Achsen rechtwinklig zueinander verlaufen), eine gleichförmige Dilatation und eine Drehung.

## § 39. Zusammensetzung von Verzerrungen.

Ein Körper, der einer homogenen Verzerrung unterworfen wurde, kann von neuem einer homogenen Verzerrung unterworfen werden; das Ergebnis ist ein Verschiebungszustand des Körpers, der sich im allgemeinen durch eine einzige homogene Verzerrung hätte herbeiführen lassen. Allgemeiner ausgedrückt, wenn ein beliebiges Aggregat von Punkten nacheinander durch zwei homogene lineare Transformationen umgeformt wird, so ist die resultierende Verschiebung gleichwertig mit dem Ergebnis einer einzigen linearen homogenen Transformation. Man kann diesen Satz auch so ausdrücken, daß man sagt, lineare homogene Transformationen bilden eine *Gruppe*. Die besonderen linearen homogenen Transformationen, mit denen wir es zu tun haben, sind den in § 31 festgelegten Bedingungen unterworfen und bilden eine *kontinuierliche Gruppe*. Die Drehungstransformationen, die in § 35 beschrieben wurden, bilden ebenfalls eine Gruppe; und diese Gruppe ist eine *Untergruppe*, die in der linearen homogenen Gruppe enthalten ist. Letztere Gruppe umfaßt auch alle homogenen Verzerrungen; diese aber bilden für sich keine Gruppe, denn zwei aufeinander folgende homogene Verzerrungen[1]) können mit einer Drehung gleichwertig sein

Das Ergebnis zweier sich folgenden linearen homogenen Transformationen läßt sich passend in der Bezeichnung durch Matrices ausdrücken. In dieser Bezeichnung würden die Transformationsgleichungen (13) geschrieben werden

$$(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 + a_{33} \end{pmatrix} (x, y, z), \qquad (25)$$

und in derselben Weise könnten die Gleichungen einer zweiten derartigen Transformation geschrieben werden

$$(x_2, y_2, z_2) = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 1 + b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1 + b_{33} \end{pmatrix} (x_1, y_1, z_1). \qquad (26)$$

1) Eine Transformation von der in § 32, (13) bezeichneten Art, die die Bedingung 3) von § 31 erfüllt, drückt eine Drehung aus, wenn alle Verzerrungskomponenten (14) verschwinden. In jedem andern Falle drückt sie eine homogene Verzerrung aus.

Bei der ersten Transformation wird ein Punkt $(x, y, z)$ durch $(x_1, y_1, z_1)$ ersetzt, und bei der zweiten wird $(x_1, y_1, z_1)$ durch $(x_2, y_2, z_2)$ ersetzt. Das Ergebnis der beiden Operationen ist, daß $(x, y, z)$ durch $(x_2, y_2, z_2)$ ersetzt ist; und wir haben

$$(x_2, y_2, z_2) = \begin{pmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 1 + c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 1 + c_{33} \end{pmatrix} (x, y, z), \tag{27}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= b_{11} + a_{11} + b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}, \\ c_{12} &= b_{12} + a_{12} + b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{31}a_{32}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Bezüglich dieses Resultates bemerken wir: 1) Die Transformationen sind im allgemeinen nicht vertauschbar; 2) das Ergebnis zweier sich folgenden reinen Verzerrungen ist im allgemeinen nicht wieder eine reine Verzerrung; 3) das Ergebnis zweier sich folgenden Transformationen, die mit kleinen Verschiebungen verknüpft sind, erhalten wir durch einfache Überlagerung, d. h. durch Addition der entsprechenden Koeffizienten. Das Resultat 2) läßt sich mit andern Worten ausdrücken durch den Satz, daß reine Verzerrungen keine Gruppe bilden.

## § 40. Weitere Resultate betreffend die Zusammensetzung von Verzerrungen.

Ist die Transformation (26) gleichwertig mit einer Drehung um eine Achse, sodaß ihre Koeffizienten die in § 35 angegebenen sind, so können wir zeigen, daß die Verzerrungskomponenten, die der Transformation (27) entsprechen, dieselben sind wie jene, die der Transformation (25) entsprechen, wie es nach geometrischem Augenschein sein muß.

In dem besonderen Falle, wo die Transformation (25) in einer auf die Hauptachsen bezogenen reinen Verzerrung besteht [sodaß $a_{11} = \varepsilon_1$, $a_{22} = \varepsilon_2$, $a_{33} = \varepsilon_3$ und die übrigen Koeffizienten gleich null], die Transformation (26) aber eine Drehung um eine Achse bedeutet [sodaß ihre Koeffizienten gleich den in § 35 angegebenen sind], sind die Koeffizienten der resultierenden Verzerrung durch Gleichungen folgender Art gegeben

$$\begin{aligned} 1 + c_{11} &= (1 + \varepsilon_1)\{1 - (1 - l^2)(1 - \cos\theta)\}, \\ c_{12} &= (1 + \varepsilon_2)\{\ -n \sin\theta + lm(1 - \cos\theta)\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Größen $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$, die dieser Verzerrung entsprechen, sind nicht Drehungskomponenten, da die Verschiebung nicht klein ist. Wir würden z. B. finden

$$2\varpi_x = c_{32} - c_{23} = 2l \sin\theta + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) l \sin\theta + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) mn(1 - \cos\theta).$$

Wir können das Resultat ableiten, daß, wenn die der Transformation (27) entsprechenden Verzerrungskomponenten verschwinden und die Bedingung 3) von § 31 erfüllt ist, die durch (27) ausgedrückte Transformation eine Drehung vom Betrage $\theta$ ist um eine Achse, die durch die Gleichungen

$$\frac{c_{32}-c_{23}}{l}=\frac{c_{13}-c_{31}}{m}=\frac{c_{21}-c_{12}}{n}=2\sin\theta$$

bestimmt ist.

Wir können zeigen, daß die Transformation, die ausgedrückt ist durch die Gleichungen

$$x_1=x-\varpi_z y+\varpi_y z,\quad y_1=y-\varpi_x z+\varpi_z x,\quad z_1=z-\varpi_y x+\varpi_x y,$$

eine homogene Verzerrung darstellt, die sich zusammensetzt aus einer gleichförmigen Dehnung aller zur Richtung $(\varpi_x:\varpi_y:\varpi_z)$ senkrechten Linien und einer Drehung um eine Gerade von dieser Richtung. Der Betrag der Dehnung ist $\sqrt{1+\varpi_x^2+\varpi_y^2+\varpi_z^2}-1$, und die Tangente des Drehwinkels ist gleich $\sqrt{\varpi_x^2+\varpi_y^2+\varpi_z^2}$.

Im allgemeinen Falle der Zusammensetzung von Verzerrungen können wir die resultierenden Verzerrungskomponenten in den Verzerrungskomponenten der Teilverzerrungen und den Koeffizienten der Transformationen auszudrücken suchen. Bezeichnen wir die zu (25), (26), (27) gehörigen Verzerrungskomponenten bezüglich mit

$$(\varepsilon_{xx})_a,\ldots\varepsilon_{x_1x_1},\ldots(\varepsilon_{xx})_c,\ldots,$$

so finden wir Formeln folgender Art

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{xx})_c=(\varepsilon_{xx})_a&+(1+a_{11})^2\varepsilon_{x_1x_1}+a_{21}^2\varepsilon_{y_1y_1}+a_{31}^2\varepsilon_{z_1z_1}\\&+a_{21}a_{31}\varepsilon_{y_1z_1}+(1+a_{11})a_{31}\varepsilon_{z_1x_1}+(1+a_{11})a_{21}\varepsilon_{x_1y_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{yz})_c=(\varepsilon_{yz})_a&+2a_{12}a_{13}\varepsilon_{x_1x_1}+2(1+a_{22})a_{23}\varepsilon_{y_1y_1}+2(1+a_{33})a_{32}\varepsilon_{z_1z_1}\\&+\{(1+a_{22})(1+a_{33})+a_{23}a_{32}\}\varepsilon_{y_1z_1}+\{(1+a_{33})a_{12}+a_{32}a_{13}\}\varepsilon_{z_1x_1}\\&+\{(1+a_{22})a_{13}+a_{12}a_{23}\}\varepsilon_{x_1y_1}.\end{aligned}$$

## Kapitel II.

## Analyse der Spannung.

§ 41. Unter Spannung im allgemeinen (engl. *stress*) versteht man einfach den Inbegriff der im Gleichgewicht stehenden Wirkung und Gegenwirkung zwischen zwei Teilen eines Körpers, während die Kraft, die der eine Teil auf den andern ausübt, sozusagen eine Spannung in einseitiger Auffassung vorstellt.[1]) Ein bekanntes Beispiel ist Zug in einem Stabe; der Teil des Stabes, der auf der einen Seite eines beliebigen Normalschnitts liegt, übt über den Querschnitt auf den andern Teil Zug aus. Ein anderes bekanntes Beispiel ist der hydrostatische Druck. In jedem Punkte im Innern einer Flüssigkeit wirkt auf jede durch den Punkt gehende Ebene ein gewisser Druck, und dieser Druck wird als Kraft pro Flächeneinheit in Rechnung gebracht. Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes in einem Punkte eines Körpers müßten wir die auf jede durch den Punkt gelegte Ebene wirkende Kraft pro Flächeneinheit kennen, und sowohl die Richtung der Kraft als auch ihre Größe würde anzugeben sein. Zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes in einem Körper müßten wir die Spannung in jedem Punkte des Körpers kennen. Gegenstand einer Analyse der Spannung ist also die Bestimmung der Größen, durch die die Spannung in einem Punkte gekennzeichnet wird.[2]) Wir werden in diesem Kapitel auch jene Folgerungen bezüglich der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung in einem Körper entwickeln, die unmittelbar aus der Analyse der Spannung sich ergeben.

### § 42. Spannung, die in einem Punkte auf ein Flächenelement wirkt.

Wir betrachten ein Flächenelement $S$, das in einer gegebenen Ebene liegt und einen Punkt $O$ eines Körpers enthält. Wir bezeichnen die in bestimmtem Sinne gezogene Normale der Ebene mit

1) Eine Erörterung über den Begriff der Spannung vom Standpunkt der „rationellen Mechanik" aus findet man in Bemerkung B am Ende dieses Buches.

2) Die Theorie der Kennzeichnung der Spannung wurde aufgestellt von Cauchy in dem Artikel „De la pression ou tension dans un corps solide" im Jahrgang 1827 der *Exercices de mathématiques*.

$\nu$ und richten unser Augenmerk auf die Kraft, die von jenem Teil des Körpers, der auf der von $\nu$ angezeigten Seite der Ebene liegt, auf den übrigen Teil durch die Ebene hindurch ausgeübt wird; diese Kraft ist nichts andres als eine Spannung in einseitiger Auffassung. Statisch möge die solcher Weise auf das besondere Flächenelement $S$ ausgeübte Kraft gleichwertig sein mit einer Kraft $R$, die in $O$ in bestimmter Richtung wirkt, und einem Kräftepaar $G$ um eine bestimmte Achse. Lassen wir nun das Flächenstück $S$ durch einen stetigen Prozeß zusammenschrumpfen und halten dabei den Punkt $O$ stets im Innern desselben fest, so streben die Kraft $R$ und das Moment $G$ der Grenze null zu, und die Richtung der Kraft strebt einer Grenzlage $(l, m, n)$ zu. Wir nehmen an, daß die Division der Anzahl der in der Kraft $R$ enthaltenen Krafteinheiten durch die Anzahl der im Flächenstück $S$ enthaltenen Flächeneinheiten eine Zahl $R/S$ ergibt, die einer von null verschiedenen Grenze $F$ zustrebt, und daß andererseits $G/S$ gegen null konvergiert. Wir definieren nun eine Vektorgröße durch die Richtung $(l, m, n)$, das numerische Maß $F$ und das Dimensionssymbol

$$(\text{Masse})\ (\text{Länge})^{-1}\ (\text{Zeit})^{-2}.$$

Diese Größe ist eine Kraft pro Flächeneinheit; wir nennen sie die auf das Flächenelement $\nu$ im Punkte $O$ wirkende *Spannung* schlechthin (engl. *traction*). Für die Projektionen dieses Vektors auf die Koordinatenachsen schreiben wir $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$. Die Projektion auf die Normale $\nu$ ist

$$X_\nu \cos(x, \nu) + Y_\nu \cos(y, \nu) + Z_\nu \cos(z, \nu).$$

Ist diese Komponente positiv, so bedeutet sie *Zug*; ist sie negativ, so bedeutet sie *Druck*. Ist $dS$ ein sehr kleines Stück der zu $\nu$ normalen Ebene im Punkte $O$, so wirkt jener Teil des Körpers, der auf der von $\nu$ angezeigten Seite der Ebene liegt, auf den jenseitigen Teil mit einer Kraft im Punkte $O$, die durch

$$(X_\nu dS, \quad Y_\nu dS, \quad Z_\nu dS)$$

gegeben ist; dies ist die *auf das Flächenelement $dS$ wirkende Spannung.*

Im Falle des in einer ruhenden Flüssigkeit herrschenden Drucks ist die Richtung $(l, m, n)$ des Vektors $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ stets genau entgegengesetzt der Richtung $\nu$. Bei bewegten zähen Flüssigkeiten und bei elastischen festen Körpern ist diese Richtung im allgemeinen irgendwie gegen $\nu$ geneigt.

## § 43. Oberflächenspannungen und Massenkräfte.

Wenn zwei Körper sich berühren, so ist, wie man annimmt, die Natur der Wechselwirkung zwischen den sich berührenden Oberflächen die gleiche wie die der Wechselwirkung zwischen zwei Teilen

desselben Körpers, die durch eine gedachte Oberfläche getrennt werden. Beginnen wir mit irgend einem Punkte $O$ im Innern des Körpers und irgend einer Richtung $\nu$, lassen wir ferner $O$ auf einen Punkt $O'$ der Oberfläche zurücken und $\nu$ mit der nach außen gerichteten Normalen dieser Fläche in $O'$ zusammenfallen, so streben $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ gewissen Grenzwerten zu, die gleich den Komponenten der *Oberflächenspannung* (engl. *surface traction*) in $O'$ sind; und $X_\nu dS$, $Y_\nu dS$, $Z_\nu dS$ sind die Kräfte, die auf das Oberflächenelement $dS$ von irgend einem Körper ausgeübt werden, der mit dem fraglichen Körper in der Umgebung des Punktes $O'$ in Berührung steht.

Außer den Spannungen an der Oberfläche wirken im allgemeinen noch andere Kräfte auf einen Körper bezw. auf jeden Teil des Körpers. Typisch für solche Kräfte ist die Schwerkraft; im allgemeinen sind derartige Kräfte den Massen der Teilchen, auf die sie wirken, proportional, und ferner sind sie nach Größe und Richtung durch die Lage dieser Teilchen im Kraftfelde bestimmt. Sind $X$, $Y$, $Z$ die Komponenten der Feldstärke in einem Punkte und $m$ die Masse des in dem Punkte befindlichen Teilchens, so sind $mX$, $mY$, $mZ$ die Feldkräfte, die auf das Teilchen wirken. Die Feldkräfte können von der Wirkung solcher Teilchen herrühren, die zum Körper selbst gehören, wie bei einem der eigenen Schwere unterworfenen Körper, oder auch von der Wirkung solcher Teilchen, die außerhalb des Körpers liegen, wie bei einem der anziehenden Gravitation eines andern Körpers unterworfenen System. In jedem Falle nennen wir sie *Massenkräfte* (engl. *body forces*).

## § 44. Die Bewegungsgleichungen.

Die Massenkräfte, die an irgend einem Teil eines Körpers angreifen, sind statisch gleichwertig mit einer Einzelkraft, die in einem Punkte angreift, zusammen mit einem Kräftepaar. Die den Achsen parallelen Komponenten der Einzelkraft sind

$$\iiint \varrho X dx dy dz, \quad \iiint \varrho Y dx dy dz, \quad \iiint \varrho Z dx dy dz,$$

wo $\varrho$ die Dichte des Körpers im Punkte $(x, y, z)$ ist und die Integration auf den von dem Körperteil erfüllten Raum sich erstreckt. Ebenso sind die Spannungen, die auf die Flächenelemente der Oberfläche des Teilbereichs wirken, gleichwertig mit einer resultierenden Kraft und einem Kräftepaar; die Komponenten der ersteren sind

$$\iint X_\nu dS, \quad \iint Y_\nu dS, \quad \iint Z_\nu dS,$$

wo die Integration über die Oberfläche des Teils erstreckt ist. Der Massenmittelpunkt des letzteren bewegt sich unter der Wirkung der beiden Resultanten wie ein materieller Punkt, denn es sind dies die einzigen *äußeren* Kräfte, die auf den Teil wirken. Ist nun $(f_x, f_y, f_z)$

die Beschleunigung des im Punkte $(x, y, z)$ zur Zeit $t$ befindlichen Massenteilchens, so sind die Bewegungsgleichungen des Teilbereichs gegeben durch drei Gleichungen von der Form[1])

$$\iiint \varrho f_x dx dy dz = \iiint \varrho X dx dy dz + \iint X_\nu dS, \tag{1}$$

wo die Raumintegration auf das Innere des betrachteten Bereichs und die Flächenintegration über die Oberfläche desselben sich erstreckt.

Andererseits sind die Gleichungen, die die Änderung des Moments der Bewegungsgröße des Körperteils bestimmen, gegeben durch drei Gleichungen von der Form

$$\iiint \varrho (y f_z - z f_y) dx dy dz = \iiint \varrho (y Z - z Y) dx dy dz$$
$$+ \iint (y Z_\nu - z Y_\nu) dS; \tag{2}$$

dabei kann, gemäß dem Satz[2]) von der Unabhängigkeit der Bewegung des Schwerpunkts und der Bewegung relativ zum Schwerpunkt, der Ursprung der Koordinaten $x, y, z$ im Schwerpunkt des betrachteten Teils angenommen werden.

Die obigen Gleichungen (1) und (2) sind die *Grundgleichungen der Bewegung für alle Körper*, für die der Begriff des Spannungszustandes zutrifft.

## § 45. Gleichgewicht.

Wenn ein Körper unter der Wirkung von Massenkräften und Oberflächenspannungen sich in Ruhe befindet, so unterliegen dieselben den Gleichgewichtsbedingungen, die aus den Gleichungen (1) und (2) hervorgehen, wenn die $f_x$, $f_y$, $f_z$ enthaltenden Glieder weggelassen werden. Wir erhalten so sechs Gleichungen, nämlich drei von der Form

$$\iiint \varrho X dx dy dz + \iint X_\nu dS = 0 \tag{3}$$

und drei von der Form

$$\iiint \varrho (y Z - z Y) dx dy dz + \iint (y Z_\nu - z Y_\nu) dS = 0. \tag{4}$$

Daraus folgt, daß, wenn die Massenkräfte und die Oberflächenspannungen willkürlich vorgeschrieben werden, kein Gleichgewicht herrscht.

In dem besonderen Falle, wo keine Massenkräfte wirken, ist Gleichgewicht nur möglich, wenn die Oberflächenspannungen sechs Gleichungen von der Form

$$\iint X_\nu dS = 0 \quad \text{und} \quad \iint (y Z_\nu - z Y_\nu)$$

befriedigen.

---

1) Die Form der Gleichung (1) nehmen die Gleichungen vom Typus $\Sigma m \ddot{x} = \Sigma X$ meiner *Theoretical Mechanics*, Kap. VI an, und in die Form der Gleichung (2) gehen die Gleichungen vom Typus $\Sigma m (y \ddot{z} - z \ddot{y}) = \Sigma y Z - z Y$ desselben Kapitels über.

2) *Theoretical Mechanics*, Kap. VI.

### § 46. Gesetz des Gleichgewichts der Oberflächenspannungen für kleine Bereiche.

Schon allein aus der Form der Gleichungen (1) und (2) können wir ein Resultat von großer Bedeutung ableiten. Der Raumteil, über den integriert wird, sei in allen Abmessungen sehr klein, und es bezeichne $l^3$ den Inhalt desselben. Dividieren wir beide Seiten von Gleichung (1) durch $l^2$ und gehen zur Grenze über, indem wir $l$ unbegrenzt abnehmen lassen, so erhalten wir die Gleichung

$$\lim_{l=0} l^{-2} \iint X_\nu dS = 0.$$

Nehmen wir ferner den Ursprungspunkt im Integrationsbereich an, so erhalten wir durch ein ähnliches Verfahren aus (2) die Gleichung

$$\lim_{l=0} l^{-3} \iint (y Z_\nu - z Y_\nu) dS = 0.$$

Der Inhalt der Gleichungen dieser Form läßt sich ausdrücken durch den Satz:

*Die Spannungen, die auf die Elemente der Oberfläche eines in allen Abmessungen sehr kleinen Bereichs eines Körpers wirken, bilden letztlich, in erster Annäherung, ein Gleichgewichtssystem von Kräften.*

### § 47. Kennzeichnung des Spannungszustandes in einem Punkte.

Durch jeden Punkt $O$ eines Körpers geht ein zweifach unendliches System von Ebenen, und die vollständige Beschreibung des Spannungszustandes in $O$ verlangt die Kenntnis der auf alle diese Ebenen in $O$ wirkenden Spannung. Wir können die im vorigen Paragraphen erhaltenen Resultate benutzen, um alle diese Spannungen auszudrücken durch die Spannungskomponenten, die auf die den Koordinatenebenen parallelen Flächenelemente wirken, und um gewisse Beziehungen zwischen diesen Komponenten abzuleiten. Wir bezeichnen die Spannung auf eine Ebene $x =$ const. durch ihre Vektorkomponenten $(X_x, Y_x, Z_x)$ und benutzen für die Spannung auf die Ebenen $y =$ const. und $z =$ const. die entsprechende Bezeichnung. Die großen Buchstaben geben die Richtung der Spannungskomponenten an, die Suffixe die Ebenen, auf die sie wirken. Was den Richtungssinn anbetrifft, so ist $X_x$ positiv, wenn es Zug bedeutet, negativ, wenn es Druck bedeutet. Denken wir uns die $x$-Achse senkrecht zur Zeichenebene aufwärts gezogen (vgl. Fig. 5) und legen die Zeichenebene so, daß sie durch $O$ hindurchgeht, so wird die fragliche Spannung von dem oberhalb der Zeichnung liegenden Teil des Körpers auf den unten gelegenen Teil ausgeübt.

Wir betrachten das Gleichgewicht eines tetraederförmigen Teils des Körpers, dessen eine Ecke in $O$ liegt, während die drei in dieser

Ecke zusammenstoßenden Kanten den Koordinatenachsen parallel sind. Die übrigen Ecken werden auf diesen Kanten von einer nahe an $O$ verlaufenden Ebene ausgeschnitten. Wir bezeichnen die Richtung der vom Tetraederinnern weg gerichteten Normale dieser Ebene mit $\nu$, sodaß ihre Richtungskosinus gleich $\cos(x, \nu)$, $\cos(y, \nu)$, $\cos(z, \nu)$ sind. Sei $\Delta$ der Inhalt der in dieser Ebene liegenden Tetraederfläche; die Inhalte der übrigen Flächen sind dann gleich

$$\Delta \cos(x, \nu), \quad \Delta \cos(y, \nu), \quad \Delta \cos(z, \nu).$$

Sind alle Kanten des Tetraeders klein, so können wir in erster Annäherung die über die Fläche $\nu$ resultierenden Spannungen gleich $X_\nu \Delta, \ldots$ annehmen, ebenso die auf die übrigen Flächen gleich $-X_x \Delta \cos(x, \nu), \ldots$. Die Summe der auf alle Tetraederflächen parallel $x$ wirkenden Spannungen kann gleich

$$X_\nu \Delta - X_x \Delta \cos(x, \nu) - X_y \Delta \cos(y, \nu) - X_z \Delta \cos(z, \nu)$$

gesetzt werden. Dividieren wir, in Übereinstimmung mit dem Verfahren des letzten Paragraphen, durch $\Delta$, so erhalten wir die erste der Gleichungen (5); auf ähnlichem Wege ergeben sich die beiden andern Gleichungen dieses Systems, und wir finden somit

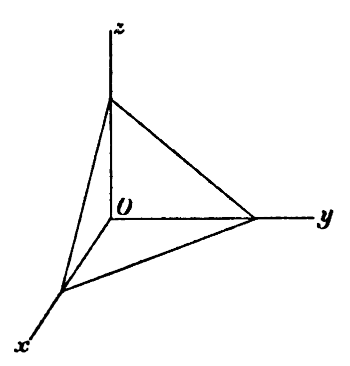


Fig. 5.

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + X_z \cos(z, \nu), \\ Y_\nu &= Y_x \cos(x, \nu) + Y_y \cos(y, \nu) + Y_z \cos(z, \nu), \\ Z_\nu &= Z_x \cos(x, \nu) + Z_y \cos(y, \nu) + Z_z \cos(z, \nu). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Mittels dieser Gleichungen ist die Spannung auf eine beliebige Ebene durch $O$ ausgedrückt durch die Spannungen auf die zu den Koordinatenebenen parallelen Flächenelemente. Durch diese Gleichungen sind auch die Spannungskomponenten, die in einem Punkt der Begrenzungsfläche eines Körpers auf die zu den Koordinatenebenen parallelen Flächenelemente wirken, verknüpft mit den Spannungen, die auf den Körper an der Oberfläche von einem andern ihn berührenden Körper ausgeübt werden.

Wir wollen andererseits einen sehr kleinen Würfel (Fig. 6) des Materials betrachten, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind. In erster Annäherung sind die auf den Würfel ausgeübten Spannungen, die über die zur $x$-Achse senkrechten Flächen resultieren, gleich $\Delta X_x$ $\Delta Y_x$, $\Delta Z_x$ für die auf Seite der wachsenden $x$ liegende Fläche und gleich $-\Delta X_x$, $-\Delta Y_x$, $-\Delta Z_x$ für die gegenüber liegende Fläche; dabei bedeutet $\Delta$ den Inhalt der Fläche. Ähnliche Ausdrücke

gelten für die andern Flächen. Der Wert von $\iint(yZ_\nu - zY_\nu)dS$ für den Würfel kann gleich $l\Delta(Z_y - Y_z)$ gesetzt werden, wo $l$ die Länge einer Kante. Durch das Verfahren des vorigen Paragraphen erhalten wir die erste der Gleichungen (6); auf ähnlichem Wege ergeben sich die beiden andern Gleichungen dieses Systems, und wir finden somit

$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y. \tag{6}$$

Durch die Gleichungen (6) wird die Zahl der Größen, die festgelegt sein müssen, wenn der Spannungszustand in einem Punkte bestimmt sein soll, auf sechs reduziert, nämlich drei Normalspannungen $X_x$, $Y_y$, $Z_z$ und drei Tangentialspannungen $Y_z$, $Z_x$, $X_y$. Diese sechs Größen heißen die *Komponenten des Spannungszustandes* oder kurz die *Spannungskomponenten* (engl. *components of stress*)[1]) in dem betreffenden Punkt.

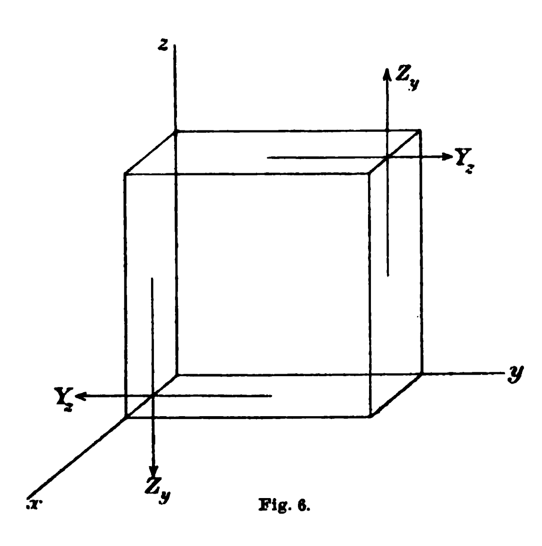


Fig. 6.

Man schreibt die sechs Spannungskomponenten zuweilen $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{zz}$, $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$. Eine derartige Bezeichnungsweise eignet sich besonders für den Fall, daß von den rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten von § 19 Gebrauch gemacht wird. Die sechs Spannungskomponenten in einem Punkte, bezogen auf die Normalen der Flächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, werden hiernach mit $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\beta\beta}$, $\widehat{\gamma\gamma}$, $\widehat{\beta\gamma}$, $\widehat{\gamma\alpha}$, $\widehat{\alpha\beta}$ bezeichnet.

## § 48. Spannungsmaß.

Der Spannungszustand in einem Körper ist bestimmt, wenn wir in jedem Punkte die Werte der sechs Spannungskomponenten kennen. Jede dieser Spannungskomponenten ist eine Spannung von der in § 42 beschriebenen Art, sodaß sie als Kraft pro Flächeneinheit gemessen wird. Das Dimensionssymbol einer Spannungskomponente ist also $ML^{-1}T^{-2}$.

---

1) Eine symmetrische Methode zur Kennzeichnung des Spannungszustande wurde von Lord Kelvin ausgearbeitet (§ 10 Fußnote). Das Verfahren läuft darauf hinaus, daß für die sechs Spannungskomponenten in einem Punkte der Zug pro Flächeneinheit auf jene sechs Ebenen gewählt wird, die bezüglich zu den sechs Kanten eines bestimmten Tetraeders senkrecht sind.

Eine Spannung wird dementsprechend gemessen durch so und so viel „Tonnen pro Quadratzoll“ oder so und so viel „Dynen pro Quadratzentimeter“, allgemein durch so und so viel Krafteinheiten pro Flächeneinheit. [Eine Tonne pro Quadratzoll $= 1 \cdot 545 \times 10^8$ Dynen pro Quadratzentimeter.]

Beispielsweise beträgt der Druck der Atmosphäre ungefähr $10^6$ Dynen pro Quadratzentimeter. Als Beispiel dafür, welche Spannungen von Ingenieuren für zulässig zu erklären sind, verzeichnen wir die Angabe W. C. Unwins[1]), wonach die Conwaybrücke täglich Spannungen bis zu 7 Tonnen pro Quadratzoll unterworfen ist.

## § 49. Transformation der Spannungskomponenten.

Da die Spannung, die in einem gegebenen Punkte auf eine beliebige Ebene wirkt, bestimmt ist, wenn die sechs Komponenten des Spannungszustandes in dem betreffenden Punkte gegeben sind, so muß es möglich sein, die auf irgend ein System bezogenen sechs Spannungskomponenten auszudrücken durch die auf ein anderes System bezogenen Komponenten. Die auf die $(x', y', z')$-Achsen bezogenen Spannungskomponenten seien mit $X'_{x'}, \ldots$ bezeichnet; ferner seien die neuen Koordinaten mit den alten verknüpft durch das Transformationskreuz

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y'$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z'$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

Dann zeigen die Gleichungen (5), daß die Spannungskomponenten auf die $x'$-Ebene (in der Richtung der $(x, y, z)$-Achsen) durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left.\begin{aligned} X_{x'} &= l_1 X_x + m_1 X_y + n_1 X_z, \\ Y_{x'} &= l_1 Y_x + m_1 Y_y + n_1 Y_z, \\ Z_{x'} &= l_1 Z_x + m_1 Z_y + n_1 Z_z. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ebenso haben wir, da die Spannung auf eine beliebige Ebene ein Vektor ist, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= l_1 X_{x'} + m_1 Y_{x'} + n_1 Z_{x'} \\ Y'_{x'} &= l_2 X_{x'} + m_2 Y_{x'} + n_2 Z_{x'} \\ Z'_{x'} &= l_3 X_{x'} + m_3 Y_{x'} + n_3 Z_{x'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

1) *The Testing of Materials of Construction,* London 1888, p. 9.

Substituieren wir aus (7) in (8) und berücksichtigen (6), so erhalten wir Formeln von dem Typus

$$\left.\begin{aligned} X'_{x'} &= l_1^2 X_x + m_1^2 Y_y + n_1^2 Z_z + 2 m_1 n_1 Y_z + 2 n_1 l_1 Z_x + 2 l_1 m_1 X_y, \\ X'_{y'} &= l_1 l_2 X_x + m_1 m_2 Y_y + n_1 n_2 Z_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) Y_z \\ &\quad + (n_1 l_2 + n_2 l_1) Z_x + (l_1 m_2 + l_2 m_1) X_y \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dies sind die Formeln für die Transformation von Spannungskomponenten.

## § 50. Die Spannungsfläche.

Wird die Gleichung der Fläche 2. Grades

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2 Y_z yz + 2 Z_x zx + 2 X_y xy = \text{const.} \quad (10)$$

durch eine orthogonale Substitution umgeformt, sodaß die linke Seite in eine Funktion von $x'$, $y'$, $z'$ übergeht, so werden, wie die Formeln (9) zeigen, die Koeffizienten von $x'^2, \cdots 2y'z', \cdots$ auf der linken Seite gleich $X'_{x'}, \cdots Y'_{z'} \cdots$.

Die Fläche 2. Grades (10) heißt die *Spannungsfläche* (engl. *stress quadric*). Sie hat die Eigenschaft, daß die Normalspannung auf irgend eine Ebene durch ihren Mittelpunkt umgekehrt proportional ist dem Quadrat jenes Radiusvektors der Fläche, der zu der Ebene normal ist. Wäre die Fläche auf ihre Hauptachsen bezogen, so würden die Tangentialspannungen auf die Koordinatenebenen verschwinden. Die Normalspannungen auf diese Ebenen heißen *Hauptspannungen* (engl. *principal stresses*). Wir erkennen, daß es in jedem Punkte eines Körpers drei zueinander senkrechte Ebenen gibt, auf welche eine rein normale Spannung wirkt. Diese heißen die *Hauptspannungsebenen* (engl. *principal planes of stress*). Wir erkennen auch, daß wir zur vollständigen Kennzeichnung des Spannungszustandes in einem beliebigen Punkte des Körpers die Lage der Hauptspannungsebenen und die Größe der Hauptspannungen kennen müssen; die auf irgend ein Tripel orthogonaler Ebenen bezogenen sechs Spannungskomponenten können wir dann dadurch ableiten, daß wir die Gleichung einer Fläche 2. Grades von einem Achsentripel auf ein anderes transformieren. Der Spannungszustand in einem Punkte kann als eine einzige gerichtete Größe aufgefaßt werden; diese Größe ist kein Vektor, sondern hat, ziemlich genau nach Art einer Verzerrung, sechs Komponenten.[1])

## § 51. Spannungsarten.

a) *Rein normale Spannung.*

Ist die Spannung auf jede Ebene in einem Punkte zur Ebene normal, so fehlen stets in der Gleichung der Spannungsfläche die Glieder, die die Produkte $yz$, $zx$, $xy$ enthalten, wie auch immer die rechtwinkligen Koordi-

1) In Voigts Sprache heißt sie ein Tensortripel. Vgl. § 14, b) oben.

natenachsen gewählt sein mögen. In diesem Falle kann man jedes Tripel zueinander senkrechter Linien, die durch den Punkt gehen, als Hauptachsen der Spannungsfläche ansehen Daraus folgt, daß die Fläche eine Kugel ist, daß also die normalen Spannungskomponenten sämtlich der Größe nach gleich und gleichen Zeichens sind. Sind sie positiv, so haben wir es mit einer um den Punkt herum allseitig gleichen Zugspannung zu tun. Sind sie negativ, so besteht die Spannung in einem Druck von der gleichen Eigenschaft.[1])

b) *Einfacher Zug oder Druck.*

Einfacher Zug oder Druck bedeutet einen Spannungszustand in einem Punkte, bei dem die Spannung auf *eine* durch den Punkt gehende Ebene normal zu dieser Ebene ist, während die Spannung auf irgend eine dazu senkrechte Ebene verschwindet. Die Gleichung der Spannungsfläche, bezogen auf die Hauptachsen, würde von der Form sein

$$X'_{x'} x'^2 = \text{const.},$$

sodaß die Spannungsfläche in ein zur Zug- oder Druckrichtung normales Ebenenpaar zerfällt. Die auf beliebige Koordinaten $x, y, z$ bezogenen Spannungskomponenten würden lauten

$$X_x = X'_{x'} l^2, \quad Y_y = X'_{x'} m^2, \quad Z_z = X'_{x'} n^2, \quad Y_z = X'_{x'} mn, \quad Z_x = X'_{x'} nl,$$
$$X_y = X'_{x'} lm,$$

wo $(l, m, n)$ die Richtung des Zugs oder Drucks und $X'_{x'}$ die Größe desselben bedeutet. Für Zug ist $X'_{x'}$ positiv, für Druck negativ.

c) *Schubspannung.*

Das durch die Gleichungen (6) ausgedrückte Resultat ist von den Richtungen der Koordinatenachsen unabhängig und kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Sind $l$ und $l'$ zwei zueinander rechtwinklige Linien, so ist die zu $l$ parallele Tangentialspannung auf eine zu $l'$ senkrechte Ebene gleich der zu $l'$ parallelen Tangentialspannung auf eine zu $l$ senkrechte Ebene. Daraus folgt, daß das Auftreten von Tangentialspannungen an einer beliebigen Ebene das Vorhandensein von Tangentialspannungen an einer dazu senkrechten Ebene in sich schließt. Das Wort *Schubspannung* (engl. *shearing stress*) braucht man, um den Spannungszustand in einem Punkte auszudrücken, der durch ein Paar von Tangentialspannungen auf zwei zueinander senkrechte Ebenen gekennzeichnet wird.

Wir können die Formeln von § 49 benutzen, um die entsprechenden Hauptspannungen und Hauptspannungsebenen zu bestimmen. Die Spannungsfläche sei gegeben durch $2 X'_{y'} x' y' = \text{const.}$, sodaß auf eine Ebene $y' = \text{const.}$ tangentiale Spannung parallel zur $x'$-Achse und auf eine Ebene $x' = \text{const.}$ die gleiche Tangentialspannung parallel zur $y'$-Achse wirkt.

1) Es ist dies ein Fundamentalsatz der rationellen Hydrodynamik. vgl. Lamb, *Hydrodynamics*, p. 2. Derselbe wurde zuerst von Cauchy bewiesen; siehe *Ency. d. math. Wiss.*, Bd. 4, Art. 15, p. 52.

Die $(x, y, z)$-Achsen seien die Hauptachsen des Spannungszustandes. Die Form $2X'_{y'}x'y'$ läßt sich schreiben

$$X'_{y'}\left\{\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2\right\},$$

und dieser Ausdruck müßte identisch sein mit

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2.$$

Wir haben daher

$$Z_z = 0, \quad X_x = -Y_y = X'_{y'};$$

somit finden wir, daß die Schubspannung gleichwertig ist mit Zug auf eine der Ebenen, die die Winkel zwischen den betreffenden beiden zueinander senkrechten Ebenen halbieren, und Druck auf die andere dieser Ebenen. Der Zug und der Druck sind dem absoluten Werte nach gleich groß, und zwar gleich dem Betrag der die Schubspannung ausmachenden Tangentialspannungen.

Das Diagramm (Fig. 7) veranschaulicht die Gleichwertigkeit der Schubspannung und der Hauptspannungen. Eine Schubspannung, die mit solchen Hauptspannungen gleichwertig ist, wie sie die Figur linker Hand zeigt, wird jedenfalls Schubverzerrungen hervorrufen, bei denen diejenigen Ebenen des Materials, die vor Anbringung der Spannung zur $y'$-Achse senkrecht waren, in einer zur $x'$-Achse parallelen Richtung gleiten, während die zur $x'$-Achse senkrechten Ebenen in einer zur $y'$-Achse parallelen Richtung gleiten. Schubspannung vom Typus $X_y$ wird also Schubverzerrung vom Typus $e_{xy}$ hervorrufen. [Siehe § 14, c).]

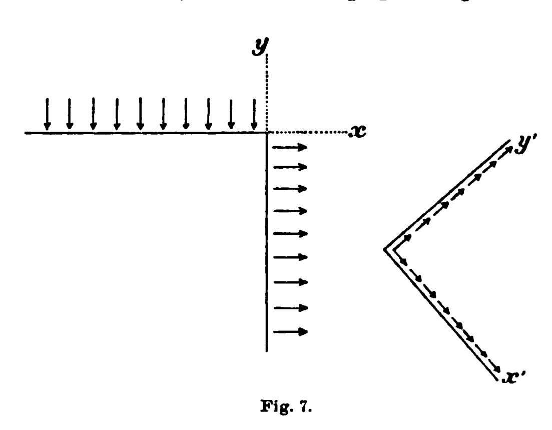


Fig. 7.

d) *Ebener Spannungszustand.*

Eine allgemeinere Spannungsart, die den einfachen Zug und die Schubspannung als besondere Fälle in sich schließt, erhält man durch die Annahme, daß *eine* Hauptspannung gleich null ist. Die Spannungsfläche ist dann ein Zylinder, der sich über einem Kegelschnitt als Basis erhebt, und letzteren kann man wohl den *Spannungskegelschnitt* nennen; seine Ebene enthält die Richtungen der beiden Hauptspannungen, welche nicht verschwinden. Nehmen wir diese Ebene zur $z$-Achse senkrecht an, so ist die Gleichung des Spannungskegelschnitts von der Form

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + 2X_y xy = \text{const.};$$

die Schubspannungen $Z_x$ und $Y_z$ sind null, ebenso der Zug $Z_z$. In dem besonderen Fall des einfachen Zugs besteht der Spannungskegelschnitt aus einem Parallellinienpaar, im Fall der Schubspannung ist es eine gleich

seitige Hyperbel. Ist es ein Kreis, so handelt es sich um allseitig gleichen Zug oder Druck in der Ebene des Kreises.

## § 52. Auflösung eines beliebigen Spannungssystems in gleichförmigen Zug und Schubspannung.

Die Größe $X_x + Y_y + Z_z$ ist invariant gegenüber Transformationen von einem rechtwinkligen Achsensystem auf ein anderes. Besteht das Spannungssystem in gleichförmigem normalen Druck vom Betrag $p$, so ist diese Größe gleich $-3p$. Im allgemeinen können wir die Größe $\frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z)$ die „mittlere Zugspannung in einem Punkte" nennen; wir können dann das Spannungssystem in Komponenten auflösen, die bezüglich durch das Verschwinden und Nichtverschwinden der mittleren Zugspannung gekennzeichnet sind. Zu diesem Zweck können wir setzen

$$X_x = \tfrac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z) + \tfrac{2}{3} X_x - \tfrac{1}{3}(Y_y + Z_z).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Dann verschwindet für das durch $\frac{2}{3} X_x - \frac{1}{3}(Y_y + Z_z), \ldots$ ausgedrückte Spannungssystem die mittlere Zugspannung. Dies System hat die Eigenschaft, daß die Summe der Hauptspannungen gleich null ist; und es ist möglich, rechtwinklige Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ so einzuführen, daß die den Koordinatenachsen entsprechenden Normalspannungen $X'_{x'}$, $Y'_{y'}$, $Z'_{z'}$ verschwinden. Demgemäß sind Spannungssysteme, bei denen die mittlere Zugspannung null ist, gleichwertig mit bloßen Schubspannungen in dem Sinne, daß sich drei zueinander senkrechte Ebenen finden lassen, auf die rein tangentiale Spannungen wirken. Daraus folgt, daß jedes Spannungssystem in einem Punkte gleichwertig ist mit Zug (oder Druck), der um den Punkt herum allseitig gleich ist, samt tangentialen Spannungen auf drei Ebenen, die einander rechtwinklig schneiden.

## § 53. Weitere Resultate.

Der Nachweis für folgende Resultate[1]) sei dem Lernenden zur Übung empfohlen:

1) Die Größen

$$X_x + Y_y + Z_z, \quad Y_y Z_z + Z_z X_x + X_x Y_y - Y_z^2 - Z_x^2 - X_y^2,$$

$$X_x Y_y Z_z + 2\, Y_z Z_x X_y - X_x Y_z^2 - Y_y Z_x^2 - Z_z X_y^2$$

sind gegenüber rechtwinkliger Koordinatentransformation invariant.

2) Sind $X_x$, $Y_y$, $Z_z$ Hauptspannungen, so ist die Spannung auf irgend

1) Die Resultate 1) — 5) verdankt man Cauchy und Lamé.

eine Ebene proportional dem Lot, das auf die zu ihr parallele Tangentialebene des Ellipsoids

$$x^2/X_x^2 + y^2/Y_y^2 + z^2/Z_z^2 = \text{const.}$$

vom Mittelpunkt aus gefällt wird.

Es ist dies das Lamésche *Spannungsellipsoid*. Die reziproke Fläche wurde von Cauchy diskutiert; der Radiusvektor derselben, der vom Mittelpunkt aus in irgend einer Richtung gezogen wird, ist umgekehrt proportional der Spannung auf die zu dieser Richtung senkrechte Ebene.

3) Die Fläche 2. Grades $x^2/X_x + y^2/Y_y + z^2/Z_z = \text{const.}$ (wo $X_x, \dots$ Hauptspannungen), Lamésche *Spannungsrichtfläche* genannt, ist zur Spannungsfläche in bezug auf den Mittelpunkt reziprok; der Radiusvektor, der vom Mittelpunkt nach irgend einem Punkt der Oberfläche gezogen wird, liegt in der Richtung der Spannung, die auf eine zur Tangentialebene in dem Punkte parallele Ebene wirkt.

4) Die Ebenen, auf die in einem Punkte keine Normalspannung wirkt, umhüllen einen Kegel 2. Grades, der zu dem Asymptotenkegel der Spannungsfläche in dem Punkte reziprok ist. Wenn er reell ist, trennt er die Ebenen, auf die als Normalspannung Zug wirkt, von denen, auf welche Druck wirkt; ist er imaginär, so wirkt als Normalspannung auf alle Ebenen entweder Zug oder Druck, je nachdem die mittlere Zugspannung $\frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z)$ positiv oder negativ ist.

5) Zieht man in einem im Spannungszustande befindlichen Körper von einem Punkte aus zwei beliebige Linien $x$ und $x'$ und legt durch den Punkt die zu diesen senkrechten Ebenen, so ist die zu $x'$ parallele Komponente der Spannung auf die zu $x$ senkrechte Ebene gleich der zu $x$ parallelen Komponente der Spannung auf die zu $x'$ senkrechte Ebene.

Dieser Satz, der sich durch die Gleichung $x'_x = x_{x'}$ ausdrücken läßt, ist eine Verallgemeinerung der Formeln (6), § 47.

6) Maxwells elektrostatisches Spannungssystem.[1])

Sei $V$ das Potential eines Systems elektrischer Ladungen, und sei ein Spannungssystem durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$X_x = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}, \quad Y_z = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$Y_y = \frac{1}{8\pi}\left\{-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}, \quad Z_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Z_z = \frac{1}{8\pi}\left\{-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}, \quad X_y = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Nimmt man die $x$-Achse parallel zu der in $(x, y, z)$ errichteten Normalen der durch diesen Punkt gehenden Äquipotentialfläche an, so läßt sich zeigen, daß in jedem Punkte die eine Hauptspannungsebene mit der Tangentialebene der durch diesen Punkt gehenden Potentialfläche zusammenfällt und daß die Spannung auf diese Ebene Zug vom Betrage $R^2/8\pi$ ist, während die Spannung auf irgend eine dazu senkrechte Ebene

1) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, 2. Aufl., Oxford 1881, vol. 1, ch. 5.

Druck vom gleichen Betrage ist; dabei ist $R$ die resultierende elektrische Kraft in dem betreffenden Punkte, sodaß

$$R^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

7) Sind $u, v, w$ die Komponenten einer beliebigen Vektorgröße und $X_x, \ldots$ die Komponenten eines beliebigen Spannungszustandes, so sind die drei Größen

$$X_x u + X_y v + Z_x w, \quad X_y u + Y_y v + Y_z w, \quad Z_x u + Y_z v + Z_z w$$

die Komponenten eines Vektors, d. h. sie transformieren sich von einem rechtwinkligen Achsensystem auf ein anderes durch dieselben Substitutionen wie $u, v, w$.

## § 54. Die Spannungsgleichungen der Bewegung und des Gleichgewichts.

In den Gleichungen vom Typus (1), § 44, führen wir für $X_\nu, \ldots$ ihre Werte aus den Gleichungen (5) ein. Wir erhalten dann für die Gleichung, die aus der Betrachtung der zur $x$-Achse parallelen Kraftkomponenten folgt,

$$\iiint \varrho f_x \, dx\,dy\,dz = \iiint \varrho X \, dx\,dy\,dz$$
$$+ \iint \{X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + X_z \cos(z, \nu)\} dS. \quad (11)$$

Auf das Oberflächenintegral wenden wir die Greensche Transformation[1]) an und transponieren; so erhalten wir die Gleichung

$$\iiint \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X - \varrho f_x\right) dx\,dy\,dz = 0. \quad (12)$$

In dieser Gleichung kann die Integration über einen beliebigen Raum innerhalb des Körpers erstreckt werden; daraus folgt, daß die Gleichung sich nicht befriedigen läßt, falls nicht der Integrand in jedem Punkte des Körpers verschwindet. Die entsprechenden Resultate würden sich durch Umformung der Gleichungen ergeben, die aus der Betrachtung der zur $y$- und $z$-Achse parallelen Kraftkomponenten folgen. Somit erhalten wir drei *Bewegungsgleichungen* von der Form

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X = \varrho f_x. \quad (13)$$

1) Darunter versteht man die Transformation, die durch die Gleichung ausgedrückt ist

$$\iint \{\xi \cos(x, \nu) + \eta \cos(y, \nu) + \zeta \cos(z, \nu)\} dS$$
$$= \iiint \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Wird der Körper im Gleichgewicht gehalten, so sind $f_x, f_y, f_z$ null, und die *Gleichgewichtsbedingungen* lauten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \varrho X = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

wo $Y_z, Z_x, X_y$ geschrieben ist statt der damit gleichwertigen $Z_y, X_z, Y_x$.

Bewegt sich der Körper so, daß die Verschiebung $(u, v, w)$ eines Teilchens stets sehr klein bleibt, so können wir statt $f_x, f_y, f_z$ setzen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

wobei die Zeit mit $t$ bezeichnet ist; die *Gleichungen der kleinen Bewegung* lauten daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \varrho X = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z = \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Andere Formen der Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen, die weniger unbekannte Größen enthalten, werden hernach abgeleitet werden. Obige Formen (14) und (15) bezeichnen wir zum Unterschied von jenen als die *Spannungsgleichungen.*

## § 55. Gleichförmige Spannung und gleichförmig veränderliche Spannung.

Wir bemerken, daß die statischen Spannungsgleichungen (14) im Innern eines Körpers und die Gleichungen (5) an seiner Begrenzung gelten, vorausgesetzt daß in letzteren Gleichungen $\nu$ die Richtung der äußeren Normalen der Begrenzungsfläche und $X_\nu, \ldots$ die Oberflächenspannungen bedeuten. Die Gleichungen können zur Bestimmung der Kräfte dienen, die an einem Körper angreifen müssen, um einen vorgegebenen Spannungszustand aufrecht zu erhalten.

Wenn die Spannungskomponenten von den Koordinaten unabhängig sind, d. h. wenn die Spannung in allen Punkten des Körpers die gleiche ist, so verschwinden die Massenkräfte. Mit andern Worten, gleichförmiger Spannungszustand kann nur durch Oberflächenspannungen allein erhalten werden.

Wir wollen zwei Fälle betrachten:

a) *Gleichförmiger Druck.* In diesem Fall haben wir

$$X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

wo $p$ der Druck, der nach Voraussetzung überall und in jedem Punkte nach allen Richtungen der gleiche ist. Die Oberflächenspannungen sind gleich den Komponenten eines auf die Oberfläche ausgeübten Druckes $p$, welche Gestalt der Körper auch haben mag. Daraus können wir schließen, daß im Innern eines Körpers, der konstantem, in allen Oberflächenpunkten gleichem Druck $p$ unterworfen ist und nicht unter dem Einfluß von Massenkräften steht, ein gewöhnlicher Druckzustand vom Betrage $p$ eintritt, der von irgend welchen Schubspannungen nicht begleitet ist.

b) *Einfacher Zug.* $T$ sei der Betrag des Zugs, die $x$-Achse seine Richtung. Wir haben dann $X_x = T$, und die übrigen Spannungskomponenten verschwinden. $T$ möge in allen Punkten denselben Wert haben. Die Oberflächenspannung ist in jedem Punkte zur $x$-Achse parallel gerichtet und vom Betrage $T \cos(x, \nu)$. Hat der Körper die Gestalt eines Zylinders oder Prismas mit in die $x$-Achse fallender Längsrichtung und von beliebiger Querschnittsform, so werden an den Enden Zugspannungen vom Betrage $T$ pro Flächeneinheit auftreten, auf die zylindrische Begrenzung dagegen werden keine Spannungen wirken. Daraus können wir schließen, daß im Innern eines Stabes, der an den Enden gleichförmigen entgegengesetzt gleichen Zugspannungen unterworfen ist und unter dem Einfluß keiner anderen Kräfte steht, ein Spannungszustand eintritt, bei dem auf die Normalschnitte in allen Punkten Zug vom gleichem Betrage wirkt.

Gleichförmige Spannung auf ein ebenes Flächenstück ist statisch gleichwertig mit einer Kraft, die im Schwerpunkt des Flächenstücks angreift. Die Kraft hat dieselbe Richtung wie die Spannung, ihre Größe wird gemessen durch das Produkt aus dem Inhalt des Flächenstücks und der Größe der Spannung.

Wenn die auf ein Flächenstück wirkende Spannung der Richtung nach gleichförmig, aber der Größe nach dem in gewissem Sinne gemessenen Abstand von einer bestimmten Geraden in der Ebene des Flächenstücks proportional ist, so haben wir ein Beispiel für *gleichförmig veränderliche Spannung.* Die Spannung auf das Flächenstück ist statisch gleichwertig mit einer Einzelkraft, die in einem gewissen Punkte der Ebene angreift; der letztere ist übrigens mit dem in Lehrbüchern der Hydrodynamik untersuchten „Druckzentrum" identisch. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die Linie verschwindender Spannung durch den Schwerpunkt des Flächenstücks geht; die auf dasselbe wirkende Spannung ist dann statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar. Schneidet die „Nulllinie" die Begrenzung des Flächenstücks nicht, so hat die Spannung in allen Punkten desselben dasselbe Vorzeichen; das Druckzentrum muß dann innerhalb einer gewissen den Schwerpunkt umgebenden Kurve liegen. Hat das Flächenstück die Gestalt eines Rechtecks und ist die Nulllinie der einen Seite parallel, so beträgt die größte Entfernung des Druckzentrums vom Schwerpunkt $1/6$ jener Seite. Es ist dies die „Regel des mittleren Drittels"[1]) der Ingenieure.

1) Ewing, *Strength of Materials.*

## § 56. Bemerkungen zu den Spannungsgleichungen.

a) Die Gleichungen von der Form (13) kann man erhalten, wenn man die Gleichungen vom Typus (1), § 44, auf ein kleines Parallelepiped anwendet, dessen Begrenzungsebenen den Koordinatenebenen parallel sind. Die Anteile, die die Flächen $x$ und $x + dx$ zu $\iint X_\nu dS$ liefern, kann man gleich $-X_x dy dz$ und gleich $\{X_x + (\partial X_x/\partial x)dx\} dy dz$ setzen, und entsprechende Ausdrücke kann man für die Anteile der übrigen Flächenpaare hinschreiben.

b) Die Momentengleichungen von der Form (2) werden bereits infolge der Gleichungen (6) befriedigt. In der Tat läßt sich (2) so schreiben:

$$\iiint\left\{y\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho Z\right)-z\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\varrho Y\right)\right\}dx dy dz$$

$$=\iiint\varrho(yZ - zY)dx dy dz$$

$$+\iint[y\{Z_x\cos(x,\nu)+Z_y\cos(y,\nu)+Z_z\cos(z,\nu)\}$$

$$-z\{Y_x\cos(x,\nu)+Y_y\cos(y,\nu)+Y_z\cos(z,\nu)\}]dS,$$

wenn man für $f_x, \ldots$ aus den Gleichungen von der Form (13) und für $Y_\nu$, $Z_\nu$ aus den Gleichungen (5) ihre Werte einführt. Mit Hilfe der Greenschen Transformation geht diese Gleichung über in

$$\iiint(Z_y - Y_z)dx dy dz = 0;$$

somit werden die Momentengleichungen vermöge der Gleichungen (6) identisch befriedigt. Man wird bemerken, daß man umgekehrt die Gleichungen (6) durch obige Rechnung anstatt der in § 47 benutzten beweisen könnte.

c) Wenn die Gleichungen (14) in allen Punkten eines Körpers befriedigt sind, so sind die Gleichgewichtsbedingungen für den als Ganzes genommenen Körper (§ 45) notwendig erfüllt, und die Resultante aller Massenkräfte, die auf die Volumelemente des Körpers wirken, hält der Resultante aller Spannungen, die auf die Elemente seiner Oberfläche wirken, das Gleichgewicht. Der gleiche Satz gilt für die resultierenden Momente der Massenkräfte und der Oberflächenspannungen.

d) Ein Beispiel, wo diese Bemerkung Anwendung findet, liefert das in § 53, 6) beschriebene Maxwellsche Spannungssystem. Wir würden z. B. finden

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_x}{\partial z}-\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

wo $\nabla^2$ für $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ steht. Daraus folgt, daß für jeden Bereich, in dem überall $\nabla^2 V = 0$, dies Spannungssystem für sich ein Gleichgewichtssystem bildet und daß dasselbe im allgemeinen von einer Massenkraft im Gleichgewicht gehalten wird, die durch

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

pro Volumeinheit gekennzeichnet ist. Daher sind die Spannungen über eine beliebige geschlossene Oberfläche, wie sie sich aus den Formeln für

$X_x, \ldots$ ergeben würden, statisch gleichwertig mit Massenkräften, die durch

$$\frac{1}{4\pi} \nabla^2 V \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \; \frac{\partial V}{\partial y}, \; \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

pro Volumeinheit des von der Fläche eingeschlossenen Raums gekennzeichnet sind.

e) *Spannungsfunktionen.* Bei unsern späteren Entwicklungen werden wir uns viel mit Körpern beschäftigen, die unter der Wirkung von Oberflächenkräften allein im Gleichgewichte sind. In diesem Falle gibt es also keine Massenkräfte und auch keine Beschleunigungen, und die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

andererseits sind die Oberflächenspannungen gleich den Werten von $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ an der Oberfläche des Körpers. Die Differentialgleichungen (16) stellen drei unabhängige Beziehungen zwischen den sechs Spannungskomponenten in jedem Punkte dar; mit ihrer Hilfe könnten wir diese sechs Größen durch drei unabhängige Funktionen des Orts ausdrücken. Derartige Funktionen würden wir „Spannungsfunktionen“ nennen. Solange wir, außer durch die Gleichungen (16), über den Zustand des Körpers nicht unterrichtet sind, sind diese Funktionen willkürliche Funktionen.

Ein Verfahren, die Spannungskomponenten durch Spannungsfunktionen auszudrücken, beruht auf dem Ansatz[1]):

$$Y_z = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial z}, \quad Z_x = -\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \partial x}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial y};$$

es ist klar, daß dann die Gleichungen (16) befriedigt werden, wenn

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x^2}, \quad Z_z = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2}.$$

Ein anderes Verfahren ist gegeben durch den Ansatz[2]):

$$X_x = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z \partial x}, \quad Z_z = \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y},$$

$$Y_z = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right), \quad Z_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right),$$

$$X_y = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right).$$

Diese Formeln lassen sich ohne weiteres verifizieren. Es ergibt sich, daß die Beziehungen zwischen den $\chi$-Funktionen und den $\psi$-Funktionen

1) Maxwell, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.* vol. 26 (1870) = *Scientific Papers*, vol. 2, p. 161. Der besondere Fall der ebenen Spannung wurde untersucht von G. B. Airy, *Brit. Assoc. Rep.* 1862.

2) G. Morera, *Rom, Acc. Lincei Rend.* (Ser. 5), t. 1 (1892). Die Beziehungen zwischen den beiden Systemen von Spannungsfunktionen wurden von Beltrami und Morera in demselben Bande untersucht.

dieselben sind wie diejenigen zwischen den Größen $e_{xx}, \ldots$ und den Größen $e_{yz}, \ldots$ in § 17.

## § 57. Graphische Darstellung der Spannungsverteilung.

Spannungszustände lassen sich auf verschiedene Weisen mit Hilfe von Diagrammen veranschaulichen, vollständige diagrammatische Darstellungen sind aber nicht leicht zu finden. Es gibt Fälle, wo die Größe und Richtung der Spannung in einem Punkt aus einer Zeichnung, die eine gewisse Kurvenschar wiedergibt, zu ersehen sind, gerade wie sich die magnetische Kraft mit Hilfe eines Diagramms von Kraftlinien ermitteln läßt. Solche Fälle sind jedoch selten; der wichtigste unter ihnen bezieht sich auf die Spannung in einem gedrillten Stabe.

Im Falle des ebenen Spannungszustandes in einem Körper, der von am Rande angebrachten Kräften gehalten wird, läßt sich durch Benutzung von zwei Diagrammen eine vollständige Darstellung der Spannung in einem Punkte erreichen.[1]) Die Spannung bestimmt sich mittels einer Spannungsfunktion $\chi$ so, daß

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \tag{17}$$

wobei die Ebene des Spannungszustandes die $(x, y)$-Ebene und $\chi$ eine Funktion von $x, y, z$ ist. Werden die Kurven $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \text{const.}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial y} = \text{const.}$ für denselben Wert von $z$ und für eine gleichmäßige Wertfolge der Konstanten gezeichnet, so sind die Spannungen, die auf die zur $(x, z)$- und $(y, z)$-Ebene parallelen Ebenen wirken, bezüglich längs der Tangenten der Kurven $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \text{const.}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial y} = \text{const.}$, die durch den Punkt gehen, gerichtet, und ihre Größe ist der Dichte der auf einander folgenden Kurven der betreffenden Schar proportional.

In Fällen, wo eine vollständige Darstellung durch graphische Hilfsmittel nicht zu erreichen ist, hat man sich zuweilen partieller Veranschaulichungen bedient. Dahin gehören die Zeichnungen und Modelle von den „Spannungslinien" oder „Spannungstrajektorien". Es sind dies Linien, deren Tangenten in jedem Punkte zu einer Hauptspannungsebene in dem Punkte senkrecht stehen. Durch jeden Punkt gehen drei solche Linien, die einander rechtwinklig schneiden. Diese Linien *können* unter Umständen eine dreifache orthogonale Flächenschar bestimmen, im allgemeinen aber existiert eine derartige Schar nicht. Existieren solche Flächen, so bezeichnet man sie als „isostatische Flächen[2])", und man kann, sobald sie bekannt sind, die Richtung der Hauptspannungen in jedem Punkte erschließen.

---

1) J. H. Michell, *Lond. Math. Soc. Proc.*, vol. 32 (1901).

2) Diese Flächen wurden zuerst von Lamé untersucht in *J. de Math.* (*Liouville*), t. 6 (1841) und *Leçons sur les coordonnées curvilignes.* Die Tatsache, daß sie im allgemeinen nicht existieren, wurde dargetan von Boussinesq, *Paris C. R.*, t. 74 (1872). Vgl. Weingarten, *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 90 (1881).

Spannungsverteilungen kann man auch mit Hilfe polarisierten Lichts studieren. Das Verfahren[1]) gründet sich auf die experimentelle Tatsache, daß ein durchscheinender isotroper Körper, der Spannungen erfährt, doppeltbrechend wird, so zwar, daß in jedem Punkte die optischen Hauptachsen in die Richtungen der Hauptachsen der Spannung in dem Punkte fallen.

## § 58. Spannungsgleichungen, bezogen auf krummlinige rechtwinklige Koordinaten.[2])

Zu den gesuchten Gleichungen können wir dadurch gelangen, daß wir den transformierten Ausdruck für $\iint X_\nu dS$ in der allgemeinen Gleichung (1), § 44, bestimmen. Wir haben nun, den Gleichungen (5) zufolge,

$$X_\nu = X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + X_z \cos(z, \nu)$$

oder, da

$$\cos(x, \nu) = \cos(\alpha, \nu)\cos(x, \alpha) + \cos(\beta, \nu)\cos(x, \beta) + \cos(\gamma, \nu)\cos(x, \gamma):$$

$$X_\nu = \{X_x \cos(x, \alpha) + X_y \cos(y, \alpha) + X_z \cos(z, \alpha)\}\cos(\alpha, \nu)$$

$$+ \text{ zwei ähnliche Ausdrücke}$$

$$= X_\alpha \cos(\alpha, \nu) + X_\beta \cos(\beta, \nu) + X_\gamma \cos(\gamma, \nu),$$

wo z. B. $X_\alpha$ die Spannung bezeichnet, die im Punkte $(\alpha, \beta, \gamma)$ in der Richtung $x$ auf die Tangentialebene der durch $(\alpha, \beta, \gamma)$ gehenden Fläche aus der $\alpha$-Schar wirkt. Nach § 53, 5) ist diese Spannung ebenso groß wie $\alpha_x$, d. h. wie die Spannung, die in diesem Punkte in der Richtung der Normalen der $\alpha$-Fläche auf die durch $(\alpha, \beta, \gamma)$ gehende Ebene $x =$ const. wirkt. Ferner haben wir, den Gleichungen (5) zufolge

$$\alpha_x = \widehat{\alpha\alpha}\cos(\alpha, x) + \widehat{\alpha\beta}\cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\alpha}\cos(\gamma, x).$$

Hinwieder ist $\cos(\alpha, \nu)\, dS$ die Projektion des (an irgend einer Stelle von $S$ gelegenen) Oberflächenelements $dS$ auf die Tangentialebene der $\alpha$-Fläche, die durch den Punkt hindurchgeht, und diese Projektion ist gleich $d\beta d\gamma / h_2 h_3$. Mithin

---

1) Das Verfahren rührt her von D. Brewster, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1816. Entwickelt wurde es von F. E. Neumann, *Berlin Abh.* 1841, und von Maxwell, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.*, vol. 20 (1853) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 30. In betreff einer neueren experimentellen Untersuchung s. J. Kerr, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 26 (1888). Nachzusehen ist auch M. E. Mascart, *Traité d'Optique*, t. 2 (Paris 1891), p. 229 ff.

2) Andere Methoden, diese Gleichungen abzuleiten, werden in Kapitel VII und in der Note über die Anwendungen beweglicher Achsen am Ende des Buches beschrieben werden.

$$\iint X_\nu dS = \iint \left\{ \widehat{\alpha\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\alpha\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\alpha} \cos(\gamma, x) \right\} \frac{d\beta d\gamma}{h_2 h_3}$$
$$+ \iint \left\{ \widehat{\alpha\beta} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \frac{d\gamma d\alpha}{h_3 h_1}$$
$$+ \iint \left\{ \widehat{\gamma\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \frac{d\alpha d\beta}{h_1 h_2}.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die Greensche Transformation an, so finden wir

$$\iint X_\nu dS = \iiint d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \widehat{\alpha\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\alpha\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\alpha} \cos(\gamma, x) \right\} \right] \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \widehat{\alpha\beta} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \right]$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \widehat{\gamma\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \right] \right\};$$

da aber das Volumelement durch $(h_1 h_2 h_3)^{-1} d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ gegeben ist, so folgern wir aus (1) die Gleichung

$$\varrho f_x = \varrho X + h_1 h_2 h_3$$
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \widehat{\alpha\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\alpha\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\alpha} \cos(\gamma, x) \right\} \right] \right.$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \widehat{\alpha\beta} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\beta} \cos(\beta, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \right]$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \widehat{\gamma\alpha} \cos(\alpha, x) + \widehat{\beta\gamma} \cos(\beta, x) + \widehat{\gamma\gamma} \cos(\gamma, x) \right\} \right] \right\}. \quad (18)$$

Die mit $(\alpha, x)$ bezeichneten Winkel ändern sich mit $\alpha, \beta, \gamma$, weil die Normalen der Flächen $\alpha = \text{const.}, \ldots$ sich von Punkt zu Punkt ändern. Es läßt sich zeigen[1]), daß für eine fest gewählte Richtung von $x$ die Differentialquotienten von $\cos(\alpha, x), \ldots$ durch neun Gleichungen von folgendem Typus gegeben sind:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \cos(\alpha, x) = - h_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_1} \right) \cdot \cos(\beta, x) - h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{h_1} \right) \cdot \cos(\gamma, x),$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta} \cos(\alpha, x) = \quad h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_2} \right) \cdot \cos(\beta, x),$$
$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \cos(\alpha, x) = \quad h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_3} \right) \cdot \cos(\gamma, x).$$

1) Siehe die Bemerkung über Anwendungen beweglicher Achsen am Schlusse dieses Buches. Im speziellen Falle zylindrischer Koordinaten lassen sich die entsprechenden Gleichungen unmittelbar ohne jegliche Schwierigkeit beweisen.

Wir lassen jetzt die Richtung der $x$-Achse zusammenfallen mit der der Normalen der Fläche $\alpha = \text{const.}$, die durch den Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ hindurchgeht. Nach Ausführung der Differentiation setzen wir

$$\cos(\alpha, x) = 1, \quad \cos(\beta, x) = 0, \quad \cos(\gamma, x) = 0.$$

Es sei $f_\alpha$ die Beschleunigungskomponente längs der Normalen der Fläche $\alpha = \text{const.}$ und $F_\alpha$ die Komponente der Massenkraft in derselben Richtung. Gleichung (18) geht dann über in

$$\begin{aligned} \varrho f_\alpha = \varrho F_\alpha &+ h_1 h_2 h_3 \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\widehat{\alpha\alpha}}{h_2 h_3} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\widehat{\alpha\beta}}{h_3 h_1} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\widehat{\gamma\alpha}}{h_1 h_2} \right) \\ &+ \widehat{\alpha\beta}\, h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + \widehat{\gamma\alpha}\, h_1 h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right) \\ &- \widehat{\beta\beta}\, h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right) - \widehat{\gamma\gamma}\, h_1 h_3 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Die beiden entsprechenden Gleichungen, die die Komponenten der Beschleunigung und der Massenkraft nach der Richtung der Normalen zu $\beta = \text{const.}$ und $\gamma = \text{const.}$ enthalten, sind der Symmetrie gemäß hinzuschreiben.

## § 59. Spezielle Fälle auf krummlinige Koordinaten bezogener Spannungsgleichungen.

1) Im Falle zylindrischer Koordinaten $r, \theta, z$ (vgl. § 22) lauten die Spannungensgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta}}{r} + \varrho F_r &= \varrho f_r, \\ \frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \widehat{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\widehat{r\theta}}{r} + \varrho F_\theta &= \varrho f_\theta, \\ \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rz}}{r} + \varrho F_z &= \varrho f_z. \end{aligned}$$

2) Im Falle des auf zylindrische Koordinaten bezogenen ebenen Spannungszustandes sind die Spannungskomponenten, ausgedrückt mittels der Spannungsfunktion $\chi$ der Gleichungen (17), durch die Gleichungen gegeben[1])

$$\widehat{rr} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \widehat{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right);$$

vorausgesetzt ist, daß das Gleichgewicht unter der Wirkung von Oberflächenspannungen allein besteht.

1) J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1899), p. 100.

3) Im Falle von Polarkoordinaten $r$, $\theta$, $\Phi$ lauten die Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \widehat{r\Phi}}{\partial \Phi} + \frac{1}{r}(2\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta} - \widehat{\Phi\Phi} + \widehat{r\theta}\cot\theta) + \varrho F_r = \varrho f_r,$$

$$\frac{\partial \widehat{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \widehat{\theta\Phi}}{\partial \Phi} + \frac{1}{r}\{(\widehat{\theta\theta} - \widehat{\Phi\Phi})\cot\theta + 3\widehat{r\theta}\} + \varrho F_\theta = \varrho f_\theta,$$

$$\frac{\partial \widehat{r\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{\theta\Phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \widehat{\Phi\Phi}}{\partial \Phi} + \frac{1}{r}\{3\widehat{r\Phi} + 2\widehat{\theta\Phi}\cot\theta\} + \varrho F_\Phi = \varrho f_\Phi.$$

4) Sind die Flächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ isostatisch, sodaß $\widehat{\beta\gamma} = \widehat{\gamma\alpha} = \widehat{\alpha\beta} = 0$, so lassen sich die Gleichungen in folgender Form[1]) schreiben:

$$h_1 \frac{\partial \widehat{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\beta\beta}}{\varrho_{13}} - \frac{\widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\gamma\gamma}}{\varrho_{12}} + \varrho F_\alpha = \varrho f_\alpha, \text{ usw.}$$

wo $\varrho_{12}$ und $\varrho_{13}$ die Hauptkrümmungsradien der Fläche $\alpha = \text{const.}$ sind, die bezüglich den Schnittkurven jener Fläche mit den Flächen $\beta = \text{const.}$ und $\gamma = \text{const.}$ entsprechen.

---

1) Lamé, *Coordonnées curvilignes,* p. 274.

# Kapitel III.

## Die Elastizität fester Körper.

§ 60. In den vorigen Kapiteln haben wir gewisse kinematische und dynamische Begriffe entwickelt, die für die theoretische Erörterung des physikalischen Verhaltens materieller Körper im allgemeinen unerläßlich sind. Wir haben jetzt auseinanderzusetzen, wie diese Begriffe auf elastische feste Körper im besonderen Anwendung finden.

Ein gewöhnlicher fester Körper ist dauernd Gravitationskräften unterworfen, und falls er sich im Gleichgewichte befindet, wird er von andern Kräften gestützt. Unsere Erfahrung kennt keinen Körper, der von jeglicher Wirkung äußerer Kräfte frei ist. Aus den Gleichungen von § 54 wissen wir, daß das Angreifen von Kräften an einem Körper das Vorhandensein eines *Spannungszustandes* in dem Körper bedingt.

Andererseits sind feste Körper nicht absolut starr. Lassen wir geeignete Kräfte an ihnen angreifen, so können wir sie sowohl der Größe wie der Gestalt nach verändern. Sind die hervorgerufenen Größen- und Gestaltänderungen beträchtlich, so nimmt der Körper im allgemeinen seine ursprüngliche Größe und Gestalt nicht wieder an, nachdem die Kräfte, die die Änderungen verursachten, aufgehört haben zu wirken. Wenn andererseits die Änderungen nicht allzu groß sind, so ist eine sichtlich vollständige Wiederherstellung des Anfangszustandes möglich. Diese Eigenschaft, die ursprüngliche Größe und Gestalt wieder anzunehmen, bezeichnet man als *Elastizität.* Die Größen- und Gestaltänderungen drückt man durch Angabe der *Verzerrungen* aus. Der „unverzerrte Zustand" (§ 4), auf den bei dieser Angabe Bezug genommen wird, spielt sozusagen bloß für die Rechnung die Rolle einer Null-Lage, deren Wahl man völlig in der Hand hat. Hat man den unverzerrten Zustand festgelegt und die Verzerrung im einzelnen gekennzeichnet, so ist die innere Konfiguration des Körpers bekannt.

Wir wollen annehmen, daß die Differentialquotienten der *Verschiebung* $(u, v, w)$, durch die der Körper aus dem unverzerrten Zustand in den verzerrten übergehen könnte, klein genug sind, um die Berechnung der Verzerrung nach den vereinfachten Methoden von

§ 9 zu gestatten; die Konfiguration werden wir als durch diese Verschiebung festgelegt ansehen.

Um einen Zustand des Körpers vollständig zu kennzeichnen, ist es notwendig, von jedem Teile die *Temperatur* sowohl wie die Konfiguration zu kennen. Eine Änderung der Konfiguration kann von Temperaturwechseln begleitet sein oder auch nicht.

## § 61. Arbeit und Energie.

Falls sich nicht der Körper unter der Wirkung der äußeren Kräfte im Gleichgewicht befindet, wird er sich aus der Konfiguration, die durch die betreffende Verschiebung festgelegt wird, in eine neue Konfiguration begeben, die durch eine etwas abweichende Verschiebung festzulegen wäre. Da der Körper aus einer Konfiguration in eine andere übergeht, werden die äußeren Kräfte (Massenkräfte und Oberflächenspannungen) im allgemeinen eine gewisse Arbeit leisten; und wir können den Betrag der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit, d. h. den Arbeits*effekt,* berechnen.

Ein Körper oder Teil eines Körpers kann auf mannigfache Arten Energie besitzen. Befindet er sich in Bewegung so besitzt er kinetische Energie, die von der Verteilung der Masse und Geschwindigkeit abhängt. Im Falle kleiner Verschiebungen, auf den wir unsere Auseinandersetzung beschränken wollen, drückt sich die kinetische Energie pro Volumeinheit mit hinreichender Annäherung durch die Formel aus

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\},$$

worin $\varrho$ die Dichte im unverzerrten Zustand bezeichnet. Außer der äußeren kinetischen Energie, die der Körper als Ganzes besitzt, findet sich in dem Körper Energie, die von seinem Zustand abhängt, nämlich von seiner Konfiguration und von der Temperatur seiner Teile. Diese Energie heißt „innere Energie"; sie ist von einem Grundzustand von bestimmter gleichmäßiger Temperatur und der Verschiebung null aus zu rechnen. Die Gesamtenergie eines Teils des Körpers ist gleich der Summe der kinetischen Energie dieses Teils und der inneren Energie desselben. Die Gesamtenergie des Körpers ist gleich der Summe der Gesamtenergien irgend welcher Teile[1]), in die man ihn zerlegt denken kann.

Geht der Körper aus einem Zustand in einen andern über, so ändert sich im allgemeinen die Gesamtenergie; aber die Änderung der Gesamtenergie ist im allgemeinen nicht gleich der Arbeit, die die

1) Für die Gültigkeit der Zerlegung der Energie in äußere kinetische Energie und innere Energie ist nötig, daß die Abmessungen der fraglichen *Teile* groß sind im Vergleich zu molekularen Dimensionen.

äußeren Kräfte dabei leisten. Um die Zustandsänderung zu bewirken, ist es im allgemeinen notwendig, Wärme dem Körper zuzuführen oder zu entziehen. Die Wärmemenge wird durch die ihr äquivalente Arbeit gemessen.

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre besagt, daß der Zuwachs der Gesamtenergie des Körpers gleich der Summe der von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit und der zugeführten Wärmemenge ist.

Wir können den Effekt der Arbeit der äußeren Kräfte berechnen. Der Effekt, den die Massenkräfte leisten, drückt sich aus durch die Formel

$$\iiint \varrho \left(X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx dy dz, \tag{1}$$

wo die Integration sich auf den Raum erstreckt, den der Körper im unverzerrten Zustand erfüllt. Der von den Oberflächenspannungen geleistete Effekt drückt sich aus durch die Formel

$$\iint \left(X_\nu \frac{\partial u}{\partial t} + Y_\nu \frac{\partial v}{\partial t} + Z_\nu \frac{\partial w}{\partial t}\right) dS,$$

wo die Integration über die Oberfläche des Körpers im unverzerrten Zustand erstreckt ist. Dieser Ausdruck läßt sich in ein Raumintegral umformen mit Hilfe der Greenschen Transformation und der Formeln vom Typus

$$X_\nu = X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + X_z \cos(z, \nu),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wir machen noch von den Sätzen von der Form $Y_z = Z_y$ und von der Bezeichnung für die Verzerrungskomponenten $e_{xx}, \ldots$ Gebrauch. Wir finden dann, daß der Effekt der Arbeit der Oberflächenspannungen sich durch die Formel ausdrückt.

$$\iiint \Big[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$+ \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\Big] dx dy dz$$
$$+ \iiint \Big[X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + Y_y \frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + Z_z \frac{\partial e_{zz}}{\partial t} + Y_z \frac{\partial e_{yz}}{\partial t} + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial t}$$
$$+ X_y \frac{\partial e_{xy}}{\partial t}\Big] dx dy dz. \tag{2}$$

Wir können auch das Verhältnis, in dem die kinetische Energie zunimmt, berechnen. Dies Verhältnis drückt sich mit hinreichender Annäherung durch die Formel aus

$$\iiint \varrho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right) dx dy dz, \tag{3}$$

wo die Integration sich auf den Raum erstreckt, den der Körper im unverzerrten Zustand erfüllt. Benutzen wir die Bewegungsgleichungen (15), § 54, so können wir diesen Ausdruck in der Form schreiben

$$\iiint\left(\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \cdots + \cdots\Big]\,dx\,dy\,dz.$$

Daraus erhellt, daß der Ausdruck

$$\iiint\Big[X_x\frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + Y_y\frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + Z_z\frac{\partial e_{zz}}{\partial t} + Y_z\frac{\partial e_{yz}}{\partial t} + Z_x\frac{\partial e_{zx}}{\partial t} + X_y\frac{\partial e_{xy}}{\partial t}\Big]\,dx\,dy\,dz \qquad (4)$$

den Überschuß des Effekts der äußeren Kräfte über die Zunahme der kinetischen Energie in der Zeiteinheit darstellt.

## § 62. Existenz der Verzerrungsenergie-Funktion.

Es bezeichne nun $\delta T_1$ den Zuwachs der kinetischen Energie pro Volumeinheit, der auf den kurzen Zeitabschnitt $\delta t$ kommt. $\delta U$ sei der Zuwachs der inneren Energie pro Volumeinheit, der auf denselben Zeitabschnitt kommt. Ferner sei $\delta W_1$ die Arbeit, die von den äußeren Kräften in dieser Zeit geleistet wird, und $\delta Q$ das mechanische Äquivalent der während derselben zugeführten Wärme. Dann drückt sich der erste Hauptsatz der Wärmelehre durch die Formel aus

$$\iiint(\delta T_1 + \delta U)\,dx\,dy\,dz = \delta W_1 + \delta Q. \qquad (5)$$

Gemäß dem in § 61 erhaltenen Schlußresultat (4) haben wir nun

$$\delta W_1 - \iiint\delta T_1\,dx\,dy\,dz = \iiint(X_x\delta e_{xx} + Y_y\delta e_{yy} + Z_z\delta e_{zz} + Y_z\delta e_{yz} + Z_x\delta e_{zx} + X_y\delta e_{xy})\,dx\,dy\,dz \qquad (6)$$

wo $\delta e_{xx}, \ldots$ die Zuwachse der Verzerrungskomponenten im Zeitabschnitt $\delta t$ darstellen. Daher haben wir

$$\iiint\delta U\,dx\,dy\,dz = \delta Q + \iiint(X_x\delta e_{xx} + \cdots)\,dx\,dy\,dz. \qquad (7)$$

Die Differentialgröße $\delta U$ ist das Differential einer Funktion $U$, d. h. einer einwertigen Funktion der Temperatur und der Größen, die die Konfiguration bestimmen. Der Wert dieser Funktion $U$, der einem bestimmten Zustande entspricht, bildet das Maß für die in diesem Zustande vorhandene innere Energie. Im Grundzustande ist der Wert von $U$ null

Wenn die Zustandsänderung adiabatisch stattfindet, d. h. so, daß von jedem Element des Körpers Wärme weder aufgenommen noch abgegeben wird, so verschwindet $\delta Q$, und wir haben

$$\delta U = X_x\delta e_{xx} + Y_y\delta e_{yy} + Z_z\delta e_{zz} + Y_z\delta e_{yz} + Z_x\delta e_{zx} + X_y\delta e_{xy}. \qquad (8)$$

In diesem Falle ist also der Ausdruck rechts ein exaktes Differential; und es existiert eine Funktion $W$, die die in folgenden Gleichungen ausgesprochenen Eigenschaften besitzt:

$$X_x = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \dots \; Y_z = \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, \dots \tag{9}$$

Die Funktion $W$ stellt die potentielle Energie pro Volumeinheit dar, die in dem Körper durch die Verzerrung aufgespeichert ist; ihre Variationen sind, wenn der Körper adiabatisch verzerrt wird, identisch mit denjenigen der inneren Energie des Körpers. Wahrscheinlich sind die Änderungen, die in Körpern stattfinden, die kleine und sehr schnelle Schwingungen ausführen, praktisch genommen adiabatisch.

Eine Funktion, die die durch die Gleichungen (9) ausgedrückten Eigenschaften besitzt, heißt „Verzerrungsenergie-Funktion" (engl. „strain-energy-function").

Findet die Zustandsänderung isotherm statt, d. h. so, daß die Temperatur jedes Elements des Körpers konstant bleibt, so existiert gleichfalls eine Funktion $W$, die die in den Gleichungen (9) ausgesprochenen Eigenschaften besitzt. Um dies zu beweisen, machen wir von dem zweiten Hauptsatz der Wärmelehre in der Form Gebrauch, die besagt, daß bei jedem umkehrbaren Kreisprozeß, der ohne Temperaturänderung vor sich geht, die Summe der Elemente $\delta Q$ verschwindet.[1]) Die Summe der Elemente $\delta U$ verschwindet ebenfalls; daraus folgt, daß auch die Summe der Elemente, die sich durch die Formel ausdrückt

$$\Sigma(X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}),$$

bei einem umkehrbaren Kreisprozeß ohne Temperaturänderung verschwindet. Somit ist der Differentialausdruck

$$X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}$$

ein exaktes Differential, und die Verzerrungsenergie-Funktion existiert.

Wenn ein Körper langsam durch allmähliche Steigerung der Belastung verzerrt wird und dabei mit den umgebenden Körpern in ständigem Temperaturgleichgewicht sich befindet, so sind die Zustandsänderungen praktisch genommen isotherm.

## § 63. Mittelbare Bedeutung der experimentellen Ergebnisse.

Als Ziel der experimentellen Untersuchungen über das Verhalten elastischer Körper kann man die Auffindung zahlenmäßiger Beziehungen zwischen den in Betracht kommenden meßbaren Größen bezeichnen, die hinreichend variiert werden und zahlreich genug sein müssen, um als Grundlage für die induktive Bestimmung der Form der die innere Energie darstellenden Funktion, d. h. der Funktion $U$ von § 62, zu

1) Vgl. Kelvin, *Math. and Phys. Papers*, vol. 1, p. 291.





dienen. Dies Ziel wurde bisher nur bei Gasen vollständig erreicht, deren Zustand vom kritischen Zustand weit entfernt ist. Im Falle elastischer fester Körper sind die Verhältnisse viel verwickelter und die Ergebnisse des Experiments viel dürftiger; und die bisherigen Ansätze reichen für die Aufstellung einer Theorie des physikalischen Verhaltens eines festen Körpers unter solchen Umständen, wo eine Verzerrungsenergie-Funktion nicht existiert, nicht aus.

Wenn eine solche Funktion existiert und ihre Form bekannt ist, so können wir aus ihr die Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten und den Verzerrungskomponenten ableiten; und umgekehrt, wenn irgend welche experimentellen Ergebnisse uns in den Stand setzen, derartige Beziehungen zu erschließen, so gewinnen wir dadurch bestimmte Daten, die zur Aufstellung der Funktion dienen können.

Die Spannungs- oder Verzerrungskomponenten in einem Körper lassen sich der Natur der Sache nach niemals direkt messen. Sollen sich ihre Werte bestimmen lassen, so kann dies nur durch ein Schlußverfahren geschehen, das sich auf die Messung von Größen stützt, die im allgemeinen nicht die Bedeutung von Spannungs- oder Verzerrungskomponenten haben.

Es lassen sich Instrumente ersinnen, mit denen durchschnittliche Verzerrungen in Körpern von gewöhnlicher Größe gemessen werden, oder solche, mit denen besondere Verzerrungen kleiner Oberflächenbereiche gemessen werden. Z. B. läßt sich die mittlere kubische Kompression mittels eines Piezometers messen; die Dehnung eines kurzen Stücks einer Längsfaser auf der Außenseite eines Stabes kann mittels eines Extensometers gemessen werden. Zuweilen, wie z. B. bei Drillungs- und Biegungsexperimenten, mißt man eine Verschiebung.

Äußere Kräfte, die an einem Körper angreifen, lassen sich oft mit großer Genauigkeit messen, beispielsweise wenn ein Stab dadurch gedehnt oder gebogen wird, daß am einen Ende ein Gewicht angehängt wird. In solchen Fällen ist es eine resultierende Kraft, die man direkt mißt, nicht die Spannungskomponenten pro Flächeneinheit, die an der Oberfläche des Körpers angebracht sind. Im Falle eines unter normalem Druck stehenden Körpers, wie er bei den Experimenten mit dem Piezometer vorliegt, kann der Druck pro Flächeneinheit gemessen werden.

Bei jedem Experiment, das zur Ermittlung einer Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung dienen soll, wird an einem teilweise befestigten Körper eine gewisse Verschiebung dadurch hervorgebracht, daß bestimmte, dem Betrage nach zu variierende Kräfte angebracht werden. Die Gesamtheit dieser Kräfte bezeichnen wir als „die Last“ (engl. „the load“).

## § 64. Das Hookesche Gesetz.

Die meisten festen Körper weisen eine der Form nach gleiche Beziehung zwischen Last und meßbarer Verzerrung auf. Man hat

gefunden, daß innerhalb weiter Belastungsgrenzen die gemessene Verzerrung der Last proportional ist. Dieser Satz mag ausführlicher so ausgedrückt werden:

1) wenn die Last zunimmt, wächst die gemessene Verzerrung im gleichen Verhältnis,

2) wenn die Last abnimmt, nimmt die gemessene Verzerrung im gleichen Verhältnis ab,

3) wenn die Last auf null gebracht wird, ist keine Verzerrung meßbar.

Die auffälligste Ausnahme zu diesem Satz bildet das Verhalten gegossener Metalle. Es erscheint unmöglich, irgend einen endlichen Belastungsbereich abzugrenzen, innerhalb dessen die meßbaren Verzerrungen derartiger Metalle in demselben Verhältnis wie die Last wachsen und abnehmen.

Die experimentellen Ergebnisse, wie sie, von gegossenen Metallen abgesehen, für die meisten festen Körper zutreffen, führen durch induktives Schlußverfahren zum *verallgemeinerten Hookeschen Gesetz von der Proportionalität von Spannung und Verzerrung.* Die allgemeine Form des Gesetzes drückt sich aus durch den Satz:

*Jede der sechs Spannungskomponenten in einem Punkte eines Körpers ist eine lineare Funktion der sechs Verzerrungskomponenten in diesem Punkte.*

Es ist einigermaßen zu beachten, wieso dies Gesetz die experimentellen Ergebnisse darstellt. Bei den meisten Experimenten besteht die Last, die vermehrt, vermindert oder auf null gebracht wird, nur aus einem Teil der äußeren Kräfte. Um nämlich den Versuchskörper im Gleichgewicht zu halten, müssen schon dem Eigengewicht gewisse Kräfte entgegen wirken; und weder das Eigengewicht noch die ihm entgegen wirkenden Kräfte schließt man in der Regel in die Belastung ein. Bei Beginn und am Schluß des Experiments findet sich der Körper in einem Zustand der Spannung; eine gemessene Verzerrung aber besteht nicht. Denn die Verzerrung, die man mißt, rechnet man eben von dem Zustand des Körpers bei Beginn des Experiments als Grundzustand aus. Die Verzerrung aber, auf die sich die Formulierung des Gesetzes bezieht, muß von einem andern Zustand als Grundzustand aus gerechnet werden. Dieser „unverzerrte" Zustand ist derjenige, in dem sich der Körper befinden würde, wenn er von der Wirkung *aller* äußeren Kräfte befreit wäre und wenn in keinem Punkte eine innere Spannung bestünde. Diesen Zustand nennen wir den „spannungslosen Zustand". Von ihm als Grundzustand aus gerechnet befindet sich der Körper bei Beginn des Versuchs in einem Zustande der Verzerrung; ebenso befindet er sich in einem Zustand der Spannung. Bringt man nun die Last an, so wird die Spannung sowohl dem Betrage nach als in ihrer Verteilung geändert; desgleichen ändert sich die Verzerrung. Nach Anbringung der Last besteht also der Spannungszustand aus zwei Spannungssystemen: dem Spannungssystem des Anfangszustandes und einem Spannungssystem, das mit der Last im ganzen Körper Gleich-

gewicht ergibt. Die Verzerrung, vom spannungslosen Zustand aus gerechnet, setzt sich in gleicher Weise aus zwei Verzerrungen zusammen: der Verzerrung, die den spannungslosen Zustand in den Anfangszustand überführt, und der Verzerrung, die den Anfangszustand in den unter Einwirkung der Last angenommenen Zustand überführt. Die Experimente können uns nur über das zweite Spannungssystem und über die zweite Verzerrung Aufschluß geben; und mit den Ergebnissen der Experimente steht die Annahme im Einklang, daß für diese Spannung und Verzerrung das Proportionalitätsgesetz gilt. Die allgemeine Fassung des Proportionalitätsgesetzes spricht zugleich aus, daß auch die Spannung im Anfangszustande der Verzerrung in diesem Zustande proportional ist. Ferner setzt sie voraus, daß sowohl der Anfangszustand wie der unter Einwirkung der Last angenommene Zustand aus dem spannungslosen Zustand sich durch Verschiebungen ableiten läßt, die von hinreichend kleinem Betrage sind, um die Berechnung der Verzerrungen nach den vereinfachten Methoden von § 9 zu gestatten. Wäre dies nicht der Fall, so würden sich die Verzerrungen nicht durch einfache Superposition zusammensetzen; und die Proportionalität von Last und gemessener Verzerrung würde nicht die Proportionalität von Spannungskomponenten und Verzerrungskomponenten in sich schließen.

## § 65. Form der Verzerrungsenergie-Funktion.

Die Experimente, die zur Aufstellung des Hookeschen Gesetzes führten, geben keinen vollgültigen Beweis für die Richtigkeit des Gesetzes ab. Das Gesetz faßt in abstrakter Form die Resultate vieler Beobachtungen und Experimente zusammen, ist aber viel präziser als diese selbst. Die mathematischen Folgerungen, die sich aus der Annahme, daß das Gesetz richtig sei, ergeben, lassen sich zuweilen experimentell nachprüfen; und immer, wenn diese Prüfung möglich ist, wird die Richtigkeit des Gesetzes von neuem offenbar. Wir werden uns in späteren Kapiteln mit der Ableitung dieser Folgerungen befassen; hier merken wir einige Resultate an, die sich sofort ableiten lassen.

Wenn ein Körper durch allmähliche Belastung ein wenig verzerrt wird und die Temperatur konstant bleibt, so sind die Spannungskomponenten lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten; zudem sind sie partielle Differentialquotienten einer Funktion ($W$) der Verzerrungskomponenten. Die Verzerrungsenergie-Funktion $W$ ist daher eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten.

Die bekannte Theorie der Schallwellen[1]) führt uns zu der Annahme, daß in einem Körper, der kleine Schwingungen ausführt, die Bewegung so schnell vor sich geht, daß kein Teil des Körpers eine merkliche Wärmemenge abgeben oder aufnehmen kann. Auch in

1) Siehe Rayleigh, *Theory of Sound*, Kap. XI.

diesem Fall gibt es eine Verzerrungsenergie-Funktion; setzen wir nun voraus, daß das Hookesche Gesetz gilt, so ist diese Funktion eine homogene quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten. Eliminieren wir aus den Bewegungsgleichungen (15), § 54, die Spannungskomponenten, so gehen diese Gleichungen über in lineare Gleichungen zur Bestimmung der Verschiebung. Auf dem linearen Charakter derselben und der Art, in der die Zeit in sie eingeht, beruht es, daß sie Lösungen besitzen, welche isochrone Schwingungen darstellen. Die Tatsache, daß alle festen Körper sich in isochrone Schwingungszustände versetzen lassen, bezeichnete Stokes[1]) nachdrücklich als einen zwingenden Beweis für die Richtigkeit des Hookeschen Gesetzes bei kleinen Verzerrungen.

Der Beweis für die Existenz von $W$, wie er in § 62 erbracht wurde, weist darauf hin, daß in den Ausdrücken, die $W$ in den beiden Fällen der isothermen und adiabatischen Zustandsänderung als quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten darstellen, verschiedene Koeffizienten auftreten. Diese Koeffizienten sind die sog. „elastischen Konstanten", und bei den experimentellen Bestimmungen der Konstanten nach statischen Methoden, bei denen also isotherme Zustandsänderungen vorlagen, und bei solchen nach dynamischen Methoden, bei denen adiabatische Zustandsänderungen vorlagen, haben sich tatsächlich verschiedene Werte ergeben.[2]) Immerhin sind die Verschiedenheiten nicht beträchtlich.

Um die Stabilität des Körpers zu sichern, ist nötig, daß die Koeffizienten der Glieder der homogenen quadratischen Funktion $W$ so beschaffen sind, daß die Funktion stets positiv ist.[3]) Diese Bedingung hat gewisse Ungleichungen zwischen den elastischen Konstanten zur Folge.

Betrachtet man das Hookesche Gesetz als eine erste Annäherung für den Fall sehr kleiner Verzerrungen, so wird man natürlich annehmen, daß die Glieder zweiter Ordnung in der Verzerrungsenergie-Funktion in gleicher Weise eine erste Annäherung liefern. Könnte man Glieder höherer Ordnung noch mit in Rechnung bringen, so würden sich gewisse Verhältnisse in die Theorie einbeziehen lassen, die gegenwärtig aus ihrem Rahmen herausfallen. Derartige Erweite-

1) S. Einleitung, Fußnote 37.

2) Die Verschiedenheiten scheinen zuerst von P. Lagerhjelm im Jahre 1827 bemerkt zu sein; s. Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, p. 189. Zum Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen machte sie G. Wertheim, *Ann. de Chimie*, t. 12 (1844). Aufschluß über die Ergebnisse neuerer experimenteller Untersuchungen gibt Lord Kelvin (Sir W. Thomson) in dem Artikel „*Elasticity*" in der *Ency. Brit.*, 9. Aufl., wieder abgedruckt in *Math. and Phys. Papers*, vol. 3. Siehe auch W. Voigt, *Ann Phys. Chem. (Wiedemann)*, Bd. 52 (1894).

3) Kirchhoff, *Vorlesungen über . . . Mechanik*, Vorlesung 27. Eine Erörterung über die Theorie der Stabilität findet man in einer Abhandlung von R. Lipschitz, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 78 (1874).

rungen der Elastizitätstheorie sind von verschiedenen Schriftstellern[1]) in Vorschlag gebracht und zum Teil weiter ausgeführt worden.

## § 66. Elastische Konstanten.

Nach dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz sind die sechs Spannungskomponenten in irgend einem Punkt eines elastischen festen Körpers mit den sechs Verzerrungskomponenten in diesem Punkte durch Gleichungen von der Form verknüpft:

$$\left.\begin{array}{l} X_x = c_{11} e_{xx} + c_{12} e_{yy} + c_{13} e_{zz} + c_{14} e_{yz} + c_{15} e_{zx} + c_{16} e_{xy}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_z = c_{41} e_{xx} + c_{42} e_{yy} + c_{43} e_{zz} + c_{44} e_{yz} + c_{45} e_{zx} + c_{46} e_{xy}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden Koeffizienten, $c_{11}, \ldots$ sind die *elastischen Konstanten* der Substanz. Es sind die Koeffizienten einer homogenen quadratischen Funktion $2W$, wo $W$ die Verzerrungsenergie-Funktion; sie sind daher durch die Gleichungen verknüpft, die aus der Existenz jener Funktion folgen. Dieselben sind von der Form:

$$c_{rs} = c_{sr} \; (r, s = 1, 2, \cdots 6), \quad (11)$$

und die Zahl der Konstanten wird durch diese Gleichungen von 36 auf 21 reduziert.

Wir schreiben den Ausdruck für $2W$ in der Form

$$\begin{aligned} 2W = c_{11} e_{xx}^2 &+ 2c_{12} e_{xx} e_{yy} + 2c_{13} e_{xx} e_{zz} + 2c_{14} e_{xx} e_{yz} + 2c_{15} e_{xx} e_{zx} + 2c_{16} e_{xx} e_{xy} \\ &+ c_{22} e_{yy}^2 + 2c_{23} e_{yy} e_{zz} + 2c_{24} e_{yy} e_{yz} + 2c_{25} e_{yy} e_{zx} + 2c_{26} e_{yy} e_{xy} \\ &+ c_{33} e_{zz}^2 + 2c_{34} e_{zz} e_{yz} + 2c_{35} e_{zz} e_{zx} + 2c_{36} e_{zz} e_{xy} \\ &+ c_{44} e_{yz}^2 + 2c_{45} e_{yz} e_{zx} + 2c_{46} e_{yz} e_{xy} \\ &+ c_{55} e_{zx}^2 + 2c_{56} e_{zx} e_{xy} \\ &+ c_{66} e_{xy}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Man hat die Elastizitätstheorie zuweilen auf jener Hypothese über die Konstitution der Materie aufgebaut, wonach die Körper aus materiellen Punkten bestehen, die aus der Entfernung auf einander wirken mit einer Kraft, die eine Funktion der Entfernung der Punkte ist und in die Richtung der Verbindungslinie fällt. Eine Folgerung, die man aus dieser Hypothese zieht[2]), ist, daß die in der Funktion $W$ auftretenden Koeffizienten durch sechs Relationen miteinander ver-

1) Es sei insbesondere verwiesen auf W. Voigt, *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann)*, Bd. 52, 1894, p. 586 und *Berliner Berichte*, 1901.

2) Siehe Bemerkung B am Ende dieses Buches.

knüpft sind, wodurch ihre Zahl sich auf 15 reduziert. Diese Relationen lauten

$$\left.\begin{array}{lll} c_{23} = c_{44}, & c_{31} = c_{55}, & c_{12} = c_{66}, \\ c_{14} = c_{56}, & c_{25} = c_{46}, & c_{36} = c_{45}. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Wir werden auf sie als auf die „Cauchyschen Relationen" Bezug nehmen, werden sie aber nicht als gültig voraussetzen.

## § 67. Methoden zur Bestimmung der Spannung in einem Körper.

Wünschen wir den Spannungszustand in einem Körper zu kennen, an dem gegebene Kräfte angreifen, so haben wir die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts (14), § 54, zu lösen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \rho X = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z = 0; \end{array}\right\} \quad (14)$$

die Lösungen müssen so beschaffen sein, daß sie die richtigen Ausdrücke für die Oberflächenspannungen liefern, wenn diese aus den Formeln (5), § 47, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} X_\nu = X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + Z_x \cos(z, \nu), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (15)$$

berechnet werden. Die Gleichungen (14) samt den Bedingungen (15) reichen nicht aus, um die Spannung zu bestimmen, und ein Spannungssystem kann sehr wohl diese Gleichungen und Bedingungen befriedigen, ohne doch die richtige Lösung des Problems zu sein, denn die Spannungskomponenten sind Funktionen der Verzerrungskomponenten, und die letzteren genügen den sechs Kompatibilitätsbedingungen (25), § 17, nämlich drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}$$

und drei andern vom Typus

$$2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).$$

Berücksichtigt man diese Beziehungen, so hat man Gleichungen genug, um den Spannungszustand zu bestimmen.

Sind die angreifenden Kräfte so beschaffen, daß die Spannungskomponenten entweder konstant oder lineare Funktionen der Koordinaten sind, so gilt das Gleiche von den Verzerrungskomponenten, und

die Kompatibilitätsbedingungen sind identisch befriedigt. Wir werden im folgenden derartige Fälle behandeln.

Im allgemeinen Falle läßt sich das Problem auf mannigfache Weise auf die Aufgabe zurückführen, gewisse Systeme von Differentialgleichungen zu lösen. Ein Verfahren besteht darin, daß man nach der oben beschriebenen Methode für die Spannungskomponenten ein System von Gleichungen aufstellt, in dem die identischen Relationen zwischen den Verzerrungskomponenten in Rechnung gezogen sind. Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man die Spannungskomponenten eliminiert und die Verzerrungskomponenten durch die Verschiebungen ausdrückt mittels der Formeln

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Beide Methoden werden im folgenden durch Beispiele erläutert werden.

Lassen sich die Verschiebungen ermitteln, so findet man die Verzerrungskomponenten durch Differentiation und aus ihnen die Spannungskomponenten. Lassen sich andererseits die Spannungen bestimmen, so ergeben sich aus ihnen die Verzerrungen, und aus diesen kann man die Verschiebung nach der in § 18 angegebenen Methode finden.

In Kapitel VII werden wir nachweisen, daß die Lösung irgend eines Problems der hier betrachteten Art tatsächlich eindeutig ist. Vor der Hand werden wir annehmen, daß eine Lösung, die alle Bedingungen befriedigt, *die* Lösung ist.

## § 68. Form der Verzerrungsenergie-Funktion für isotrope Körper.

Beziehen wir die Spannungs- und Verzerrungskomponenten statt auf die $(x, y, z)$-Achsen auf ein neues Koordinatensystem $x', y', z'$, so müssen sich die Spannungskomponenten nach den Formeln von § 49 und die Verzerrungskomponenten nach den Formeln von § 12 transformieren. Führen wir in den Gleichungen (10) für die Größen $X_x, \ldots$ und $e_{xx}, \ldots$ ihre Werte ein, so finden wir, daß die Spannungskomponenten $X'_{x'}, \ldots$ und die Verzerrungskomponenten $e_{x'x'}, \ldots$ durch lineare Gleichungen verknüpft sind. Diese lassen sich nach den $X'_{x'}, \ldots$ auflösen, und das Ergebnis wird sein, daß die $X'_{x'}$ als lineare Funktionen von $e_{x'x'}, \ldots$ ausgedrückt erscheinen, wobei die Koeffizienten von den Koeffizienten $c_{11}, \ldots$ in Formel (12) und außerdem von Größen abhängen, durch die die gegenseitige Lage der alten und neuen Achsen bestimmt ist. Im allgemeinen ergibt sich, daß das elastische Verhalten eines Stoffes zu gewissen Richtungen in Beziehung steht, die relativ zum Stoffe

fixiert sind. Wenn jedoch die elastischen Konstanten durch gewisse Relationen mit einander verknüpft sind, so sind die Formeln, die die Spannungskomponenten mit den Verzerrungskomponenten verbinden, unabhängig von der Richtung. Das Material heißt dann *isotrop* im elastischen Sinne. In diesem Falle verhält sich die Funktion $W$ invariant gegenüber allen Transformationen der rechtwinkligen Koordinaten. Wüßten wir, daß Verzerrungsinvarianten ersten oder zweiten Grades, die von den beiden in § 13, c) gefundenen unabhängig wären, nicht existieren, so könnten wir darauf schließen, daß die Verzerrungsenergie-Funktion für einen isotropen Körper von der Form sein muß:

$$\tfrac{1}{2} A(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + \tfrac{1}{2} B(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}).$$

Wir werden späterhin (Kap. VI) die Transformation ausführen und finden, daß dies die tatsächliche Form von $W$ ist.

Vor der Hand nehmen wir $W$ in dieser Form an und leiten einige einfache Folgerungen daraus ab. Es wird praktisch sein, $\lambda + 2\mu$ an Stelle von $A$ und $\mu$ an Stelle von $B$ zu schreiben. Wir setzen den Stoff als homogen voraus, sodaß $\lambda$ und $\mu$ in allen Punkten denselben Wert haben.

## § 69. Elastische Konstanten und Moduln isotroper fester Körper.

Drückt sich $W$ durch die Gleichung aus:

$$\begin{aligned} 2W = {} & (\lambda + 2\mu)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 \\ & + \mu(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{zz}e_{xx} - 4e_{xx}e_{yy}), \end{aligned} \tag{17}$$

so sind die Spannungskomponenten durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \quad Y_y = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}, \quad Z_z = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}, \\ Y_z = \mu e_{yz} \qquad , \quad Z_x = \mu e_{zx} \qquad , \quad X_y = \mu e_{xy} \qquad , \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

wo $\Delta$ für $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ geschrieben ist.

Ein beliebig geformter Körper, der einem konstanten, in allen Punkten der Oberfläche gleichen Druck $p$ unterworfen ist, wird sich in einem gewissen Spannungszustand befinden. Wie wir in § 55 gesehen haben, wird dieser Zustand durch die Gleichungen gegeben sein

$$X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Den Gleichungen (18) gemäß befindet sich der Körper in einem Zustande der Verzerrung derart, daß

$$\begin{gathered} e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = -p/(3\lambda + 2\mu), \\ e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \end{gathered}$$

Die kubische Kompression ist $p/(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$.

Wir schreiben

$$k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu. \tag{19}$$

Dann ist $k$ die Größe, die sich ergibt, wenn der Betrag eines gleichförmigen Drucks durch den Betrag der von ihm bewirkten Kompression dividiert wird. Man nennt $k$ den *Kompressionsmodul.*

Nach § 52 läßt sich ein Spannungssystem, wie auch immer es beschaffen sein mag, in einen mittleren Zug oder Druck und in Schubspannungen auf drei zueinander senkrechte Ebenen auflösen. Die mittlere Zugspannung wird gemessen durch $\frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z)$. Wir erkennen, daß die Größe, die bei Division des Betrags des mittleren Zugs in einem Punkt durch den Betrag der kubischen Dilatation in demselben Punkte entsteht, eine konstante Größe ist — der Kompressionsmodul.

Ein Zylinder oder Prisma von beliebiger Form wird, wenn an den ebenen Endflächen gleichmäßiger Zug $T$ angreift und die Mantelfläche spannungsfrei ist, sich in einem gewissen Spannungszustand befinden. Wir wir in § 55 gesehen haben, wird dieser Zustand durch die Gleichungen gegeben sein

$$X_x = T, \quad Y_y = Z_z = Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Den Gleichungen (18) gemäß wird sich der Körper in einem Zustand der Verzerrung befinden derart, daß

$$e_{xx} = \frac{T(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad e_{yy} = e_{zz} = -\frac{\lambda T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

Wir schreiben

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \tag{20}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{21}$$

Dann ist $E$ die Größe, die sich ergibt, wenn der Betrag eines einfachen longitudinalen Zugs durch den Betrag der von ihm bewirkten Dehnung dividiert wird. $E$ ist unter dem Namen *Youngscher Modul* bekannt. Die Zahl $\sigma$ ist das Verhältnis der Querverkürzuug zur Längsdehnung eines Stabes, der an den Enden Zugspannung erfährt. Sie ist als die *Poissonsche Konstante* (engl. *Poisson's ratio*) bekannt.

Bei jedem Spannungssystem sind die Dehnungen in Richtung der Achsen und die Normalspannungen auf die zu den Achsen senkrechten Ebenen durch die Gleichungen verknüpft

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= E^{-1}\{X_x - \sigma(Y_y + Z_z)\}, \\ e_{yy} &= E^{-1}\{Y_y - \sigma(Z_z + X_x)\}, \\ e_{zz} &= E^{-1}\{Z_z - \sigma(X_x + Y_y)\}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Bei jedem Spannungssystem sind die Schubverzerrung, die einem Paar zueinander senkrechter Achsen entspricht, und die Schubspannung

auf das zu jenen Achsen senkrechte Ebenenpaar miteinander durch eine Gleichung von der Form

$$X_y = \mu e_{xy} \tag{23}$$

verknüpft. Diese Relation ist von den Achsenrichtungen unabhängig. Die Größe $\mu$ heißt die *Steifigkeit* (engl. *rigidity*).

## § 70. Bemerkungen über die Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung in isotropen Körpern.

a) Wir notieren die Relationen

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \tag{24}$$

b) Wäre $\sigma > \frac{1}{2}$, so würde $k$ negativ sein, d. h. der Stoff würde unter Druck expandieren. Wäre $\sigma < -1$, so würde $\mu$ negativ sein, und die Funktion $W$ würde keine positive quadratische Funktion sein. Wir können zeigen, daß dies auch der Fall sein würde, wenn $k$ negativ wäre.[1]) Negative Werte von $\sigma$ sind durch die Bedingung der Stabilität nicht ausgeschlossen, bei isotropem Material kommen aber erfahrungsgemäß solche Werte nicht vor.

c) Die Konstante $k$ wird gewöhnlich durch Kompressionsversuche bestimmt, die Konstante $E$ bisweilen direkt durch Dehnungsversuche, bisweilen auch durch Biegungsversuche, die Konstante $\mu$ gewöhnlich durch Drillungsversuche. Den Wert der Konstanten $\sigma$ leitet man gewöhnlich aus den Werten zweier der Größen $E$, $k$, $\mu$ ab.[2])

d) Gelten die Cauchyschen Relationen (13), § 66, so ist $\lambda = \mu$ und $\sigma = \frac{1}{4}$.

e) Statt über die Form der Verzerrungsenergie-Funktion eine Annahme zu machen, können wir auch einige der Relationen zwischen den Spannungskomponenten und Verzerrungskomponenten in bestimmter Weise voraussetzen und die Relationen (18) ableiten. Zum Beispiel[3]) können wir annehmen, 1) daß die mittlere Zugspannung und die kubische Dilatation durch die Gleichung $\frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z) = k\Delta$ verknüpft sind, 2) daß die Beziehung $X'_{y'} = \mu e_{x'y'}$ für alle Paare rechtwinklig sich kreuzender $x'$- und $y'$-Achsen zutrifft. Aus der zweiten Voraussetzung würden wir, wenn wir die $(x, y, z)$-Achsen als Hauptachsen der Verzerrung annehmen, folgern

1) $2W$ läßt sich schreiben

$$(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu)(e_{xx}+e_{yy}+e_{zz})^2 + \tfrac{2}{3}\mu\{(e_{yy}-e_{zz})^2 + (e_{zz}-e_{xx})^2 + (e_{xx}-e_{yy})^2\} + \mu(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2).$$

2) Experimente zur direkten Bestimmung der Poissonschen Konstanten wurden angestellt von P. Cardami, *Phys. Zeitschr.* Bd. 4, 1903, und J. Morrow, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 6 (1903). M. A. Cornu, *Paris, C. R.*, t. 69 (1869) und A. Mallock, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 29 (1879) bestimmten $\sigma$ durch Biegungsversuche.

3) Es ist dies die Methode von Stokes. Siehe Einleitung, Fußnote 37.

können, daß die Hauptspannungsebenen zu diesen Achsen senkrecht stehen. Bei gleicher Wahl der Achsen würden wir dann mittels der Transformationsformeln von § 12 und § 49 finden, daß die Beziehung

$$X_x l_1 l_2 + Y_y m_1 m_2 + Z_z n_1 n_2 = \mu(2 e_{xx} l_1 l_2 + 2 e_{yy} m_1 m_2 + 2 e_{zz} n_1 n_2)$$

für alle Werte von $l_1, \ldots$ zutrifft, die die Gleichung befriedigen

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Daraus folgt, daß wir haben

$$X_x - 2\mu e_{xx} = Y_y - 2\mu e_{yy} = Z_z - 2\mu e_{zz}.$$

Die erste Voraussetzung zeigt dann, daß jede dieser drei Größen gleich $(k - \frac{2}{3}\mu)\Delta$ ist. Damit ist nachgewiesen, daß die Relationen (18) für die Hauptachsen der Verzerrung zutreffen; durch erneute Anwendung der Transformationsformeln können wir dann zeigen, daß sie für beliebige Achsen richtig sind.

f) Statt die eben bezeichneten Annahmen zu machen, könnten wir auch voraussetzen, daß die Hauptspannungsebenen zu den Verzerrungshauptachsen senkrecht stehen und daß die Relationen (22) für Hauptachsen zutreffen; dann könnten wir die Relationen (18) für beliebige Achsen ableiten. Diese Annahme zu verfolgen, mag dem Lernenden als Übungsaufgabe vorbehalten sein.

g) Wir können zeigen, daß bei dem Problem der Kompression eines Körpers durch gleichmäßigen Druck auf der Oberfläche, das mit der Definition von $k$ verknüpft war, die Verschiebung sich durch die Gleichungen ausdrückt[1])

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = -\frac{p}{3k}.$$

h) Wir können zeigen, daß bei dem Problem des durch einfachen Zug $T$ gedehnten Stabes, das mit der Definition von $E$ und $\sigma$ verknüpft war, die Verschiebung sich durch die Gleichungen ausdrückt:

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = -\frac{\sigma T}{E} = -\frac{\lambda T}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \frac{w}{z} = \frac{T}{E} = \frac{(\lambda + \mu) T}{\mu(3\lambda + 2\mu)}.$$

## § 71. Größe der elastischen Konstanten und Moduln einiger isotroper Körper.

Um von der Größenordnung der elastischen Konstanten und Moduln einiger gebräuchlicher Materialien einen Begriff zu geben, stellen wir die Ergebnisse der Experimente hier in einer Tabelle zusammen. In dieser sind sowohl die Dichte ($\varrho$) des Materials wie die elastischen Konstanten verzeichnet und zwar sind die Konstanten ausgedrückt als Vielfache einer Spannungseinheit von einer Dyne pro Quadratzentimeter. Desgleichen ist die Poissonsche Konstante angegeben.

1) Über die im Text angegebene Verschiebung könnte eine solche überlagert werden, wie sie in einem starren Körper möglich sein würde. Eine ähnliche Bemerkung gilt für h). Vgl. § 18, oben.

Die mit „*E*" bezeichneten Resultate sind J. D. Everetts *Illustrations of the C. G. S. system of units*, London 1891, entnommen, woselbst auch die betreffenden Autoritäten nachzusehen sind. Die mit „*A*" bezeichneten sind aus den Resultaten neuerer Untersuchungen abgeleitet, die einer Abhandlung von Amagat im *Journal de Physique* (Sér. 2), t. 8 (1889) niedergelegt sind. Selbstverständlich kommen bei den Werten der elastischen Konstanten für verschiedene Proben der (nominell) gleichen Substanz beträchtliche Differenzen vor, und eine Bezeichnung wie z. B. „Stahl" ist natürlich ganz und gar unpräzis.

| Material | $\varrho$ | $E$ | $k$ | $\mu$ | $\sigma$ | Quelle |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Stahl | 7,849 | $2{,}139 \times 10^{12}$ | $1{,}841 \times 10^{12}$ | $8{,}19 \times 10^{11}$ | ,310 | *E* |
| " | | $2{,}041 \times 10^{12}$ | $1{,}43 \times 10^{12}$ | | ,268 | *A* |
| Schmiedeeisen | 7,677 | $1{,}963 \times 10^{12}$ | $1{,}456 \times 10^{12}$ | $7{,}69 \times 10^{11}$ | ,275 | *E* |
| Messing (gezogen) | 8,471 | $1{,}075 \times 10^{12}$ | | $3{,}66 \times 10^{11}$ | | *E* |
| Messing | | $1{,}085 \times 10^{12}$ | $1{,}05 \times 10^{12}$ | | ,327 | *A* |
| Kupfer | 8,843 | $1{,}234 \times 10^{12}$ | $1{,}684 \times 10^{12}$ | $4{,}47 \times 10^{11}$ | ,378 | *E* |
| " | | $1{,}215 \times 10^{12}$ | $1{,}166 \times 10^{12}$ | | ,327 | *A* |
| Blei | | $1{,}57 \times 10^{11}$ | $3{,}62 \times 10^{11}$ | | ,428 | *A* |
| Glas | 2,942 | $6{,}03 \times 10^{11}$ | $4{,}15 \times 10^{11}$ | $2{,}40 \times 10^{11}$ | ,258 | *E* |
| " | | $6{,}77 \times 10^{11}$ | $4{,}54 \times 10^{11}$ | | ,245 | *A* |

## § 72. Elastische Konstanten im allgemeinen.

Materialien, wie natürliche Kristalle oder Holz, die nicht isotrop sind, heißen *äolotrop*. Der analytische Ausdruck des Hookeschen Gesetzes für einen äolotropen festen Körper ist in den Gleichungen (10), § 66, enthalten. In Matrixbezeichnung können wir die Gleichungen schreiben:

$$(X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} (e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}), \quad (25)$$

wo $c_{rs} = c_{sr}$, $(r, s = 1, 2, \cdots 6)$.

Diese Gleichungen lassen sich so auflösen, daß die Verzerrungskomponenten durch die Spannungskomponenten ausgedrückt erscheinen. Bezeichnet $\Pi$ die Determinante der Größen $c_{rs}$ und $C_{rs}$ die zu $c_{rs}$ gehörige Subdeterminante, sodaß

$$\Pi = c_{r1} C_{r1} + c_{r2} C_{r2} + c_{r3} C_{r3} + c_{r4} C_{r4} + c_{r5} C_{r5} + c_{r6} C_{r6}, \quad (26)$$

so lassen sich die Gleichungen, die die Verzerrungskomponenten durch die Spannungskomponenten ausdrücken, folgendermaßen schreiben

$$\Pi(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} (X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y), \quad (27)$$

wo $C_{rs} = C_{sr}$ $(r, s = 1, 2, \cdots 6)$.

Die Größen $\frac{1}{2} c_{11}, \cdots c_{12}, \cdots$ sind die Koeffizienten einer homogenen quadratischen Funktion von $e_{xx}, \cdots$. Es ist dies die Verzerrungsenergie-Funktion, ausgedrückt in den Verzerrungskomponenten.

Die Größen $\frac{1}{2} C_{11}/\Pi, \cdots C_{12}/\Pi, \cdots$ sind die Koeffizienten einer homogenen quadratischen Funktion von $X_x, \cdots$. Es ist dies die Verzerrungsenergie-Funktion, ausgedrückt in den Spannungskomponenten.

## § 73. Elastizitätsmoduln.

Wir können auf mannigfache Weise typische Spannungs- und Verzerrungszustände definieren. Beispielsweise sind einfacher Zug $[X_x]$, Schubspannung $[Y_z]$, mittlere Zugspannung $[\frac{1}{3}(X_x + Y_y + Z_z)]$ Spannungstypen. Die entsprechenden Verzerrungstypen sind einfache Dehnung $[e_{xx}]$, Schubverzerrung $[e_{yz}]$, kubische Dilatation $[e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}]$. Wir können irgend eine dieser typischen Verzerrungen, die mit der entsprechenden typischen Spannung verknüpft ist, *wenn keine andere Spannung hinzutritt*, durch eine Gleichung von der Form ausdrücken:

$$\text{Spannung} = M \times (\text{entsprechende Verzerrung}).$$

$M$ heißt dann ein „Elastizitätsmodul". Die Größen $\Pi/C_{11}$, $\Pi/C_{44}$ sind Beispiele solcher Moduln.

Der Modul, der dem einfachen Zug entspricht, ist als *Youngscher Modul* für die Richtung des betreffenden Zuges bekannt. Der Modul, der der auf ein Paar zueinander senkrechten Ebenen wirkenden Schubspannung entspricht, ist als die *Steifigkeit* für das betreffende Paar von Richtungen (der Normalen jener Ebenen) bekannt. Der Modul, der dem mittleren Zug oder Druck entspricht, ist unter dem Namen *Kompressionsmodul* bekannt.

Wir geben einige Beispiele für die Berechnung von Moduln.

a) *Kompressionsmodul.*

Wir haben anzunehmen, daß $X_x = Y_y = Z_z$ und daß die übrigen Spannungskomponenten verschwinden: die entsprechende Verzerrung ist kubische Dilatation, und wir müssen daher $e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ berechnen. Wir finden für den Modul den Ausdruck

$$\Pi/(C_{11} + C_{22} + C_{33} + 2\,C_{23} + 2\,C_{31} + 2\,C_{12}). \quad (28)$$

Wie in § 68 erkennen wir, daß die kubische Kompression, die in einem beliebig gestalteten Körper durch gleichmäßigen Normaldruck $p$ auf seine Oberfläche hervorgebracht wird, gleich $p/k$ ist, wo $k$ jetzt obigen Ausdruck (28) bedeutet.

b) *Steifigkeit.*

Wir können annehmen, daß alle Spannungskomponenten außer $Y_z$ verschwinden; dann haben wir $\Pi e_{yz} = C_{44} Y_z$, sodaß $\Pi/C_{44}$ die dem Richtungspaar $y$, $z$ entsprechende Steifigkeit ist.

Ist die Schubspannung auf die beiden zueinander senkrechten Richtungen $(l, m, n)$ und $(l', m', n')$ bezogen, so kann man, wie sich zeigen läßt, die Steifigkeit ausdrücken durch

$$\Pi \div (C_{11}, C_{22}, \cdots C_{12}, \cdots)(2ll', 2mm', 2nn', mn' + m'n, \\ nl' + n'l, lm' + l'm)^2, \tag{29}$$

wo der Nenner eine vollständige quadratische Funktion der sechs Argumente $2ll', \cdots$ mit den Koeffizienten $C_{11}, C_{22}, \cdots$ ist.

c) *Der Youngsche Modul und die Poissonsche Konstante.*

Wir können annehmen, daß alle Spannungskomponenten außer $X_x$ verschwinden und haben dann $\Pi e_{xx} = C_{11} X_x$, sodaß $\Pi/C_{11}$ der der Richtung $\nu$ entsprechende Youngsche Modul ist. Im gleichen Falle ist das Poissonsche Verhältnis der Verkürzung in der $y$-Richtung zur Dehnung in der $x$-Richtung gleich $-C_{12}/C_{11}$. Der Wert der Poissonschen Konstanten hängt von der Richtung der verkürzten transversalen Linienelemente sowohl wie von der der gedehnten longitudinalen Elemente ab.

Im allgemeinen Fall können wir die Spannung als Zugspannung $X'_{x'}$ auf die Ebenen $x' = \text{const.}$, deren Normale in die Richtung $(l, m, n)$ fällt, annehmen. Wir haben dann

$$X_x = l^2 X'_{x'}, \quad Y_y = m^2 X'_{x'}, \quad Z_z = n^2 X'_{x'}, \\ Y_z = mn X'_{x'}, \quad Z_x = nl X'_{x'}, \quad X_y = lm X'_{x'};$$

ferner haben wir

$$e_{x'x'} = e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + e_{yz} mn + e_{zx} nl + e_{xy} lm;$$

daraus folgt, daß der dieser Richtung entsprechende Youngsche Modul gleich

$$\Pi \div (C_{11}, C_{22}, \cdots C_{12}, \cdots)(l^2, m^2, n^2, mn, nl, lm)^2 \tag{30}$$

ist, wo der Nenner eine vollständige quadratische Funktion der sechs Argumente $l^2, \cdots$ mit den Koeffizienten $C_{11}, \cdots$ ist.

Wenn $(l', m', n')$ irgend eine Richtung senkrecht zu $x'$ bedeutet, so ist die Verkürzung in dieser Richtung, $-e_{y'y'}$, gegeben durch die Gleichung

$$e_{y'y'} = e_{xx} l'^2 + e_{yy} m'^2 + e_{zz} n'^2 + e_{yz} m'n' + e_{zx} n'l' + e_{xy} l'm',$$

und die entsprechende Poissonsche Konstante $\sigma$ läßt sich in der Form ausdrücken

$$\sigma = -\frac{1}{2\Phi}\left[l'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial (l^2)} + m'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial (m^2)} + n'^2 \frac{\partial \Phi}{\partial (n^2)} + m'n' \frac{\partial \Phi}{\partial (mn)} \right. \\ \left. + n'l' \frac{\partial \Phi}{\partial (nl)} + l'm' \frac{\partial \Phi}{\partial (lm)}\right], \tag{31}$$

wo $\Phi$ die oben erwähnte quadratische Funktion der Argumente $l^2, \cdots$ bedeutet und die Differentialquotienten so gebildet sind, als ob diese Argumente voneinander unabhängig wären. Es sei bemerkt, daß $\sigma/E$ symmetrische Beziehung zu den beiden Richtungen aufweist, in denen die Verkürzung und die Dehnung auftreten.

Konstruieren wir die Fläche vierter Ordnung, deren Gleichung ist

$$(C_{11}, C_{22}, \cdots C_{12}, \cdots)(x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy)^2 = \text{const.}, \tag{32}$$

so ist der in irgend einer Richtung nach der Oberfläche gezogene Radiusvektor proportional der positiven vierten Wurzel aus dem jener Richtung entsprechenden Youngschen Modul des Materials.[1])

## § 74. Thermo-elastische Gleichungen.

Die Anwendung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik auf das Problem der Bestimmung von Spannung und Verzerrung in elastischen festen Körpern bei Auftreten von Temperaturänderungen ist von Lord Kelvin[2]) diskutiert worden. Die Ergebnisse, zu denen er gelangte, lassen die Aufstellung eines Systems von Differentialgleichungen zur Bestimmung des Spannungszustandes in der in § 67 geschilderten Weise nicht zu.

Schon früher war Duhamel[3]) zu einem Gleichungssystem der gewünschten Art gelangt, indem er die Theorie eines elastischen Körpers, der als System materieller Punkte angesehen wird, entwickelte, und F. E. Neumann war, ausgehend von gewissen Voraussetzungen[4]), auf dieselben Gleichungen geführt worden. Diese Voraussetzungen lassen sich, wenn der Körper isotrop ist, in folgender Form ausdrücken: Das Spannungssystem in irgend einem Punkte eines durch Temperaturänderung verzerrten Körpers besteht aus zwei überlagerten Spannungssystemen. Das eine ist gleichwertig mit gleichmäßigem Druck, der in einem Punkt nach allen Richtungen gleich und der Temperaturänderung proportional ist, das andere hängt von der Verzerrung an jener Stelle genau so ab, wie wenn die Temperatur konstant wäre.

Diese Voraussetzungen führen zu Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} = \beta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{33}$$

wo $\beta$ ein konstanter Koeffizient und $\theta$ der Überschuß der Temperatur über diejenige im unverzerrten Zustande ist. Das Spannungssystem in einem Punkte hat die Komponenten

1) Dies Resultat verdankt man Cauchy, *Exercies de Mathématiques*, t. 4 (1829), p. 30.

2) Siehe Einleitung, Fußnote 43.

3) *Paris, Mém. . . . par divers savans*, t. 5 (1838).

4) Siehe seine *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper*, Leipzig 1885, und vgl. die in § 57, Fußnote, zitierte Abhandlung von Maxwell.

$$\left.\begin{array}{ccc} -\beta\theta + X_x, & -\beta\theta + Y_y, & -\beta\theta + Z_z, \\ Y_z \quad , & Z_x & X_y \end{array}\right\} \tag{31}$$

worin $X_x, \ldots$ sich mittels der Formeln (18), § 69, durch die Verschiebungen ausdrücken. Die Gleichungen reichen zur Bestimmung der Verschiebungen hin, wenn $\theta$ gegeben ist. Ist $\theta$ nicht gegeben, so ist eine weitere Gleichung erforderlich; diese Gleichung läßt sich aus der Theorie der Wärmeleitung ableiten, wie Duhamel und Neumann dargetan haben.

Die Theorie, zu der man so gelangt, ist nicht gerade erheblich weiter entwickelt worden. Insbesondere hat man sich mit der Tatsache beschäftigt, daß eine Glasplatte, die durch ungleiche Erwärmung verzerrt wird, doppelbrechend wird, und mit der Erklärung dieser Erscheinung durch Annahme ungleicher Spannungen in verschiedenen Richtungen. Der Leser, der den Gegenstand weiter zu verfolgen wünscht, sei außer auf die bereits zitierten noch auf folgende Abhandlungen verwiesen: C. W. Borchardt, *Berliner Monatsberichte*, 1873; J. Hopkinson, *Messenger of Math.* vol. 8 (1879); Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (Ser. 6) vol. 1 (1901) = *Scientific Papers*, vol. 4, p. 502; E. Almansi, *Torino Atti*, t. 32 (1897); P. Alibrandi, *Giornale di matem.*, t. 38 (1900).

Zu bemerken ist, daß die elastischen „Konstanten“ selbst Funktionen der Temperatur sind. Im allgemeinen nehmen sie mit wachsender Temperatur ab: dies wurde durch die Versuche von Wertheim[1]), Kohlrausch[2]) und Macleod und Clarke[3]) festgestellt.

## § 75. Anfangsspannung.

Es kann vorkommen, daß der Anfangszustand eines Körpers vom ungespannten Zustand zu weit entfernt ist, als daß Spannung und Verzerrung nach dem Prinzip der Superposition, wie in § 64 auseinander gesetzt, berechnet werden könnten. Solche Anfangszustände können von der besonderen Art der Fabrikation oder Bearbeitung oder von der Wirkung von Massenkräften herrühren. Im Gußeisen kühlen sich die äußeren Teile schneller ab als die inneren und die ungleiche Kontraktion, die mit den ungleichen Abkühlungsgeschwindigkeiten verbunden ist, gibt Anlaß zu einer beträchtlichen Anfangsspannung (*Selbstspannung*, engl. initial stress) im abgekühlten Eisen. Wenn ein Metallblech zu einem Zylinder aufgerollt wird und die Kanten zusammengeschweißt werden, so befindet sich der so geformte Körper

1) *Ann. de Chimie*, t. 12 (1844).

2) *Ann. Phys. Chem. (Poggendorff)*, Bd. 141 (1870).

3) Ein von diesen Autoren erhaltenes Resultat wird in dem im Text angegebenen Sinne von Lord Kelvin ausgelegt im Artikel „Elasticity“ in der *Ency. Brit.*, der in der Fußnote zu § 65 angezogen wurde.

in einem Zustand von Selbstspannung, und den ungespannten Zustand kann man nur durch Aufschneiden des Zylinders erhalten. Ein Körper, der unter der gegenseitigen Gravitation seiner Teile im Gleichgewichte ist, befindet sich in einem Zustande der Spannung, und wenn der Körper sehr groß ist, kann die Spannung einen ungeheuren Betrag erreichen. Die Erde stellt ein Beispiel eines Körpers dar, der als im Zustande von Anfangsspannung befindlich anzusehen ist; denn die Spannung, die im Innern notwendig besteht, ist viel zu groß, als daß die Berechnung der vom ungespannten Zustand als Anfangszustand aus gerechneten Verzerrungen nach den gewöhnlichen Methoden zulässig wäre.

Wenn ein Körper in einem Zustand von Anfangsspannung gegeben ist und gewissen Kräften unterworfen wird, so werden Volum- und Formänderungen hervorgerufen, die wir durch eine von dem gegebenen Anfangszustand als unverzerrten Zustand aus gerechnete Verschiebung charakterisieren können. Die Anfangsspannung in einem Punkte können wir durch die Komponenten

$$X_x^{(0)},\ Y_y^{(0)},\ Z_z^{(0)},\ Y_z^{(0)},\ Z_x^{(0)},\ X_y^{(0)}$$

kennzeichnen, die Spannung, die in dem Punkte eintritt, wenn die Kräfte wirksam sind, durch $X_x^{(0)} + X'_x, \cdots$. In gleicher Weise können wir die Dichte im Anfangszustand mit $\varrho_0$ und die im verzerrten Zustand mit $\varrho_0 + \varrho'$ bezeichnen, die Massenkraft im Anfangszustand können wir durch $(X_0, Y_0, Z_0)$, die im verzerrten Zustand durch $(X_0 + X', Y_0 + Y', Z_0 + Z')$ kennzeichnen. Dann sind die Gleichgewichtsbedingungen im Anfangszustand drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial Z_x^{(0)}}{\partial z} + \varrho_0 X_0 = 0 \tag{35}$$

und drei Randbedingungen vom Typus

$$X_x^{(0)} \cos(x, \nu_0) + X_y^{(0)} \cos(y, \nu_0) + Z_x^{(0)} \cos(z, \nu_0) = 0, \tag{36}$$

worin $\nu_0$ die Richtung der Normalen zur anfänglichen Begrenzungsfläche bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingungen im verzerrten Zustand sind drei Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}(X_x^0 + X_x') + \frac{\partial}{\partial y}(X_y^0 + X_y') + \frac{\partial}{\partial z}(Z_x^{(0)} + Z_x') \\ + (\varrho_0 + \varrho')(X_0 + X') = 0 \tag{37}$$

und drei Randbedingungen vom Typus

$$(X_x^{(0)} + X_x')\cos(x, \nu) + (X_y^{(0)} + X_y')\cos(y, \nu) \\ + (Z_x^{(0)} + Z_x' \cos(z, \nu) = X_\nu, \tag{38}$$

worin $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ die Oberflächenspannung in irgend einem Punkte der verschobenen Begrenzungsfläche. Diese Gleichungen lassen sich,

wenn die Verschiebung klein ist, unter Benutzung von (35) und (36) so umformen, daß sie übergehen in drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_x'}{\partial z} + \varrho_0 X' + \varrho' X_0 = 0 \tag{39}$$

und drei Randbedingungen vom Typus

$$\left.\begin{aligned} X_x' \cos(x, \nu) + X_y' \cos(y, \nu) + Z_x' \cos(z, \nu) \\ = X_\nu - X_x^0 \{\cos(x,\nu) - \cos(x, \nu_0)\} \\ - X_y^0 \{\cos(y,\nu) - \cos(y, \nu_0)\} \\ - Z_x^0 \{\cos(z,\nu) - \cos(z, \nu_0)\}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Ist die Anfangsspannung nicht bekannt, so reichen die Gleichungen (35) und die Bedingungen (36) nicht aus, um sie zu bestimmen, und weitere Schlüsse sind nicht möglich. Ist die Anfangsspannung bekannt, so läßt sich die Bestimmung der hinzukommenden Spannung ($X_x'$, $\cdots$) mittels der Gleichungen (39) und der Bedingungen (40) nicht durchführen ohne Kenntnis der Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten $X_x'$,... und der Verschiebung. Um diese Kenntnis zu gewinnen, hat man entweder auf das Experiment oder irgend eine allgemeinere Theorie zurückzugehen. An experimentellen Nachweisen scheint es freilich gänzlich zu mangeln.[1])

Cauchy[2]) entwickelte die Folgerungen, die sich durch Anwendung jener Theorie materieller Punkte ergeben, auf die in § 66 Bezug genommen wurde. Er fand für $X_x'$, $\cdots$ Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= X_x^{(0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2X_y^{(0)}\frac{\partial u}{\partial y} + 2Z_x^{(0)}\frac{\partial u}{\partial z} + X_x'', \\ Y_z' &= Y_y^{(0)}\frac{\partial w}{\partial y} + Z_z^{(0)}\frac{\partial v}{\partial z} - Y_z^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x} + Z_x^{(0)}\frac{\partial v}{\partial x} + X_y^{(0)}\frac{\partial w}{\partial x} + Y_z'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right| \tag{41}$$

wo ($u, v, w$) die vom Anfangszustand aus gerechnete Verschiebung und ($X_x''$, $\cdots$) ein Spannungssystem, daß mit dieser Verschiebung durch dieselben Relationen verknüpft ist, wie sie bei fehlender Anfangsspannung gelten würden. Im Falle der Isotropie würden diese Gleichungen übereinstimmen mit den Formeln (18), § 69, wenn in diesen $\lambda = \mu$ gesetzt wird. Bemerkt sei, daß diejenigen Glieder von $X_x'$, $\cdots$, welche $X_x^{(0)}$, $\cdots$ enthalten, von den Änderungen der Abstände zwischen Cauchys materiellen Punkten und den Änderungen der Richtungen der sie paarweise verbindenden Linien herrühren und daß diese Änderungen vermittels der Verschiebung ($u, v, w$) ausgedrückt sind.

---

1) Es sei verwiesen auf eine Arbeit von F. H. Cilley, *Amer. J. of Science (Silliman),* (Ser. 4), vol. 11 (1901).

2) S. Einleitung und vgl. Bemerkung B am Ende dieses Buches.

Saint-Venant[1]) gelangte zu Cauchys Resultat durch geeignete Anwendung der Greenschen Methode, d. h. mit Benutzung der Energie-Funktion. Die von ihm gegebene Ableitung ist von K. Pearson[2]) einer Kritik unterzogen worden und kann nicht als richtig angesehen werden. Die Greensche Originaluntersuchung[3]) scheint auf den Fall gleichförmiger Anfangsspannung in einem unbegrenzten elastischen Medium beschränkt zu sein, und die gleiche Einschränkung trifft für Lord Kelvins Auseinandersetzung über die Greensche Theorie[4]) zu.

1) *J. de Math. (Liouville)* (Sér. 2), t. 8 (1863).

2) Todhunter und Pearsons *History,* vol. 2, p. 84, 85.

3) Siehe die in der Einleitung, Fußnote 81, angezogene Abhandlung.

4) *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light,* London 1904, p. 228 ff.

## Kapitel IV.

## Die Beziehung zwischen der mathematischen Elastizitätstheorie und der technischen Mechanik.

### § 76. Beschränkungen der mathematischen Theorie.

Zweck dieses Kapitels ist, eine möglichst klare Vorstellung von dem Ziel und den Beschränkungen der mathematischen Theorie in ihrer Anwendung auf praktische Fragen zu geben. Die Theorie ist entwickelt für Körper, die bei konstanter Temperatur allmählich von einem spannungslosen Anfangszustande zu einem Endzustande verzerrt werden, der so wenig vom spannungslosen Zustand abweicht, daß Quadrate und Produkte der Verschiebungen vernachlässigt werden können; des weiteren baut sie sich auf auf dem Hookeschen Gesetz in seiner in den Sätzen von § 64 gegebenen Verallgemeinerung. Bekanntlich gehorchen aber viele bei Bauwerken usw. verwendeten Materialien, wie Gußeisen, Bausteine, Zement, dem Hookeschen Gesetze bei beliebigen beobachtbaren Verzerrungen nicht. Auch ist bekannt, daß diejenigen Stoffe, die diesem Gesetze bei kleinen meßbaren Verzerrungen folgen, bei größeren Verzerrungen ihm nicht gehorchen. Die in § 64 gegebene Fassung des Gesetzes schloß den Satz ein, daß die Verzerrung bei Entfernung der Last verschwindet, und dieser Punkt bildet einen notwendigen Bestandteil der Theorie; bekanntlich sind aber die Verzerrungs- bezw. Belastungsgrenzen, innerhalb deren diese Bedingung erfüllt ist, verhältnismäßig eng. Obwohl nun ein reicher Bestand an experimentellen Daten[1]) bezüglich des Verhaltens

1) Über die experimentellen Resultate wird man sich in Lehrbüchern der angewandten Mechanik unterrichten können. Folgende Bücher seien erwähnt: W. J. M. Rankine, *Applied Mechanics*, 1. Auflage, London 1858 (ist in zahlreichen neueren Auflagen erschienen); W. C. Unwin, *The testing of materials of construction*, London 1888; J. A. Ewing, *The Strength of Materials*, Cambridge 1899; Flamant, *Stabilité des constructions, Résistance des matériaux*, Paris 1896; C. Bach, *Elastizität und Festigkeit*, 2. Auflage, Berlin 1894; A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 3, *Festigkeitslehre*, Leipzig 1900. Sehr wertvolle Experimentaluntersuchungen wurden neuerdings von J. Bauschinger angestellt und von ihm veröffentlicht in den *Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Labora-*

solcher Körper vorliegt, auf die, den gegebenen Verhältnissen nach, die mathematische Theorie nicht anwendbar ist, so scheint es doch, daß die Erweiterungen der Theorie, die nötig wären, um jene Daten mit zu umfassen, unausführbar sind, solange nicht größere Vollständigkeit in dem experimentellen Material erzielt worden ist.

Die Beschränkung der Theorie auf Verhältnisse, wo die Verzerrung bei Entfernung der Last verschwindet, drückt man gewöhnlich mit den Worten aus: der Körper soll innerhalb der Grenzen der „vollkommenen Elastizität" verzerrt werden. Die Beschränkung auf Verhältnisse, wo die meßbare Verzerrung der Belastung proportional ist, drückt man zuweilen so aus, daß man sagt: der Körper soll innerhalb der „Proportionalitätsgrenzen" (engl. „limits of linear elasticity") verzerrt werden. Der Ausdruck „Elastizitätsgrenze" wird bald in dem einen, bald in dem andern Sinne gebraucht, die Grenzen selbst werden zuweilen mit Hilfe einer Spannung, d. h. einer Last pro Flächeneinheit, zuweilen auch mit Hilfe der zu messenden Verzerrung bezeichnet.

Wenn die Verzerrung nach Entfernung der Last nicht verschwindet, so bezeichnet man die Verzerrung, die zurückbleibt, wenn die Last entfernt ist, als „Rückstand" oder „bleibende Formänderung" (engl. „set") und den Überschuß der durch die Last bewirkten Verzerrung über den Rückstand als „elastische Verzerrung" oder „Federung" (engl. ‚elastic strain"). Die Verzerrung setzt sich dann zusammen aus bleibender Formänderung und elastischer Verzerrung. Ein Körper, der verzerrt werden kann, ohne einen Rückstand zu behalten, befindet sich, wie man wohl sagt, im „Zustand der Muße" bis hin zu der Grenze, wo die Verzerrung einen Rückstand zu hinterlassen beginnt.

## § 77. Diagramme von Spannung und Verzerrung.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel für die wissenschaftliche Erforschung der Eigenschaften der durch Spannung beanspruchten Stoffe besteht in der Benutzung solcher Diagramme. Man zeichnet sie in der Regel so, daß man die ausgelöste Verzerrung als Abszisse und die Spannung, die sie bewirkt, als entsprechende Ordinate aufträgt. Bei den meisten Stoffen wählt man für diese Art der Untersuchung den Fall der Dehnung von Stäben; in dem Diagramm stellt die Ordinate die angreifende Spannung und die Abszisse die Dehnung einer Linie dar, die auf dem Stabe in seiner Längsrichtung nahe der Mitte ge-

*torium . . . in München*; diese Untersuchungen sind von A. Föppl fortgesetzt worden. Neue Tatsachen bezüglich der Natur des elastischen Rückstands in Metallen, die sich wahrscheinlich als sehr wichtig erweisen werden, sind zutage gefördert von J. A. Ewing und W. Rosenhain, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vols. 193, 195 (1900, 1901).

zogen ist. Die Dehnung wird durch irgend eine Art von Extensometer[1]) gemessen. Die Last in jedem Augenblick ist bekannt, und man berechnet die Spannung, indem man die Last über den Querschnitt des Probestabs im Anfangszustand gleichmäßig verteilt annimmt. Sollte eine beträchtliche Kontraktion des Querschnitts eintreten, so würde man die Spannung zu klein herausrechnen. Die Festigkeitsmaschine, mit der man die Experimente anstellt, ist bisweilen mit einem automatisch arbeitenden Registrierapparat[2]) versehen, der die Kurve zeichnet; allerdings geschieht dies bei verschiedenen Maschinentypen nicht in durchaus befriedigender Weise.[3])

Es ist klar, daß im allgemeinen die durch derartige Versuchsanordnungen aufgezeichneten Größen die in der angegebenen Weise berechnete Spannung und die von ihr unmittelbar hervorgerufene Dehnung sind. Es bedarf spezieller Beobachtungs- und Versuchsmethoden, wenn die elastische Verzerrung vom Rückstand unterschieden und die verschiedenen Einflüsse der Zeit berechnet werden sollen.

Der allgemeine Charakter der Kurve für mäßig feste Metalle im Falle der Dehnung ist heutzutage genau bekannt. In einem beträchtlichen Bereiche der Spannung verläuft sie nahezu geradlinig. Dann folgt ein Stück, wo die Kurve im allgemeinen nach unten zu konkav ist, sodaß die Verzerrung schneller wächst, als wenn sie der Spannung proportional wäre; in diesem Teil kommt die Verzerrung hauptsächlich auf dauernde Formänderung hinaus. Nimmt nun die Spannung weiter zu, so kommt ein Gebiet deutlich ausgeprägter Unstetigkeit, in dem ein geringes Anwachsen der Spannung eine bedeutende Zunahme der bleibenden Formänderung zur Folge hat. Den Punkt, wo dies Verhalten beginnt, bezeichnet man als die *„Fließgrenze"* (*„Streckgrenze"*, engl. *„Yield-Point"*). Nach weiterer beträchtlicher Steigerung der Spannung beginnt der Stab, an einer Stelle, die augenscheinlich durch zufällige Umstände bestimmt ist, sich einzuschnüren und zerreißt dort schließlich. Zu Beginn dieser örtlichen Einschnürung läßt die Beanspruchung gewöhnlich ein wenig nach, und der Stab zerreißt bei einer geringeren als der maximalen Spannung. Die Maximalspannung vor dem Bruch wird „Zerreiß-" oder „Zugfestigkeit" (engl. „breaking stress", „tenacity") des Materials genannt, die erforderliche Last heißt „Bruchbelastung".

Figur 8 zeigt den Verlauf der Kurve für Schweißeisen. Sie gibt eine der Bauschingerschen Kurven verjüngt wieder. Ähnliche Diagramme für weichen Stahl sind in vielen Büchern abgebildet. $A$ ist die Proportionalitätsgrenze; zwischen $A$ und $B$ wächst die Verzerrung

1) Verschiedene Arten von Extensometern sind beschrieben von Ewing und Unwin.

2) Unwin, *loc. cit.*

3) Bauschinger, *Mitteilungen*, XX (1891).

viel schneller als zwischen $O$ und $A$ und in wechselndem Verhältnis, $B$ ist die Fließgrenze, und $D$ stellt die Maximalspannung dar. Fig. 9

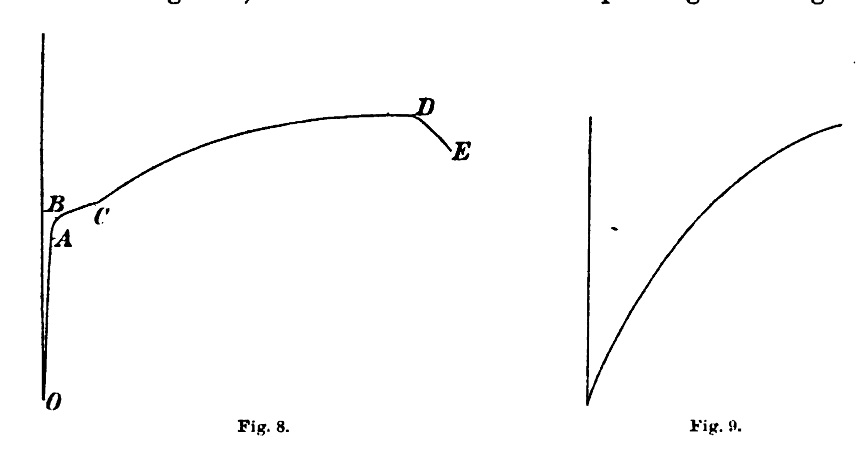



Fig. 8. Fig. 9.

ist nach einer der Bauschingerschen Kurven für Gußeisen wiedergegeben. Proportionalität läßt sich in merklichem Umfange nicht nachweisen, daher auch keine Proportionalitätsgrenze; ebenso fällt die Fließgrenze weg.

In der gleichen Weise kann man für Druck und Verkürzung Diagramme konstruieren, ihre Gestalt weicht aber von obigen im allgemeinen ab. Bei Gußeisen ist nachgewiesen, daß die Kurve stetig durch den Anfangspunkt geht und hier einen Wendepunkt hat.[1])

## § 78. Elastizitätsgrenzen.

Aus den Diagrammen ist nicht zu entnehmen die Grenze der vollkommenen Elastizität, wenn dieselbe von der Proportionalitätsgrenze abweicht. Die Regel ist, daß diese Grenzen voneinander verschieden sind, und zwar liegt die erstere unter der letzteren.[2]) Die numerischen Werte der Grenzen für Dehnung und Verkürzung haben bei einem und demselben Probestab gewöhnlich verschiedene Beträge. Die Grenze der vollkommenen Elastizität für irgend einen Spannungstypus würde sich bestimmen durch die größte Spannung, die keine bleibende Formänderung bewirkt; das Experiment jedoch kann nur etwas aussagen über die kleinste Spannung, bei der ein solcher Rückstand mittels unserer Instrumente noch nachweisbar ist. Die Proportionalitätsgrenze ist zwar aus den Diagrammen erkennbar, jedoch spielt auch bei ihr dieselbe Unsicherheit herein wie bei der Grenze

1) Siehe z. B. Ewing, *loc. cit.*, p. 31
2) Bauschinger, *Mitteilungen*, XIII (1886).

der vollkommenen Elastizität, insofern ihre Bestimmung von dem Grad der Genauigkeit abhängt, mit der sich die Diagramme zeichnen lassen.

Man kann die Proportionalitätsgrenze durch Überanstrengung des Materials hinaufsetzen.[1]) Wenn ein Stab aus nicht besonders hartem Stahl über die Elastizitätsgrenze und selbst über die Fließgrenze hinaus belastet und diese Belastung solange aufrecht erhalten wird, bis ein dauernder Zustand erreicht ist, so zeigt sich, daß er hernach bis zu einer höheren Grenze dem Proportionalitätsgesetze folgt als zuvor. Entfernt man die Last und läßt den Stab einige Zeit lang unbelastet, so ergibt sich, daß diese Grenze noch weiter hinaufgesetzt ist und womöglich über der Beanspruchung liegt, die mit der Überanstrengung verknüpft war.

Andererseits können die Elastizitätsgrenzen durch Überanstrengung des Materials auch herabgesetzt werden.[2]) Wenn man einen Stab aus Eisen oder weichem Stahl über die Fließgrenze hinaus beansprucht, dann entlastet und sofort wieder belastet, so zeigt er sich sehr unvollkommen elastisch, und seine Proportionalitätsgrenze ist stark gesunken; bleibt aber der Stab einige Tage unbelastet, so findet man, daß er sich von den Wirkungen der früheren Überanstrengung teilweise erholt hat, und zwar ist die Erholung umso vollständiger, je länger die Ruhezeit währt. Schmiedeeisen erholt sich bedeutend schneller als Stahl.

Bei Gußeisen, das noch nicht zu Versuchszwecken gedient hat, bewirkt jede Last, die eine meßbare Verzerrung hervorruft, eine gewisse bleibende Formänderung, und Proportionalität findet in merklichem Umfange nicht statt. Nach einigen Belastungen und Entlastungen nähert sich das Verhalten des Metalls mehr und mehr dem der übrigen Metalle, wie es beispielsweise in Fig. 8 geschildert ist. Dies legt den Gedanken nahe, daß die bei den ersten Versuchen eintretende bleibende Formänderung in der Entfernung eines Zustands von Anfangsspannung besteht.

Auch die Fließgrenze wird durch Überanstrengung hinaufgesetzt, wenn die ursprüngliche Beanspruchung über der ursprünglichen Fließgrenze liegt; der Betrag, um den sie gehoben wird, wächst, wenn man eine gewisse Ruhepause gewährt; er wächst noch mehr, wenn die Belastung, die mit der ursprünglichen Überanstrengung verknüpft war, konstant gehalten wird. Man bezeichnet diese Wirkung als „Versteifung durch Überanstrengung“.

Folgende Tabelle[3]) liefert einige Beispiele für die Proportionali-

1) *Ibid.*

2) Siehe z. B. Ewing, *loc. cit.*, p. 33 ff. und die Tafeln in Bauschingers *Mitteilungen*, XIII.

3) Ausgezogen aus Resultaten von Bauschinger, *Mitteilungen*, XIII. Wir

tätsgrenze und Fließgrenze einiger Eisenarten. Die in Atmosphären angegebenen Werte gelten in allen Fällen für einen einzelnen, noch nicht zu Versuchszwecken benutzten Probestab.

| Metall | Elastizitätsgrenze | Fließgrenze |
|---|---|---|
| Schweißeisen ........ | 1410 | 1920 |
| " | 1830 | 2180 |
| Gußeisen ............ | 2390 | 2780 |
| " | 2660 | 2960 |
| (Bessemer) Stahl ..... | 1780 | 2650 |

## § 79. Zeitliche Wirkungen. Plastizität.

Die Länge der Zeit, während der ein Körper eine beträchtliche Beanspruchung erleidet, beeinflußt im allgemeinen die hervorgebrachte Verzerrung, und die Länge der Zeit, während der ein Körper, den man verzerrt, unbelastet gewesen ist, beeinflußt im allgemeinen den Grad, bis zu dem er seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. Die letztere Erscheinung wurde von W. Weber 1835 entdeckt und wird *elastische Nachwirkung* (engl. *elastic after-working*) genannt; die erstere Tatsache scheint zuerst von Vicat[2]) im Jahre 1834 bemerkt zu sein. Wenn ein Körper über die Grenze der vollkommenen Elastizität hinaus verzerrt worden ist und dann entlastet wird, so verringert sich allmählich die bleibende Formänderung. Der Körper kehrt zu seiner ursprünglichen Form nie wieder ganz zurück; die endgültige Deformation heißt „dauernder Rückstand", „dauernde Formänderung" oder „Deformationsrest" (engl. „permanent set"), der Teil der Verzerrung, der allmählich verschwindet, heißt „Nachfederung" (engl. „elastic afterstrain"). Um die von Vicat beobachtete Wirkung zu erzielen, braucht man im allgemeinen beträchtliche Spannungen. Er fand, daß Drähte, die durch ein Viertel der Bruchbelastung gestreckt gehalten wurden, während der ganzen Dauer seiner Experimente (33 Monate) die Länge beibehielten, zu der sie durch diesen Zug gedehnt wurden, während ähnliche Drähte, die mit der halben Bruchbelastung gedehnt wurden, ein merkliches allmähliches Anwachsen der Dehnung aufwiesen. Das allmähliche Fließen stark gespannter fester Körper, wie es durch diese

können setzen: 1000 Atmosphären = 6,56 Tonnen pro Quadratzoll = $1{,}0136 \times 10^9$ C. G. S.-Spannungseinheiten.

1) *De fili Bombycini vi Elastica.* Göttingen 1841. Abdruck einer der *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1835, vorgelegten Abhandlung, übersetzt in den *Ann. Phys. Chem. (Poggendorff)*, Bde. 34 (1835) und 54 (1841).

2) *Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions. Annales des ponts et chaussées, 1er semestre,* 1834.

Experimente dargetan wird, ist von H. Tresca[1]) zum Gegenstand einer erschöpfenden Untersuchung gemacht worden. Er stellte mit Metallen Loch- und Quetschversuche an und gelangte zu Resultaten, die darauf schließen lassen, daß alle festen Körper, wenn sie sehr großem Druck unterworfen werden, schließlich fließen, d. h. eine bleibende Formänderung erfahren, die mit der Zeit zunimmt. Diese Fähigkeit der festen Körper, bei starker Spannung zu fließen, heißt *Plastizität.* Ein Körper heißt „hart“ (engl. „hard“), wenn die Kraft, die nötig ist, um eine beträchtliche bleibende Formänderung hervorzubringen, groß ist, „weich“ oder „plastisch“ (engl. „soft“, „plastic“), wenn sie klein ist. Eine Substanz muß als „flüssig“ bezeichnet werden, wenn beträchtliche bleibende Formänderung durch eine beliebige noch so kleine Kraft bewirkt werden kann, falls letztere nur hinreichend lange wirkt.

Bei Dehnungsversuchen zeigt sich eine gewisse Plastizität des Materials, sobald die Proportionalitätsgrenze überschritten ist.[2]) Entfernt man den über diese Grenze hinausgehenden Teil der Beanspruchung, so kann man einen gewissen Rückstand beobachten; dieser Rückstand nimmt aber ab mit einer Geschwindigkeit, die selbst abnimmt. Hält man die Belastung aufrecht, so wächst allmählich die Verzerrung und erreicht nach Verlauf einiger Zeit einen konstanten Wert. Wird mehrere Male entlastet und belastet, so nimmt sowohl der Rückstand wie die elastische Verzerrung zu. Nichts von alledem beobachtet man, wenn die Beanspruchung unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt. Die Möglichkeit solcher plastischer Wirkungen ist geeignet, die Versuchsergebnisse zu komplizieren, denn wenn zwei gleiche Probestäbe ungleich schnell belastet werden, wird der schneller belastete eine größere Zugfestigkeit und eine kleinere schließliche Dehnung zeigen als der andere. Derartige Unterschiede sind in der Tat beobachtet worden[3]); man hat jedoch gezeigt[4]), daß unter den gewöhnlichen Versuchsbedingungen Verschiedenheiten in der Belastungsgeschwindigkeit die Resultate nicht merklich beeinflussen.

## § 80. Zähigkeit fester Körper.

„Zähigkeit“ („innere Reibung“, engl. „viscosity“) ist ein allgemeiner Ausdruck für alle jene Eigenschaften des Stoffes, kraft deren der Widerstand, den ein Körper irgend einer Umgestaltung entgegensetzt, von der Geschwindigkeit abhängt, mit der diese Veränderung sich vollzieht. Das Vorhandensein zäher Widerstände schließt eine Zerstreuung der Energie

---

1) *Paris, Mémoires . . . par divers savans,* tt. 18 (1868) und 20 (1872). Ein Bericht über einige Experimente Trescas findet sich bei Unwin, *loc. cit.*, p. 46 ff.

2) Bauschinger, *Mitteilungen,* XIII (1886).

3) Vgl. Unwin, *loc. cit.*, p. 89.

4) Bauschinger, *Mitteilungen,* XX (1891).

der Substanz in sich: die kinetische Energie der Massenbewegung geht, wie man allgemein annimmt, in kinetische Energie molekularer Erregung über. Falls elastische Körper eine solche Eigenschaft besitzen, so würde sie sich am auffallendsten in dem Nachlassen der in dem Körper hervorgerufenen Schwingungen äußern. Ein beliebig geformter Körper werde gestoßen oder sonstwie plötzlich in Erschütterung versetzt. Er gerät dann in mehr oder minder schnelle Schwingungen, und die in ihm ausgelösten Spannungen würden, wenn tatsächlich Zähigkeit vorliegt, zum Teil von den Verschiebungen und zum Teil von der Geschwindigkeit, mit der sie hervorgerufen werden, abhängen. Der von der Änderungsgeschwindigkeit abhängende Teil der Spannungen würde als zäher Widerstand in die Erscheinung treten und schließlich die Schwingungsbewegung zerstören. Nun zerstört sich tatsächlich die schwingende Bewegung elastischer fester Körper im Laufe der Zeit, diese Dämpfung scheint aber nicht die Folge zäher Widerstände vom gewöhnlichen Typus zu sein, d. h. solcher Widerstände, die den Verzerrungsgeschwindigkeiten proportional sind. Lord Kelvin[1]) hat dargelegt, daß, wenn man es mit einem derartigen Widerstande allein zu tun hätte, die entsprechende Abnahme der Schwingungsamplitude in der Zeiteinheit umgekehrt proportional dem Quadrat der Periode sein würde; eine Reihe von Experimenten, Drillungsschwingungen betreffend, zeigte aber, daß dies Gesetz in Wirklichkeit nicht erfüllt ist.

Lord Kelvin zeigte, daß man von dem Nachlassen der Schwingungen sich Rechenschaft geben könne durch die Annahme, daß selbst bei den sehr kleinen mit schwingenden Bewegungen verknüpften Verzerrungen die elastische Nachwirkung und Plastizität ins Spiel kommt. Letztere sowohl wie die zähen Widerstände vom gewöhnlichen Typus fallen in die Klasse der *Hysteresis*-Erscheinungen. Diese alle haben das gemein, daß der Zustand des betreffenden Körpers in jedem Augenblick von seinen früheren Zuständen sowohl wie von den äußeren Bedingungen (Kräften, Temperatur usw.), die in dem Augenblick vorwalten, abhängig erscheint. Hysteresis schließt stets Irreversibilität in der Folge von Zuständen, die der Körper durchläuft, in sich und wird im allgemeinen auf die molekulare Struktur des Stoffes zurückgeführt. Dementsprechend haben verschiedene Forscher[2]) Molekular-

1) Sir W. Thomson, Artikel „Elasticity", *Ency. Brit.*, bezw. *Math. and Phys. Papers,* vol. 3, Cambridge 1890, p. 27.

2) Folgende seien erwähnt: J. C. Maxwell, Artikel „Constitution of Bodies", *Ency. Brit*, oder *Scientific Papers*, vol. 2, Cambridge 1890; J. G. Butcher, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 8 (1877); O. E. Meyer, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 78 (1874); L. Boltzmann, *Ann. Phys. Chem. (Poggendorff)*, Ergzgsbd. 7 (1878). Einen vortrefflichen Bericht über die Theorien findet der Leser in dem Artikel von F. Braun in Winkelmanns *Handbuch der Physik,* Bd. 1 (Breslau 1891), p. 321—342.

wirkungstheorien ersonnen, um die Zähigkeit und die elastische Nachwirkung zu erklären.

## § 81. Äolotropie infolge dauernder Formänderung.

Eine der Veränderungen, die ein Körper erleidet, der eine dauernde Formänderung erfahren hat, kann die sein, daß das früher isotrope Material äolotrop wird. Das bekannteste Beispiel hierfür ist das eines durch dauernde Torsion äolotrop gewordenen Stabes. Warburg[1]) fand, daß die elastischen Erscheinungen an einem Kupferdraht, dem ein dauernder Drall mitgeteilt war, sämtlich sich durch die Annahme erklären ließen, daß die Substanz des Drahtes die Äolotropie eines Kristalls aus dem rhombischen System angenommen habe. Wurde an den Draht ein Gewicht gehängt, so bewirkte dieses außer einer Dehnung einen kleinen, mit einer teilweisen Entdrillung des Drahtes gleichwertigen Schub[2]); es war dies eine elastische Verzerrung, die nach Entfernung der Last wieder verschwand. Dies Experiment ist von Wichtigkeit, da es zeigt, daß das Fabrikationsverfahren beträchtliche Äolotropie in Stoffen hervorrufen kann, die im Rohzustande isotrop sind, mithin daß Festigkeitsberechnungen, die auf die Anwendung der Gleichungen isotroper Elastizität gegründet sind, streng genommen auf sie nicht übertragen werden dürfen.[3])

## § 82. Wiederholte Belastung.

Ein Körper kann innerhalb seiner Elastizitätsgrenzen wieder und wieder verzerrt werden, ohne Schaden zu nehmen; so kann eine Uhrfeder Jahrelang hundertundzwanzig Millionen mal jährlich hin- und herschwingen, ohne an Federung einzubüßen. Anders liegt die Sache aber, wenn ein Körper wiederholt durch plötzlich sich ändernde Lasten über seine Elastizitätsgrenzen hinaus verzerrt wird. Aus den Experimenten, die Wöhler[4]) hierüber angestellt hat, schließt man, daß der Widerstand eines Körpers gegen irgend eine Art der Deformation durch schnell wiederholte Belastungen ernstlich herabgemindert werden kann. Das Resultat scheint hinzudeuten auf eine allmähliche Verschlechterung[5]) der Qualität des wiederholter Belastung unter-

---

Eine neuere Untersuchung über die Zähigkeit von Metallen und Kristallen gibt W. Voigt, *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann)*, Bd. 47 (1892).

1) *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann)*, Bd. 10 (1880).

2) Vgl. Lord Kelvin, *loc. cit.*, *Math. and Phys. Papers*, vol. 3, p. 82.

3) Vgl. Unwin, *loc. cit.*, p. 25.

4) *Über Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*, Berlin 1870. Einen Bericht über die Wöhlerschen Experimente gibt Unwin, *loc. cit.*, pp. 356 ff.

5) Eine andere Erklärung hat K. Pearson, *Messenger of Math.*, vol. 20 (1890) vorgeschlagen.

worfenen Materials; man kann dies durch die Beobachtung bestätigen, daß Stäbe nach zahlreichen Belastungen und Entlastungen bei einer Beanspruchung zerreißen können, die weit unter der statischen Bruchbelastung liegt.

Bauschinger[1]) stellte über denselben Gegenstand mehrere unabhängige Versuchsreihen an. Die Belastung wurde dabei 100 mal in der Minute umgekehrt, und die Probestäbe, die so lange aushielten, wurden einigen Millionen Wiederholungen alternierender Spannung ausgesetzt. In einigen Fällen deckten diese Versuche, die das Material hart auf die Probe stellten, Blasen in ihm auf, aber das allgemeine Ergebnis war, daß die Festigkeit eines Stückes durch wiederholte Belastung nicht verringert wird, vorausgesetzt daß die Last stets unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt.

Eine analoge Eigenschaft der Körper ist jene, auf die Lord Kelvin[2]) aufmerksam gemacht hat und die er als „elastische Ermüdung" bezeichnet. Er beobachtete, daß die Drillungsschwingungen von Drähten viel schneller nachlassen, wenn man die Drähte Stunden oder Tage lang hatte schwingen lassen, als dann, wenn sie nach einer Ruhepause von einigen Tagen in Schwingung versetzt und ohne weiteres sich selbst überlassen wurden.

Derartige experimentelle Ergebnisse weisen darauf hin, wie wichtig es ist, bei Berechnung der Festigkeit eines Bauwerks die Art und die Häufigkeit der Beanspruchung zu berücksichtigen.

## § 83. Hypothesen über die Bedingungen des Bruchs.

Über die Bedingungen, unter denen ein Körper bricht oder ein Bauwerk unsicher wird, sind mancherlei Hypothesen aufgestellt worden. So nahm Lamé[3]) an, daß die größte Zugspannung notwendig unter einer gewissen Grenze liegen müsse. Poncelet[4]) und nach ihm Saint-Venant[5]) machten die Annahme, daß die größte Dehnung unterhalb einer gewissen Grenze liegen müsse. Bei einem auf Dehnung beanspruchten Stab ergeben diese Hypothesen dasselbe Maß für die *Bruchgefahr*, aber im allgemeinen führen sie zu verschiedenen Grenzen für die zulässige Belastung.[6]) Tresca andererseits und nach ihm G. H. Darwin[7])

1) *Mitteilungen*, XX (1891) und XXV (1893), herausgegeben von Föppl.

2) *Loc. cit., Math. and Phys. Papers*, vol. 3, p. 22.

3) Siehe z. B. die in der Einleitung (Fußnote 39) angezogene Abhandlung von Lamé und Clapeyron.

4) Siehe Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, art. 995.

5) Siehe insbesondere den *Historique Abrégé* in Saint-Venants Ausgabe der *Leçons de Navier*, p. CXCIX—CCV.

6) Beispiele betreffend siehe Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, p. 550 Fußnote.

7) „On the stresses produced in the interior of the Earth by the weight

benutzen als Maß für die Bruchgefahr die Maximaldifferenz zwischen der größten und kleinsten Hauptspannung, und eine nicht erheblich abweichende Grenze würde man erhalten, wenn man mit Coulomb[1]) annimmt, daß der größte in dem Material verursachte Schub ein Maß für jene Gefahr bietet. Eine interessante Modifikation dieser Anschauung hat O. Mohr[2]) angedeutet und geometrisch ausgeführt. Dieselbe würde es uns ermöglichen, die mögliche Abhängigkeit der Sicherheitsbedingung von der Natur der Last, d. h. von der Art der im Körper ausgelösten Spannung zu beurteilen. Art und Weise der Belastung und Häufigkeit derselben sind Dinge, die gleichfalls mit in Rechnung gezogen werden müßten. Über die Bedingungen des Bruchs herrscht noch wenig Klarheit, möglicherweise hängen sie von solchen und andern zufälligen Umständen ab. Die Frage ist gleichzeitig sehr wichtig, da eine befriedigende Beantwortung derselben in manchen Fällen, wo Bauwerke unerwartet als zu schwach sich erweisen, die Ursachen aufdecken und in andern Fällen den Weg finden lassen würde, Material zu sparen, ohne die Sicherheit in Frage zu stellen.

Bei all diesen Hypothesen wird vorausgesetzt, daß die Spannung oder Verzerrung, die in einem Körper von gegebener Form durch eine gegebene Belastung tatsächlich hervorgerufen wird, irgendwie berechnet werden kann. Das einzige bekannte Verfahren, diese Größen zu berechnen, beruht auf der Anwendung der mathematischen Elastizitätstheorie oder irgend einer praktischen Regel, die schlecht und recht eine Folgerung derselben ausdrückt. Nehmen wir an, der Körper sei einem gegebenen Lastensystem unterworfen und wir könnten die Gleichungen des elastischen Gleichgewichts bei den gegebenen Randbedingungen lösen. Dann läßt sich die Spannung und Verzerrung in jedem Punkt des Körpers bestimmen, und die Hauptspannungen und Hauptdehnungen lassen sich ermitteln. Sei $T$ die größte Hauptzugspannung, $S$ die größte Differenz zweier Hauptspannungen in demselben Punkt, $e$ die größte Dehnung. $T_0$ sei die aus Dehnungsversuchen bestimmte Zugfestigkeit. Nach der Hypothese der größten Zugspannung darf dann $S$ einen gewissen Bruchteil von $T_0$ nicht übersteigen. Nach der Hypothese der Maximalspannungsdifferenz muß $S$ kleiner sein als ein gewisser Bruchteil von $T_0$. Nach der Hypothese

of Continents and Mountains", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 173 (1882). Dasselbe Maß wird in dem Bericht über Prof. Darwins Werk in Kelvin und Taits *Nat. Phil.*, II. Teil art. 832′ zugrunde gelegt.

1) „Essai sur une application des règles de Maximis etc.", *Mém. par divers Savans*, 1776, Einleitung.

2) *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, Bd. 44 (1900). Eine Auseinandersetzung über die Anschauungen Mohrs und anderer Autoren gibt Voigt in den *Ann. Phys.* (Ser. 4), Bd. 4 (1901).

der größten Dehnung endlich darf $e$ einen gewissen Bruchteil von $T_0/E$, wo $E$ der Youngsche Modul des Stoffes ist, nicht übersteigen. Diese Bedingungen lassen sich so schreiben:

$$T < T_0/\Phi, \quad S < T_0/\Phi, \quad e < T_0/\Phi E,$$

und die darin auftretende Zahl $\Phi$ wird der „Sicherheitskoeffizient" genannt.

Die meisten englischen und amerikanischen Ingenieure legen die erste Hypothese zugrunde, lassen aber $\Phi$ von der Art der Verzerrung abhängen, die der Körper bei der Verwendung, zu der er bestimmt ist, voraussichtlich erfahren wird. Für Kessel setzt man den Koeffizienten gleich 6, für Träger gleich 10, für Achsen gleich 6, für Eisenbahnbrücken gleich 6 bis 10 und für Schiffsschraubenwellen und auf plötzliche Belastungsumkehrung beanspruchte Maschinenteile gleich 12. In Frankreich und Deutschland ist vielfach die Hypothese der größten Dehnung gebräuchlich.

Neuerdings sind Versuche angestellt worden, um zu ermitteln, welche von diesen Hypothesen die Ergebnisse des Experiments am besten darstellt. Die Tatsache, daß kurze Pfeiler durch longitudinalen Druck zermalmt werden können, schließt die Hypothese der größten Zugspannung als unzulässig aus. Wollte man sie durch eine die größte Spannung überhaupt betreffende Hypothese ersetzen, wonach also Bruch eintreten würde, wenn irgend eine (Zug- *oder Druck-*)Spannung eine gewisse Grenze überschreitet, so würden die Experimente eine große Bedeutung gewinnen, die A. Föppl[1]) mit Körpern angestellt hat, die sehr starkem, über die Oberfläche gleichmäßigen Druck unterworfen wurden; hierbei zeigte sich nämlich, daß Drucke, wie sie ihm zu Gebote standen, Bruch nicht hervorzubringen vermögen. Diese Versuche schließen auch die Möglichkeit aus, die Hypothese der größten Dehnung durch eine Hypothese der größten Verzerrung zu ersetzen. Es bleiben also noch die Hypothese der größten Dehnung und die Hypothese der Maximalspannungsdifferenz zu prüfen. Wehages[2]) Experimente mit schmiedeeisernen Blöcken, die in zwei zueinander senkrechten Richtungen auf gleichen Zug (oder Druck) beansprucht wurden, haben bezüglich der Hypothese der größten Dehnung Zweifel hervorgerufen. Aus Versuchen mit Metallröhren, die verschiedenen Systemen kombinierter Spannung unterworfen wurden, schloß J. J. Guest[3]), daß die Hypothese der Maximalspannungsdifferenz diejenige ist, die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmt. Die allgemeine Tendenz in der heutigen technischen Literatur scheint dahin zu gehen, der Proportionalitäts- und der Fließgrenze mehr Gewicht beizulegen als

1) *Mitteilungen* (München) XXVII (1899).
2) *Mitteilungen der mechanisch-technischen Versuchsanstalt zu Berlin*, 1888.
3) *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 43 (1900). Mohr *(loc. cit.)* kritisiert Guest.

der Grenze der vollkommenen Elastizität und der Zugfestigkeit und die Bedeutung der dynamischen Festigkeitsversuche neben der der gewöhnlichen statischen Zug- und Biegungsversuche zu betonen.

### § 84. Ziel der mathematischen Theorie der Elastizität.

Zahlenwerte der bei praktischen Problemen vorkommenden Größen sind sehr geeignet, die Kleinheit der Verzerrungen darzutun, wie sie in als sicher befundenen Bauwerken auftreten. Beispiele solcher Werte wurden in den §§ 1, 48, 71, 78 gegeben. Ein Stück Eisen oder Stahl, dessen Proportionalitätsgrenze $10\frac{1}{2}$ Tonnen pro Quadratzoll (1 Quadratzoll 6,45148 = $cm^2$) und dessen Fließgrenze 14 Tonnen pro Quadratzoll beträgt, während der Youngsche Modul gleich 13000 Tonnen pro Quadratzoll ist, würde bei einer Belastung von 6 Tonnen pro Quadratzoll eine Dehnung im Betrage von 0,00046 erfahren. Selbst wenn die Beanspruchung nahezu bis zur Fließgrenze gesteigert würde, würde man sehr feine Beobachtungsmittel anwenden müssen, um eine Dehnung festzustellen. Die Vernachlässigung von Quadraten und Produkten der innerhalb der Sicherheitsgrenzen gelegenen Verzerrungen in Eisen- und Stahlkonstruktionen kann zu ernstlichen Fehlern keinen Anlaß geben. Die Tatsache, daß die Elastizität von Metallen bei weit unter die Proportionalitätsgrenze fallender Belastung sehr unvollkommen ist, könnte eine ernstlichere Fehlerquelle sein, da Rückstand und elastische Nachwirkung in der mathematischen Theorie unberücksichtigt bleiben; die Rückstände jedoch, die unterhalb der Proportionalitätsgrenze vorkommen, sind stets äußerst klein. Die von ungleichmäßiger Erwärmung herrührenden Wirkungen, die in der Theorie eine befriedigende Behandlung nicht finden, sind in der Praxis von großer Bedeutung. Einige Beispiele für die Anwendung der Theorie auf Fragen der Festigkeitslehre mögen hier genannt sein: Nach der Saint-Venantschen Theorie der Torsion von Prismen läßt sich voraussagen, daß eine Welle, die durch Torsion ein Kräftepaar überträgt, durch das Vorhandensein einer nahezu scharfkantigen Rinne oder eines zur Wellenachse parallelen Spalts erheblich geschwächt wird. Nach der Theorie des Gleichgewichts einer durch eine Kugel begrenzten Masse läßt sich voraussagen, daß der Schub in der Nähe einer kugelförmigen Blase doppelt so groß sein wird wie in einer gewissen Entfernung. Aus derartigen Theorien würde zu folgern sein, daß der Sicherheitskoeffizient bei Wellen, die ein Kräftepaar übertragen, verdoppelt werden müßte, wenn Hohlräume vorkommen. Andererseits läßt sich zeigen, daß in gewissen Fällen eine plötzlich angreifende Last die doppelte[1]) Verzerrung hervor-

1) Dies scheint zuerst von Poncelet in seiner *Introduction à la Mécanique industrielle, physique et expérimentale* vom Jahre 1830 ausdrücklich bemerkt zu sein; siehe Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, art. 988.

rufen kann wie dieselbe Last bei allmählicher Anbringung und daß eine plötzlich umgekehrte Belastung eine Verzerrung bewirken kann, die dreimal so groß ist, wie wenn man dieselbe Last allmählich angreifen ließe. Diese Resultate lassen uns erwarten, daß wir für plötzliche Belastungen und Lastumkehrungen weitere Sicherheitskoeffizienten brauchen, und sie lassen vermuten, daß diese Extra-Faktoren den Wert 2 und 3 haben. Eine weitere Beeinträchtigung der Festigkeit ist bei Bauwerken, die teilweise aus sehr dünnen, in ihrer Erstreckung auf Druck beanspruchten Stäben oder Platten bestehen, durch die Möglichkeit gegeben, daß diese Teile knicken. Die Knickbedingungen lassen sich bisweilen aus der Theorie der elastischen Stabilität ermitteln, und diese Theorie kann dann ein Verfahren an die Hand geben, jene Teile durch Stützen zu sichern und für letztere die geeignete Stelle zu bestimmen, sodaß bei kleinstem Materialverbrauch die stärkste Konstruktion erzielt wird; das Resultat bleibt aber, jedenfalls bei Bauwerken, die kleine dauernde Formänderungen erleiden können, ein bloßer Ansatz, der der experimentellen Bestätigung bedarf. Überdies beruhen, wie vorhin auseinander gesetzt wurde, alle Festigkeitsberechnungen auf irgend einem aus der mathematischen Theorie abgeleiteten Resultat.

Genauere Aufschlüsse über das Verhalten fester Körper vermag die Theorie zu geben, wenn es sich darum handelt, an sehr genauen physikalischen Messungen Korrektionen anzubringen.[1]) Zum Beispiel ist es gebräuchlich, die Temperatur anzugeben, bei der Normalmaße die richtige Länge zeigen; es scheint aber, daß der Einfluß der Luftdruckschwankungen, wie sie tatsächlich vorkommen, nicht zu klein ist, um praktische Bedeutung zu haben. Da immer genauere Instrumente für Längenmessungen ersonnen werden, so liegt wahrscheinlich die Zeit nicht mehr fern, wo der Einfluß der verschiedenen Arten der Unterstützung auf die Länge eines Maßstabes zu berücksichtigen sein wird. Ein Beispiel liefert die Beobachtung, daß der Rauminhalt eines Gefäßes, das mit Flüssigkeit gefüllt werden soll, wächst, wenn die Flüssigkeit hineingegossen wird, offenbar infolge des überwiegenden Drucks in den Teilen der Flüssigkeit, die sich nahe am Boden des Gefäßes befinden. Ferner beeinflußt die Durchbiegung der Magnetstäbe von Magnetometern die Messung der magnetischen Kraft. Viele von den einfacheren Ergebnissen der mathematischen Theorie werden wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Verbesserung der Meßwerkzeuge wichtige Anwendungen erfahren.

1) Vgl. C. Chree, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 2 (1901).

# Kapitel V.

## Gleichgewicht isotroper elastischer fester Körper.

### § 85. Rekapitulation der allgemeinen Theorie.

Als Einleitung zur weiteren Behandlung der Elastizitätstheorie sollen hier einige Teile der allgemeinen Theorie kurz rekapituliert werden.

a) *Spannung.* Der Spannungszustand in einem Punkte eines Körpers ist bestimmt, wenn die Spannung auf jede durch den Punkt gehende Ebene bekannt ist. Die Spannung berechnet sich als Kraft pro Flächeneinheit. Bezeichnet $\nu$ die Richtung der Normalen einer Ebene, so wird die Spannung auf diese Ebene durch rechtwinklige Komponenten $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ parallel den Koordinatenachsen gekennzeichnet. Die Spannung auf die zu $\nu$ normale Ebene drückt sich durch die Spannungen auf die zu den Koordinatenachsen senkrechten Ebenen mittels folgender Gleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(x, \nu) + X_y \cos(y, \nu) + X_z \cos(z, \nu), \\ Y_\nu &= Y_x \cos(x, \nu) + Y_y \cos(y, \nu) + Y_z \cos(z, \nu), \\ Z_\nu &= Z_x \cos(x, \nu) + Z_y \cos(y, \nu) + Z_z \cos(z, \nu). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Größen $X_x, \ldots$ sind durch die Gleichungen verknüpft

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x. \tag{2}$$

Die sechs Größen $X_x$, $Y_y$, $Z_z$, $Y_z$, $Z_x$, $X_y$ sind die „Komponenten der Spannung". Ihre Werte in einem beliebigen Punkt hängen im allgemeinen von der Lage des Punktes ab.

b) *Spannungsgleichungen.* In einem Körper, der sich unter der Wirkung von Massenkräften und Oberflächenspannungen im Gleichgewicht befindet, befriedigen die Spannungskomponenten in jedem Punkte des Körpers folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \varrho X = 0, \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

In diesen Gleichungen ist $\varrho$ die Dichte und $(X, Y, Z)$ die Massenkraft pro Masseneinheit.

Die Spannungskomponenten genügen auch gewissen Gleichungen an der Oberfläche des Körpers. Bezeichnet $\nu$ die Richtung der nach außen gezogenen Normalen in einem Punkte der Oberfläche des Körpers und $(\overline{X}_\nu, \overline{Y}_\nu, \overline{Z}_\nu)$ die Oberflächenspannung in jenem Punkte, so müssen die Komponenten der Spannung in dem Punkte die Gleichungen (1) befriedigen, wenn darin $\overline{X}_\nu, \ldots$ für $X_\nu, \ldots$ geschrieben wird.

c) *Verschiebung.* Unter der Wirkung der Kräfte ist der Körper aus der Konfiguration, die er bei verschwindenden Spannungskomponenten einnehmen würde, verschoben. Bezeichnet $(x, y, z)$ den Ort eines Punktes des Körpers im ungespannten Zustand und $(x + u, y + v, z + w)$ den Ort desselben Punktes bei wirkenden Kräften, so bezeichnet $(u, v, w)$ die Verschiebung, und die Verschiebungskomponenten $u, v, w$ sind Funktionen von $x, y, z$.

d) *Verzerrung.* Die Verzerrung in einem Punkte ist bestimmt, wenn die Dehnung jedes von dem Punkte ausgehenden Linienelementes bekannt ist. Ist die relative Verschiebung klein, so ist die Dehnung eines in die Richtung $(l, m, n)$ fallenden Linienelement gleich

$$e_{xx} l^2 + e_{yy} m^2 + e_{zz} n^2 + e_{yz} mn + e_{zx} nl + e_{xy} lm, \tag{4}$$

wo die $e_{xx}, \ldots$ folgende Größen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Größen $e_{xx}, \ldots e_{yz}$ sind die „Komponenten der Verzerrung“. Die Größen $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$, die durch die Gleichungen

$$2\varpi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\varpi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\varpi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6}$$

bestimmt sind, sind die Komponenten einer Vektorgröße, der „Drehung“. Die Größe $\Delta$, die durch die Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{7}$$

bestimmt ist, ist die „Dilatation“.

e) *Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung.* In einem elastischen Körper, der vom spannungslosen Zustand aus etwas verzerrt ist, sind die Spannungskomponenten lineare Funktionen der Verzerrungskomponenten. Wenn das Material isotrop ist, haben wir

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \quad Y_y = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}, \quad Z_z = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}, \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \quad Z_x = \mu e_{zx}, \quad X_y = \mu e_{xy}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

anders aufgelöst lauten diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}\{X_x - \sigma(Y_y + Z_z)\}, & e_{yz} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}\{Y_y - \sigma(Z_z + X_x)\}, & e_{zx} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} Z_x, \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}\{Z_z - \sigma(X_x + Y_y)\}, & e_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{10}$$

Die Größe $E$ ist der „Youngsche Modul", die Zahl $\sigma$ die „Poissonsche Konstante", die Größe $\mu$ ist die „Steifigkeit" (engl. „rigidity"), die Größe $\lambda + \frac{2}{3}\mu = k$ ist der „Kompressionsmodul".

## § 86. Linear veränderliche Spannung.

Wir betrachteten früher einige Beispiele gleichförmiger Spannung in Zusammenhang mit der Definition von $E$, $k$, usw. (§ 69). Die nächsteinfachen Fälle sind jene, bei denen die Spannungskomponenten lineare Funktionen der Koordinaten sind. Wir wollen die Resultate, die sich bezüglich einiger besonderer Spannungsverteilungen ergeben, verzeichnen.

a) Die $z$-Achse sei vertikal nach oben gerichtet, alle Spannungskomponenten außer $Z_z$ seien null, und es sei $Z_z = g\varrho z$, wo $\varrho$ die Dichte des Körpers und $g$ die Beschleunigung der Schwere.

Die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts (3) sind erfüllt, wenn $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$. Mithin kann unser Spannungszustand in einem beliebig geformten Körper durch sein eigenes Gewicht bewirkt werden, vorausgesetzt daß an seiner Oberfläche geeignete Spannungen angreifen. Die Spannung, die auf die Oberfläche wirkt, muß vom Betrage $g\varrho z \cos(z, \nu)$ und vertikal nach oben gerichtet sein. Wenn der Körper ein Zylinder oder Prisma von beliebiger Querschnittsform ist und der Ursprungspunkt am unteren Ende sich befindet, so wird der Zylinder durch gleichförmig über die obere Grundfläche verteilten Zug gehalten. Ist $l$ die Länge des Zylinders, so ist dieser Zug gleich $g\varrho l$, und die resultierende Zugkraft ist gleich dem Gewichte des Zylinders. Das untere Ende und der Mantel sind spannungsfrei.

Die Verzerrung ist gegeben durch die Gleichungen

$$e_{xx} = e_{yy} = -\frac{\sigma g \varrho z}{E}, \quad e_{zz} = \frac{g\varrho z}{E}, \quad e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0.$$

Um die Verschiebung zu finden[1]), nehmen wir zunächst die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{g\varrho z}{E},$$

welche ergibt

1) Wir führen die Rechnung durch, um die Methode an einem Beispiel zu kennzeichnen.

$$w = \frac{1}{2} \frac{g\varrho}{E} z^2 + w_0,$$

wo $w_0$ eine Funktion von $x$ und $y$. Die Gleichungen $e_{yz} = e_{zx} = 0$ liefern

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

daher haben wir

$$u = -z\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0, \quad v = -z\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0,$$

wo $u_0$ und $v_0$ Funktionen von $x$ und $y$. Die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma g \varrho z}{E}$$

ergeben

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\sigma g \varrho}{E}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\sigma g \varrho}{E}.$$

Die Gleichung $e_{xy} = 0$ liefert

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die $w_0$ enthaltenden Gleichungen sind nur unter der Bedingung befriedigt, daß

$$w_0 = \frac{1}{2} \frac{\varrho g \sigma}{E}(x^2 + y^2) + \alpha' x + \beta' y + \gamma,$$

wo $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma$ Konstanten bedeuten. Die $u_0$, $v_0$ enthaltenden Gleichungen zeigen, daß $u_0$ eine Funktion von $y$, etwa $F_1(y)$, und $v_0$ eine Funktion von $x$, etwa $F_2(x)$, ist und daß diese Funktionen die Gleichung befriedigen

$$\frac{\partial F_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x} = 0;$$

diese Gleichung verlangt aber, daß $\partial F_1(y)/\partial y$ und $\partial F_2(x)/\partial x$ konstante Größen, etwa $\gamma'$ bezw. $-\gamma'$, sind. Wir haben somit

$$F_1(y) = \gamma' y + \alpha, \quad F_2(x) = -\gamma' x + \beta,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ Konstante bedeuten. Die vollständigen Ausdrücke für die Verschiebungen lauten also:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\sigma g \varrho}{E} zx - \alpha' z + \gamma' y + \alpha, \\ v &= -\frac{\sigma g \varrho}{E} zy - \beta' z - \gamma' x + \beta, \\ w &= \frac{1}{2} \frac{g\varrho}{E}(z^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2) + \alpha' x + \beta' y + \gamma. \end{aligned}\right\}$$

Die Glieder, die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ enthalten, stellen eine Verrückung dar, wie sie bei einem starren Körper stattfinden könnte. Erleidet der Zylinder keine Verschiebung durch Drehung, so können wir $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$

streichen. Wird er nicht seitlich verschoben, so können wir $\alpha$, $\beta$ weglassen. Falls der Punkt (0, 0, $l$) keine Vertikalverschiebung erfährt, müssen wir haben:

$$\gamma = -\tfrac{1}{2}\frac{g\varrho l^2}{E}.$$

Die Verschiebung ist dann gegeben durch die Gleichungen

$$u = -\frac{\sigma g\varrho z x}{E}, \quad v = -\frac{\sigma g\varrho y z}{E}, \quad w = \tfrac{1}{2}\frac{g\varrho}{E}(z^2 + \sigma x^2 + \sigma y^2 - l^2). \quad (11)$$

Jeder Querschnitt des Zylinders wird zu einem Umdrehungsparaboloid mit der vertikalen Zylinderachse als Achse verzerrt, außerdem schrumpfen die Querschnitte zusammen in einem dem Abstand vom freien (unteren) Ende proportionalen Verhältnis.

b) Zu einem allgemeineren Fall[1]) gelangt man durch den Ansatz

$$X_x = Y_y = -p + g\varrho' z, \quad Z_z = -p + g(\varrho - \varrho')\,l + g\varrho z,$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Dieser Spannungszustand kann in einem beliebig geformten Zylinder von der Länge $2l$ erhalten werden, der in einer Flüssigkeit von der Dichte $\varrho'$ so eintaucht, daß seine Achse vertikal steht und ihr höchster Punkt (0, 0, $l$) fest ist; $p$ ist dann der Druck der Flüssigkeit in der Höhe des Zylinderschwerpunkts.

Die Verschiebung ist, wie sich zeigen läßt, durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{x} = \frac{v}{y} &= -\frac{1}{E}\left[(1-2\sigma)\,p + \sigma g\,(\varrho - \varrho')\,l + g\{\sigma\varrho - (1-\sigma)\,\varrho'\}z\right]. \\ w &= -\frac{z-l}{E}\left[(1-2\sigma)\,p - g\,(\varrho - \varrho')\,l\right] + \tfrac{1}{2}\,g\,(\varrho - 2\sigma\varrho')\,(z^2 - l^2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{E}\,g\,\{\sigma\varrho - (1-\sigma)\,\varrho'\}. \end{aligned}\right\} (12)$$

c) Setzen wir

$$X_x = Y_y = Z_z = -p + g\varrho z, \quad Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

so erhalten wir den Spannungszustand in einem beliebig geformten Körper, der in einer Flüssigkeit von der gleichen Dichte eintaucht, $p$ bedeutet dabei den Druck in der Höhe des Ursprungspunktes.[2]) Die Verschiebung ist, wie sich zeigen läßt, durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu}(-px + g\varrho z x), \quad v = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}(-py + g\varrho z y), \\ w &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\left\{-pz + \tfrac{1}{2}\,g\varrho\,(z^2 - x^2 - y^2)\right\}. \end{aligned}\right\} (13)$$

d) Alle Spannungskomponenten außer $Y_z$ und $Z_x$ seien null, $Y_z$ und $Z_x$ seien durch die Gleichungen gegeben

---

1) C. Chree, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 2 (1901).

2) E. und F. Cosserat, *Paris C. R.* t. 133 (1901).

$$\frac{Y_z}{x} = \frac{Z_x}{-y} = \mu\tau,$$

wo $\tau$ eine Konstante und $\mu$ die Steifigkeit.

Dieser Spannungszustand kann in einem Stabe von kreisförmigem Querschnitt, dessen Achse mit der $z$-Achse zusammenfällt, durch Spannungen erhalten werden, die nur an den Endflächen angreifen. Ist $a$ der Radius des Kreises, so sind die auf die Grundflächen wirkenden Spannungen statisch gleichwertig mit Kräftepaaren vom Moment $\frac{1}{2}\pi a^4 \mu\tau$ um die $z$-Achse, so daß wir den Fall eines runden Stabes, der durch entgegenwirkende Momente gedrillt gehalten wird, vor uns haben.

Die Verschiebung ist, wie sich zeigen läßt, durch die Gleichungen gegeben

$$u = -\tau yz, \quad v = \tau zx, \quad w = 0, \tag{14}$$

sodaß jeder Querschnitt in seiner eigenen Ebene durch einen Winkel $\tau z$ gedreht wird, der dem Abstand von einem festen Querschnitt proportional ist. Die Konstante $\tau$ mißt den Drall des Stabes.

## § 87. Durch Kräftepaare gebogener Stab.[1])

Unser nächstes Beispiel linear veränderlicher Spannung ist von hervorragender Bedeutung. Wir setzen die Spannungskomponente $Z_z$ gleich $-ER^{-1}x$, wo $R$ eine Konstante ist, und lassen die übrigen Spannungskomponenten verschwinden. Wenn dieser Spannungszustand in einem zylindrisch oder prismatisch geformten Körper, dessen Erzeugende in die $z$-Richtung fallen, aufträte, so würden keine Oberflächenspannungen auf den Zylindermantel und keine Massenkraft wirken. Die über irgend einen Querschnitt resultierende Kraft hat den Betrag $\iint Z_z dx dy$; dieselbe verschwindet, falls die $z$-Achse mit der Linie der Schwerpunkte der Normalschnitte im spannungslosen Zustand zusammenfällt. Sei dies der Fall. Dann wird der Stab in dem beschriebenen Spannungszustande durch Oberflächenspannungen erhalten, die auf die Grundflächen allein wirken, und die Spannung über einen beliebigen Querschnitt ist statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar.

Die Komponente des Kräftepaars um die $z$-Achse verschwindet. Die Komponente um die $y$-Achse ist $\iint ER^{-1}x^2 dx dy$ oder gleich $EI/R$, wo $I$ das Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf eine zur $y$-Achse parallele Gerade durch den Schwerpunkt. Die Komponente des Kräftepaars um die $x$-Achse ist $\iint -ER^{-1}xy dx dy$ und verschwindet, wenn die $x$- und die $y$-Achse zu den Hauptträgheitsachsen der Querschnitte parallel sind. Wir nehmen an, dies sei der Fall.

---

1) Die Theorie wurde von Saint-Venant in seiner Abhandlung über die Torsion von 1855 entwickelt. Siehe Einleitung, Fußnote 50 und S. 24.

Die Verzerrungskomponenten sind durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma x}{R}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

die Verschiebung ist dann, wie sich zeigen läßt, gegeben durch die Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2} R^{-1}(z^2 + \sigma x^2 - \sigma y^2), \quad v = \sigma R^{-1} xy, \quad w = -R^{-1} xz. \quad (15)$$

Dies Beispiel entspricht der *Biegung eines Stabes durch Kräftepaare.* Die Linie der Schwerpunkte der Querschnitte verschiebt sich nach dem Gesetz $u = \frac{1}{2} R^{-1} z^2$, sie geht also ziemlich genau in einen Kreisbogen mit großem Radius $R$ in der $(x, z)$-Ebene, d. h. der Ebene des *Biegungsmoments* $EI/R$, über; der Mittelpunkt des Kreises liegt in $x = R$, $z = 0$.

## § 88. Diskussion der Lösung für die Biegung eines Stabes durch Kräftepaare.

Die Kräfte, die an dem einen oder anderen Ende des Stabes angreifen, sind statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar vom Moment $EI/R$. Dies Kräftepaar, das „Biegungsmoment" genannt, ist der Krümmung $1/R$ proportional. Wenn der Stab durch ein gegebenes Kräftepaar $M$ gebogen wird, nimmt die Linie der Schwerpunkte seiner Querschnitte, die sogenannte „Zentral-Linie", eine Krümmung $M/EI$ in der Ebene des Kräftepaars an. Die Formeln für die Verzerrungskomponenten zeigen, daß diejenigen Linienelemente des Materials, die im ungespannten Zustand in der Ebene $x = 0$ liegen, weder Dehnung noch Verkürzung erfahren. Diese Ebene heißt die „neutrale Ebene"; sie stimmt überein mit der Ebene, die durch die Zentral-Linie senkrecht zur Biegungsebene gelegt wird. Dieselben Formeln zeigen, daß Linienelemente des Materials, die im ungespannten Zustand zur Zentral-Linie parallel sind, verkürzt oder gedehnt werden, je nachdem sie mit dem Krümmungsmittelpunkt auf derselben Seite der neutralen Ebene liegen oder auf der entgegengesetzten Seite. Der Betrag der Dehnung oder Verkürzung eines longitudinalen Linienelements in der Entfernung $x$ von der neutralen Ebene ist gleich dem absoluten Werte von $Mx/EI$ oder $x/R$. Der Spannungszustand kennzeichnet sich als Zug und Druck auf die Elemente der Normalschnitte. In einem Punkte, wo die hindurchgehende Längsfaser gedehnt wird, haben wir Zug, und in einem Punkte, wo die hindurchgehende Längsfaser verkürzt wird, haben wir Druck. Der Betrag des Zugs oder Drucks ist gleich dem absoluten Werte von $Mx/I$ oder $Ex/R$.

Wie die Formeln für die Verschiebung zeigen, bleiben die Querschnitte eben, ihre Ebenen werden jedoch so gedreht, daß sie durch den Krümmungsmittelpunkt hindurchgehen, wie Fig. 10 zeigt. Aus den Formeln für die Verschiebung geht ferner hervor, daß die Gestalt der Querschnitte sich ändert. Ist z. B. der Querschnitt ursprünglich ein Rechteck in der Ebene $z = \gamma$ mit den durch die Gleichungen

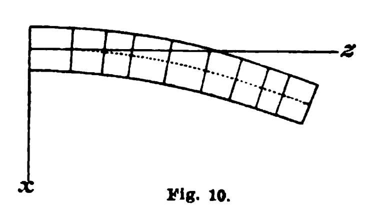


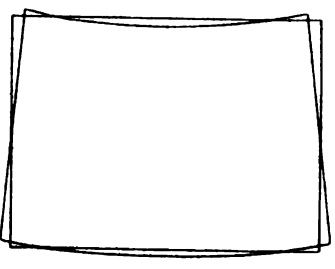
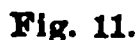
Fig. 10.

$$x = \pm \alpha, \quad y = \pm \beta$$

gegebenen Seiten, so gehen die Ränder in Kurven über, die bezüglich durch die Gleichungen gegeben sind:

$$x \mp \alpha - \tfrac{1}{2}\gamma^2/R - \tfrac{1}{2}\sigma(\alpha^2 - y^2)/R = 0\,, \quad y \mp \beta - \sigma\beta x/R = 0.$$

Die zweite Gleichung stellt gerade Linien dar, die zu ihrer ursprünglichen Lage etwas geneigt sind, der ersteren entsprechen näherungsweise Kreisbogen vom Radius $R/\sigma$, deren Ebenen zur $(x, y)$-Ebene parallel sind und deren Krümmung der der Schwerpunktslinie entgegengekehrt ist. Die Gestaltänderung der Querschnitte ist in



Fig. 11.

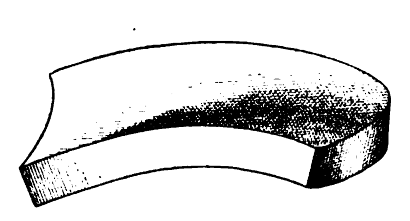

Fig. 12.

Fig. 11 dargestellt. Die neutrale Ebene und jede zu ihr parallele Ebene wird zu einer antiklastischen Fläche verzerrt, deren Hauptkrümmungen von der Größe $R^{-1}$ in der $(x, z)$-Ebene und von der Größe $\sigma R^{-1}$ in der $(x, y)$-Ebene sind; demgemäß besitzt der gebogene Stab die aus Fig. 12 ersichtliche Gestalt; die vordere Fläche ist darin zur Biegungsebene parallel.

Die Verwölbung der Grenzflächen $x = \pm \alpha$ zu antiklastischen Flächen läßt eine sehr genaue Bestätigung mittels der Interferenzstreifen zu, die auftreten, wenn man Licht durch eine diesen Flächen parallele und sehr nahe Glasplatte hindurchtreten läßt. Cornu[1]) hat dies Verfahren zu einer experimentellen Bestimmung der Poissonschen Konstanten für Glas

1) *Paris*, *C. R.*, t. 69 (1869). Mallock hat bei verschiedenen Materialien dies Verfahren angewandt. Siehe § 70 (c), Fußnote.

benutzt, indem er mit gebogenen Glasstäben Versuche anstellte. Der erhaltene Wert war fast genau gleich $\frac{1}{4}$.

Wir wollen noch die potentielle Energie der Verzerrung berechnen. Der Wert der Verzerrungsenergie-Funktion in jedem Punkte ist, wie sich leicht ergibt, gleich $\frac{1}{2} E x^2/R^2$. Die potentielle Energie der Verzerrung des von zwei Normalschnitten im Abstand $l$ begrenzten Stabteils ist gleich $\frac{1}{2} (EI/R^2) l$, so daß die potentielle Energie pro Längeneinheit den Betrag $\frac{1}{2} EI/R^2$ hat.

## § 89. Das Saint-Venantsche Prinzip.[1])

In dem Problem von § 87 sind die Spannungen, deren statisches Äquivalent das Biegungsmoment $EI/R$ ist, über die Endquerschnitte als Drucke und Zugspannungen auf die einzelnen Elemente verteilt, so zwar, daß diese Drucke und Zugspannungen dem Abstand von der neutralen Ebene proportional sind. Die praktische Anwendbarkeit der Lösung ist aber auf den Fall, wo diese Verteilung der Spannung über das Stabende genau realisiert ist, nicht beschränkt. Die Übertragung auf andere Fälle vollzieht sich mit Hilfe eines Prinzips, das in bestimmter Form zuerst von Saint-Venant ausgesprochen wurde und als „Prinzip der elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichwirkender Lastensysteme" bekannt ist. Nach diesem Prinzip sind die Verzerrungen, die ein auf einen kleinen Teil der Oberfläche eines Körpers wirkendes System von Kräften von verschwindender Resultante und verschwindendem resultierenden Moment in dem Körper hervorruft, verschwindend klein in Entfernungen, die groß sind im Vergleich zu den linearen Abmessungen jenes Oberflächenstücks. Für das vorliegende Problem folgt daraus: wenn die Länge des Stabes groß ist im Vergleich zu irgendeinem Durchmesser seines Querschnitts, so ist der Spannungs- und Verzerrungszustand, den das an den Enden wirkende Moment in seinem Innern hervorbringt, von der Verteilung der Spannungen, aus denen das Moment resultiert, praktisch unabhängig in allen Teilen des Stabes außer einem verhältnismäßig kleinen Bereich in der Nähe der Enden.

## § 90. Durch Kräftepaare gebogene rechteckige Platte.[2])

Das in § 87 gelöste Problem läßt noch in anderer Richtung eine Verallgemeinerung zu. Ein Stab vom rechteckigem Querschnitt ist ein besonderer Fall eines rechtwinkligen Parallelepipeds; wenn nun zwei parallele Seitenflächen eines solchen Körpers einander sehr nahe sind, so haben wir eine rechteckige Platte vor uns. Wir haben demnach bewiesen, daß eine Platte durch Kräftepaare, die an zwei

1) Aufgestellt in der Abhandlung über die Torsion von 1855.
2) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, II. Teil, p. 265, 266.



gegenüberliegenden Kanten angreifen und deren Achsen diesen Kanten parallel sind, so gehalten werden kann, daß ihre Seiten antiklastische Flächen bilden. Das Verhältnis der Hauptkrümmungen ist gleich der Zahl $\sigma$. Es ist klar, daß die Platte durch geeignete Momente an den beiden andern gegenüberliegenden Kanten zu einer zylindrischen Fläche gebogen werden kann, daß sich überhaupt das Verhältnis der Krümmungen beliebig abändern läßt.

Es empfiehlt sich, für die Seiten der Platte die Gleichungen anzusetzen:

$$z = \pm h,$$

so daß die Dichte $2h$ beträgt. Die $z$-Koordinate tritt damit an die Stelle der Koordinate, die wir im Falle des Stabes mit $x$ bezeichneten. Die in Frage kommenden Spannungskomponenten sind $X_x$ und $Y_y$, und beide sind der $z$-Koordinate proportional. Nehmen wir an, daß alle Spannungskomponenten außer $X_x$ und $Y_y$ verschwinden und daß diese durch die Gleichungen gegeben sind

$$X_x = E\alpha z, \quad Y_y = E\beta z, \tag{16}$$

wo $\alpha$ und $\beta$ Konstante, so finden wir, daß die Verschiebung durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u &= (\alpha - \sigma\beta)xz, \quad v = (\beta - \sigma\alpha)yz, \\ w &= -\tfrac{1}{2}(\alpha - \sigma\beta)x^2 - \tfrac{1}{2}(\beta - \sigma\alpha)y^2 - \tfrac{1}{2}\sigma(\alpha + \beta)z^2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

gegeben ist. Somit geht jede Ebene, die im unverzerrten Zustand zu den Seiten parallel war, in eine gekrümmte Fläche über, und zwar so, daß die Krümmungen in den Ebenen $(x, z)$ und $(y, z)$ bezüglich gleich $\sigma\beta - \alpha$ und gleich $\sigma\alpha - \beta$ sind. Dies sind die Hauptkrümmungen der Fläche. Sind diese Größen positiv, so liegen die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf der Seite der positiven $z$. Es seien $R_1$ und $R_2$ die Krümmungsradien, sodaß

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma\beta - \alpha, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sigma\alpha - \beta,$$

dann ist

$$\alpha = -\frac{1}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right), \quad \beta = -\frac{1}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1}\right). \tag{18}$$

Der durch $R_1$ und $R_2$ ausgedrückte Krümmungszustand wird aufrecht erhalten durch Kräftepaare, die an den Kanten angreifen. Das Moment pro Längeneinheit, das an derjenigen Kante $x = \text{const.}$ wirkt, für die $x$ den größeren Wert hat, hat eine zur $y$-Achse parallele Achse, sein Betrag ist

$$\int_{-h}^{h} z X_x dz, \text{ d. i. gleich } -\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right).$$

An der gegenüberliegenden Kante muß ein gleiches und entgegengesetztes Kräftepaar angreifen. Das entsprechende Moment für das andere Kantenpaar ist gegeben durch

$$\int_{-h}^{+h} - z\,Y_y\,dz, \text{ d. i. gleich } \tfrac{2}{3}\,\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1}\right).$$

Der Wert der Verzerrungsenergie-Funktion in irgend einem Punkte ist, wie sich ohne Schwierigkeit zeigen läßt,

$$\tfrac{1}{2}\,z^2\,\frac{E}{1-\sigma^2}\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - 2\,(1-\sigma)\,\frac{1}{R_1 R_2}\right],$$

und die potentielle Energie der gebogenen Platte pro Flächeneinheit ist

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - 2\,(1-\sigma)\,\frac{1}{R_1 R_2}\right].$$

Es ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen enthält.

## § 91. Gleichgewichtsgleichungen, ausgedrückt in den Verschiebungen.

In den Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} + \varrho X = 0$$

setzen wir für die Normalspannungen $X_x, \ldots$ die Ausdrücke

$$\lambda\Delta + 2\mu\,\partial u/\partial x, \ldots$$

und für die Schubspannungen $Y_z, \ldots$ die Ausdrücke $\mu(\partial w/\partial y + \partial v/\partial z), \ldots$ ein; so erhalten wir drei Gleichungen vom Typus

$$(\lambda + \mu)\,\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \varrho X = 0, \tag{19}$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich kurz so schreiben:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta + \mu\nabla^2(u, v, w) + \varrho(X, Y, Z) = 0. \tag{20}$$

Führen wir die Rotation ein:

$$(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z) = \tfrac{1}{2}\operatorname{curl}(u, v, w) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

und machen Gebrauch von der Identität

$$\nabla^2(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta - 2\operatorname{curl}(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z),$$

so nehmen obige Gleichungen (20) die Form an

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta - 2\mu \operatorname{curl}(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z) + \varrho(X, Y, Z) = 0. \quad (21)$$

Wir bemerken, daß die Gleichungen der kleinen Bewegung (§ 54) sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta + \mu\nabla^2(u, v, w) + \varrho(X, Y, Z) = \varrho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, v, w)\\
&\text{oder auch}\\
&(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta - 2\mu \operatorname{curl}(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z) + \varrho(X, Y, Z)\\
&\qquad\qquad = \varrho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, v, w).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die Spannung $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ auf eine Ebene, deren Normale in die Richtung $\nu$ fällt, ist gegeben durch Formeln vom Typus

$$X_\nu = \cos(x, \nu)\left(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cos(y, \nu)\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \cos(z, \nu)\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

hierfür können wir schreiben:

$$X_\nu = \lambda\Delta\cos(x, \nu) + \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial \nu} + \cos(x, \nu)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(y, \nu)\frac{\partial v}{\partial x} + \cos(z, \nu)\frac{\partial w}{\partial x}\right\}, \quad (23)$$

oder auch

$$X_\nu = \lambda\Delta\cos(x, \nu) + 2\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial \nu} - \varpi_y\cos(z, \nu) + \varpi_z\cos(y, \nu)\right\}, \quad (24)$$

wo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \cos(x, \nu)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(y, \nu)\frac{\partial u}{\partial y} + \cos(z, \nu)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ist $\nu$ die nach außen gerichtete Normale der Begrenzungsfläche des Körpers und sind die Werte von $\Delta$, $\partial u/\partial x, \ldots$ für einen Punkt der Oberfläche berechnet, so bedeuten die rechten Seiten von (23) und der analogen Gleichungen die Spannungskomponenten pro Flächeneinheit, die auf den Körper an der Oberfläche wirken.

## § 92. Gleichgewicht bei fehlender Massenkraft.

Wir notieren hier einige Resultate, die sich aus den Verschiebungsgleichungen

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta + \mu\nabla^2(u, v, w) = 0 \quad (25)$$

ableiten lassen.

1) Differentiieren wir die linken Seiten dieser Gleichungen nach $x, y, z$ und addieren die entstehenden Ausdrücke, so finden wir

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Delta = 0. \tag{26}$$

$\Delta$ ist also in allen Punkten des Körpers eine harmonische Funktion, d. h. eine Funktion, die der Laplaceschen Gleichung genügt.

2) Hieraus und aus (25) folgt, daß jede der Größen $u, v, w$ in allen Punkten des Körpers die Gleichung befriedigt

$$\nabla^4\Phi = 0. \tag{27}$$

Ebenso genügen alle Verzerrungs- und Spannungskomponenten dieser Gleichung.

3) Differentiieren wir andererseits die linke Seite von der dritten der Gleichungen (25) nach $y$ und die von der zweiten nach $z$ und subtrahieren die erhaltenen Ausdrücke, so finden wir

$$\nabla^2\varpi_x = 0. \tag{28}$$

$\varpi_y$ und $\varpi_z$ befriedigen entsprechende Gleichungen, sodaß jede der Drehungskomponenten in allen Punkten des Körpers eine harmonische Funktion ist.

## § 93. Gleichungssysteme zur Bestimmung der Spannungskomponenten.[1]

In einem deformierten isotropen Körper befriedigen die Spannungskomponenten außer den Spannungsgleichungen (3) noch ein System partieller Differentialgleichungen, das wir folgendermaßen erhalten. Wir führen eine Größe $\Theta$, die Summe der Hauptspannungen in einem Punkte, ein und haben

$$\begin{aligned} \Theta &= X_x + Y_y + Z_z \\ &= (3\lambda + 2\mu)\Delta; \end{aligned} \tag{29}$$

$\Theta$ ist somit in allen Punkten des Körpers eine harmonische Funktion, falls Massenkräfte fehlen.

Weiterhin finden wir unter dieser Voraussetzung[2])

$$\nabla^2 X_x = 2\mu\nabla^2\frac{\partial u}{\partial x} = -2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2},$$

oder

$$\nabla^2 X_x + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0. \tag{30}$$

Auf gleiche Weise finden wir

$$\nabla^2 Y_z + \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z} = 0. \tag{31}$$

---

1) Im Einverständnis mit Herrn Prof. Love habe ich, um die Bedeutung der Gleichungen (30) und (31) mehr hervortreten zu lassen, in den §§ 92 und 93 eine Schiebung des Textes vorgenommen und danach den Titel von § 93 geändert. Der Übersetzer.

2) Die Gleichungen vom Typus (30) und (31) wurden abgeleitet von Beltrami, *Rom, Acc. Lincei Rend.* (Ser. 5), t. 1 (1892).

Entsprechende Formeln erhalten wir für $\nabla^2 Y_y$, $\nabla^2 Z_z$, $\nabla^2 Z_x$, $\nabla^2 X_y$. Der Koeffizient $2(\lambda + \mu)/(3\lambda + 2\mu)$ ist gleich $1/1 + \sigma$).

Wir knüpfen hieran noch folgende Bemerkungen:

1) Aus den obigen Formeln geht hervor, daß das in § 53, 6) geschilderte Maxwellsche Spannungssystem nicht auftreten kann in einem isotropen festen Körper, auf den keine Massenkräfte wirken und der von einem spannungslosen Zustand aus ein wenig verzerrt ist.[1]) Dies leuchtet ohne weiteres ein, wenn wir bemerken, daß $X_x + Y_y + Z_z$ bei jenem System keine harmonische Funktion ist.

2) Wir können die Gleichungen vom Typus (30) und (31) auch aus den Spannungsgleichungen (3) und den Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten (§ 17) ableiten.[2])

Wir haben z. B.

$$e_{xx} = E^{-1}\{(1+\sigma)X_x - \sigma\Theta\}, \cdots \quad e_{yz} = 2(1+\sigma)E^{-1}Y_z.$$

Damit geht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}$$

über in

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{(1+\sigma)\,Y_y - \sigma\Theta\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(1+\sigma)\,Z_z - \sigma\Theta\} = 2\,(1+\sigma)\,\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial z}.$$ [3])

Nun ist

$$\frac{\partial Y_z}{\partial y} = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

und

$$\frac{\partial Y_z}{\partial z} = -\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y},$$

sodaß

$$2\frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} + \frac{\partial X_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}.$$

Wir haben daher

$$(1+\sigma)\left[\nabla^2\Theta - \nabla^2 X_x - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right] - \sigma\left(\nabla^2\Theta - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right) = 0;$$

addieren wir die drei Gleichungen dieser Art, so finden wir, daß $\nabla^2\Theta$ verschwinden muß; die Gleichung reduziert sich also auf

$$(1+\sigma)\,\nabla^2 X_x + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0. \qquad (30')$$

---

1) Minchin, *Statics*, 3. Aufl. Oxford, 1886, vol. 2, Kap. 18.
2) Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 100.
3) Vgl. C. Runge, *Zeitschr. Math. Phys.*, Bd. 51 (1905), p. 433.

Auf gleiche Weise können wir die Gleichung (31) ableiten aus

$$2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)$$

bezw.

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\{(1+\sigma)X_x - \sigma\Theta\} = (1+\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial Y_z}{\partial x} + \frac{\partial Z_x}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial z}\right).$$[1]

3) Es läßt sich zeigen[2]), daß die Spannungsfunktionen $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ von § 56 drei Gleichungen von folgendem Typus befriedigen:

$$(1+\sigma)\nabla^2\left(\frac{\partial^2\chi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\chi_3}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \tag{32}$$

und drei Gleichungen von folgendem Typus:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}[(1+\sigma)\nabla^2\chi_1 - \Theta] = 0, \tag{33}$$

wo $\Theta$ geschrieben ist für

$$\nabla^2(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) - \frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\chi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\chi_3}{\partial z^2}. \tag{34}$$

Ebenfalls läßt sich zeigen, daß die Spannungsfunktionen $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ desselben Paragraphen drei Gleichungen von folgendem Typus genügen:

$$(1+\sigma)\nabla^2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0, \tag{35}$$

und drei Gleichungen von folgendem Typus:

$$(1+\sigma)\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial^2\Theta}{\partial y \partial z} = 0, \tag{36}$$

wo $\Theta$ geschrieben ist für

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x \partial y}. \tag{37}$$

Wenn Massenkräfte wirken, so genügen die Spannungskomponenten, wie sich zeigen läßt[3]), Gleichungen vom Typus

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\varrho\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\varrho\frac{\partial X}{\partial x} \tag{38}$$

und

$$\nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y \partial z} = -\varrho\frac{\partial Z}{\partial y} - \varrho\frac{\partial Y}{\partial z}. \tag{39}$$

Diese Gleichungen zusammen mit den Gleichungen (3) bilden ein vollständiges Gleichungssystem für die Spannungskomponenten.

## § 94. Ebene Verzerrung und ebene Spannung.

Ebene Verzerrungs- und ebene Spannungszustände können durch geeignete Kräfte in Körpern von zylindrischer Form hervorgebracht

1) Vgl. C. Runge, *Zeitschr. Math. Phys.*, Bd. 51 (1905), p. 433.
2) Ibbetson, *Mathematical Theory of Elasticity*, London 1887.
3) Michell, *loc. cit.*

werden. Die Erzeugenden des Zylindermantels seien der $z$-Achse parallel und die Endquerschnitte zu ihr senkrecht. Falls Massenkräfte wirken, müssen sie senkrecht zu dieser Achse gerichtet sein. Ist die Länge der Erzeugenden klein gegenüber den linearen Abmessungen des Querschnitts, so haben wir es mit einer *Platte* zu tun, die Endquerschnitte sind die *Seiten* derselben.

Bei einem ebenen Verzerrungszustand sind die Verschiebungen $u, v$ Funktionen von $x, y$ allein und die Verschiebung $w$ verschwindet (§ 15). Alle Verzerrungs- und Spannungskomponenten sind unabhängig von $z$; die Spannungskomponenten $Z_x$, $Y_z$ verschwinden, desgleichen die Verzerrungskomponenten $e_{zx}$, $e_{yz}$, $e_{zz}$. Die Spannungskomponente $Z_z$ verschwindet im allgemeinen nicht. Die Aufrechterhaltung eines ebenen Verzerrungszustandes erfordert also einen gewissen Zug oder Druck an den Endquerschnitten, der so bemessen sein muß, daß die Länge aller longitudinalen Fasern konstant gehalten wird.

Ohne eine weitere Verwicklung hereinzubringen, können wir noch eine *gleichmäßige* Dehnung oder Verkürzung aller Längsfasern zulassen und demgemäß $w = ez$ annehmen, wo $e$ konstant. Die Spannungskomponenten drücken sich dann aus durch die Gleichungen

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y} + e\right), \qquad Y_z = 0,$$

$$Y_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + e\right), \qquad Z_x = 0,$$

$$Z_z = (\lambda + 2\mu)e \quad + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Die Funktionen $u, v$ sind als Lösungen der Gleichungen des Gleichgewichts zu bestimmen. Eingehender werden wir uns in Kapitel IX mit der Theorie der ebenen Verzerrung befassen.

Bei einem Zustand ebener Spannung in der Erstreckung der $(x, y)$-Ebene verschwinden die Spannungskomponenten $Z_x$, $Y_z$, $Z_z$, doch sind die Verschiebungen $u, v, w$ im allgemeinen nicht unabhängig von $z$. Insbesondere verschwindet die Verzerrungskomponente $e_{zz}$ nicht und ist im allgemeinen nicht konstant; vielmehr haben wir

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\lambda}{2\mu}\Delta. \tag{40}$$

Die Aufrechterhaltung eines ebenen Spannungszustandes in einer Platte verlangt nicht, daß Spannungen auf die Seiten der Platte wirken, wohl aber, daß die Massenkräfte und Randspannungen an den Kanten in gewisser spezieller Weise verteilt sind. Ausführlicher werden wir in Kapitel IX auf die Theorie eingehen.

Eine wichtige Verallgemeinerung[1]) ermöglicht die Annahme, daß die Normalspannung $Z_z$ in der ganzen Platte verschwindet, daß aber

1) Vgl. L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 201 (1903).

die Tangentialspannungen $Z_x$, $Y_z$ nur an den Seiten $z = \pm h$ verschwinden. Ist die Platte dünn, so wird die Bestimmung der über die Dicke der Platte genommenen Durchschnittswerte der Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungskomponenten fast ebenso wertvoll sein, wie die der tatsächlichen Werte in jedem Punkte. Wir bezeichnen diese Durchschnittswerte mit $\bar{u}, \cdots \bar{e}_{xx}, \cdots \bar{X}_x, \cdots$, sodaß wir z. B. haben

$$\bar{u} = (2h)^{-1}\int_{-h}^{h} u\,dz. \tag{41}$$

Wir integrieren die linken und rechten Seiten der Gleichgewichtsgleichungen über die Plattendicke und beachten, daß $Z_x$ und $Y_z$ an den Grenzen verschwinden. Wir finden so, daß die Mittelwerte der Spannungskomponenten $\bar{X}_x$, $\bar{X}_y$, $\bar{Y}_y$, falls Massenkräfte fehlen, den Gleichungen genügen

$$\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_y}{\partial y} = 0. \tag{42}$$

Da $Z_z$ verschwindet, so gilt Gleichung (40); daraus folgt, daß die durchschnittlichen Verschiebungen $\bar{u}$, $\bar{v}$ mit den durchschnittlichen Spannungskomponenten $\bar{X}_x$, $\bar{X}_y$, $\bar{Y}_y$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_x &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\ \bar{Y}_y &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \\ \bar{X}_y &= \mu\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Spannungszustände, wie sie hier geschildert sind, wird man als „verallgemeinerte ebene Spannungsverteilungen“ bezeichnen.

## § 95. Biegung eines schmalen Balkens von rechteckigem Querschnitt durch eine am Ende angreifende Last.

Ein einfaches Beispiel für den verallgemeinerten Typus ebener Spannung bietet sich dar in einem Balken von rechteckigem Querschnitt und kleiner Breite ($2h$), der durch Kräfte in Richtung der durch Länge und Höhe bestimmten Ebene gebogen wird. Die $(x, y)$-Ebene sei die Mittelebene des Balkens (parallel der Länge und Höhe); um die Vorstellung zu fixieren, nehmen wir an, der Balken liege im ungespannten Zustand horizontal. Ober- und Unterseite des Balkens werden durch $y = \pm c$ gegeben sein, sodaß $2c$ die Höhe des Balkens; die Länge des Balkens bezeichnen wir mit $l$. Der Koordinatenanfang falle in die eine Endfläche, die wir als befestigt annehmen.

Aus der Untersuchung in § 87 wissen wir, daß in dem Balken ein durch $X_x = -Ey/R$ gegebener Spannungszustand möglich ist und daß dieser Zustand durch Momente vom Betrage $\frac{2}{3} hc^3 E/R$ realisiert wird, die an den Balkenenden um zwei zur $z$-Achse parallele Achsen wirken. Die Zentral-Linie des Balkens wird zu einem Kreisbogen vom Radius $R$ gebogen. Die Spannung auf irgend einen Balkenquerschnitt ist dann statisch gleichwertig mit einem für alle Querschnitte gleichen Kräftepaar, das gleich dem am Ende wirkenden Kräftepaar oder Biegungsmoment ist.

Wir wollen nun annehmen, daß der Balken durch eine Last $W$ gebogen wird, die am Ende $x = l$ angreift, wie Fig. 13 zeigt. Dieser Kraft kann in keinem Querschnitt bloß durch ein Kräftepaar das Gleichgewicht gehalten werden; vielmehr ist die Spannung über jeden Querschnitt gleichwertig mit einer Kraft $W$ und einem Kräftepaar vom Moment $W(l-x)$. Das Spannungssystem ist daher nicht so einfach wie dasjenige im Falle der Biegung durch Kräftepaare. Dem Moment vom Betrage $W(l-x)$ könnte durch Spannungen das Gleichgewicht gehalten werden, die gegeben sind durch die Gleichung

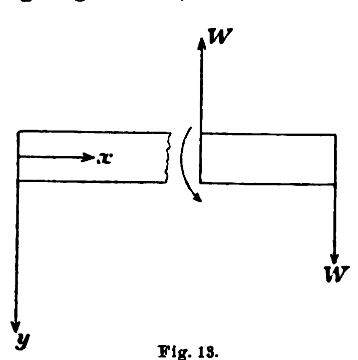


Fig. 13.

$$X_x = -\frac{3}{4hc^3} W(l-x)y; \tag{44}$$

der über die Breite genommene Mittelwert $\overline{X}_x$ würde also mit $X_x$ übereinstimmen. Mit dieser Spannung $\overline{X}_x$ suchen wir eine Schubspannung $\overline{X}_y$ so zu kombinieren, daß der Last $W$ das Gleichgewicht gehalten wird. Die von $\overline{X}_y$ zu erfüllenden Bedingungen sind demgemäß folgende:

1) $\overline{X}_y$ muß die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen:

$$\frac{\partial \overline{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{X}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \overline{X}_y}{\partial x} = 0,$$

2) $\overline{X}_y$ muß verschwinden für $y = \pm c$,

3) $2h\int\limits_{-c}^{+c} \overline{X}_y dy$ muß gleich $W$ sein.

Sämtlichen Bedingungen genügen wir, wenn wir setzen:

$$\overline{X}_y = \frac{3}{8hc^3} W(c^2 - y^2). \tag{45}$$

Es ergibt sich, daß die Last $W$ durch Spannungen $\overline{X}_x$ und $\overline{X}_y$, ohne $\overline{Y}_y$, equilibriert wird, vorausgesetzt daß die an den Enden wirkenden Spannungen, deren Resultante $W$ ist, sich proportional mit $c^2 - y^2$ über

die Enden verteilen. Nach dem Saint-Venantschen Prinzip (§ 89) ist aber die Verteilung der Last nur in der Nähe der Enden selbst von Bedeutung, falls die Länge des Balkens groß ist im Vergleich zur Höhe.

Ein System durchschnittlicher Verschiebungen, das diesem System durchschnittlicher Spannungen entspräche, würde, wie sich zeigen läßt, gegeben sein durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 2\mu\bar{u} &= \frac{W}{8hc^3}(3c^2y - y^3) - \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{4hc^3}(6lxy + y^3 - 3x^2y), \\ 2\mu\bar{v} &= \frac{3W}{8hc^3}\{c^2x + (l-x)y^2\} + \frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{W}{4hc^3}\{3l(x^2-y^2) - x^3 + 3xy^2\}. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Da diese Verschiebungen aus bekannten Spannungskomponenten abgeleitet sind, würden wir noch eine Verschiebung, wie sie in einem starren Körper möglich wäre, hinzufügen können, um die Befestigungsbedingungen im Koordinatenanfang zu erfüllen.

Wir vergleichen diese Folgerungen mit denjenigen, die wir im Falle der Biegung durch Momente (§ 88) erhielten. Es ergibt sich:

1) Der auf die Normalschnitte wirkende Zug pro Flächeneinheit $(X_x)$ ist mit dem Biegungsmoment, $W(l-x)$, durch die Gleichung verknüpft

$$\text{Zug} = -(\text{Biegungsmoment})\,(y/I),$$

wo $y$ der Abstand von der neutralen Ebene und $I$ das zugehörige Trägheitsmoment.

2) Die Krümmung $(d^2\bar{v}/dx^2)_{y=0}$ ist gleich $\frac{3(\lambda+\mu)W(l-x)}{4hc^3\mu(3\lambda+2\mu)}$; daher gilt

$$\text{Krümmung} = (\text{Biegungsmoment})/(EI).$$

3) Die Normalschnitte des spannungslosen Zustandes bleiben nicht senkrecht zu der Linie, die aus der Zentral-Linie dieses Zustandes hervorgeht. Der Winkel, unter dem sie nach der Biegung des Balkens schneiden, ist gleich $(\partial\bar{v}/\partial x + \partial\bar{u}/\partial y)_{y=0}$, mithin gleich $3W/8\mu hc$.

4) Die Normalschnitte bleiben nicht eben, sondern werden zu krummen Flächen verzerrt. Eine materielle Linie, die im ungespannten Zustand vertikal ist, geht in eine krumme Linie über, deren Gleichung wir erhalten, wenn wir $\bar{u}$ bei konstantem $x$ als Funktion von $y$ ausdrücken. Diese Gleichung hat die Form

$$\bar{u} = \alpha y + \beta y^3,$$

die Verschiebung besteht also aus einem Teil $\alpha y$, der die Querschnitte eben läßt, und einem Teil, der eine Krümmung bewirkt. Konstruieren wir die Kurve $x = \beta y^3$ und legen sie mit ihrem Nullpunkt $(x = 0,\ y = 0)$ auf die verzerrte Zentral-Linie so, daß die Tangente im Nullpunkt mit der Tangente der im spannungslosen Zustand vertikalen Linie zusammenfällt, so liefert uns die Kurve die Lage dieser Linie im verzerrten Zustand.

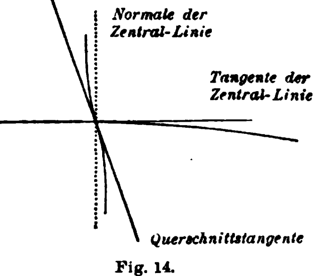


Fig. 14.

Fig. 14 zeigt die Form, die eine anfangs vertikale Faser durch die Biegung erhält, und die relative Lage ihrer Tangente im Nullpunkt und der Normalen der Zentral-Linie.

## § 96. Grundgleichungen, bezogen auf rechtwinklige krummlinige Koordinaten.

Die in Dilatation und Rotation ausgedrückten Gleichungen vom Typus (21) lassen sich ohne weiteres transformieren, wenn wir den vektoriellen Charakter der einzelnen Glieder beachten. In der Tat können wir die Glieder $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta$ lesen „Gradient von $\Delta$" und können dann die Gleichungen (22) so aussprechen:

$$(\lambda + 2\mu)\,(\text{Gradient von } \Delta) - 2\mu\,(\text{Curl von } \varpi) + \varrho\,(\text{Massenkraft}) = \varrho\,(\text{Beschleunigung}), \tag{47}$$

wo $\varpi$ vorübergehend für die Rotation $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ eingeführt ist und Faktoren wie $\lambda + 2\mu$ Skalargrößen sind.

Nun ist der Gradient von $\Delta$ der Vektor, dessen Komponente in irgend einer Richtung gleich der Zunahme von $\Delta$ pro Längeneinheit in jener Richtung ist; demgemäß sind die Komponenten dieses Vektors in den Richtungen der Normalen dreier orthogonaler Flächen $\alpha, \beta, \gamma$ (§ 19) gleich

$$h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}, \quad h_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}, \quad h_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma}.$$

Die curl-Operation und die Rotationskomponenten sowohl wie die Dilatation haben wir früher bereits transformiert (§ 21); wir können daher $\Delta$ und $\varpi_\alpha, \varpi_\beta, \varpi_\gamma$, in den Verschiebungen ausgedrückt, als bekannt ansehen. Die Gleichung (47) ist dann gleichwertig mit drei Gleichungen von der Form

$$(\lambda + 2\mu) h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - 2\mu h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\varpi_\gamma}{h_3}\right) + 2\mu h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{\varpi_\beta}{h_2}\right) + \varrho F_\alpha = \varrho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \tag{48}$$

wo $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$, wie in § 58, die Komponenten der Massenkraft in Richtung der Normalen der drei Flächen bedeuten.

## § 97. Polarkoordinaten.

Um für die Gleichungen (48) ein Beispiel zu geben, können wir zeigen, daß die Gleichungen des Gleichsgewichts bei fehlender Massenkraft, bezogen auf Polarkoordinaten, die Form annehmen

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\sin\theta\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} - 2\mu\left\{\frac{\partial\varpi_r}{\partial\Phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_\Phi\sin\theta)\right\} = 0,\\ (\lambda + 2\mu)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Delta}{\partial\Phi} - 2\mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_\theta) - \frac{\partial\varpi_r}{\partial\theta}\right\} = 0,\\ (\lambda + 2\mu)r\sin\theta\frac{\partial\Delta}{\partial r} - 2\mu\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\varpi_\Phi\sin\theta) - \frac{\partial\varpi_\theta}{\partial\Phi}\right\} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Ferner können wir zeigen, daß die radiale Komponente der Verschiebung und der Drehung und die Dilatation die Gleichungen befriedigen

$$\mu\nabla^2(ru_r) + (\lambda + \mu)r\frac{\partial\Delta}{\partial r} - 2\mu\Delta = 0,$$

$$\nabla^2\Delta = 0, \quad \nabla^2(r\varpi_r) = 0;$$

daß aber einige Lösungen dieser Gleichungen Spannungszuständen entsprechen, die zu ihrer Realisierung Massenkräfte erfordern.[1])

## § 98. Radiale Verschiebung.[2])

Die einfachsten Anwendungen von Polarkoordinaten beziehen sich auf Probleme, bei denen rein radiale Verschiebungen auftreten. Wir nehmen an, daß die Verschiebungen $u_\theta$, $u_\Phi$ verschwinden und schreiben $U$ an Stelle von $u_r$. Aus den Formeln von § 22 und § 96 ergibt sich dann Folgendes:

1) Die Verzerrungskomponenten sind gegeben durch

$$e_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = e_{\Phi\Phi} = \frac{U}{r}, \quad e_{\theta\Phi} = e_{\Phi r} = e_{r\theta} = 0.$$

2) Die Dilatation und die Drehung sind gegeben durch

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial r} + 2\frac{U}{r}, \quad \varpi_r = \varpi_\theta = \varpi_\Phi = 0.$$

3) Die Spannungskomponenten sind gegeben durch

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda\frac{U}{r}, \quad \widehat{\theta\theta} = \widehat{\Phi\Phi} = \lambda\frac{\partial U}{\partial r} + 2(\lambda+\mu)\frac{U}{r},$$

$$\widehat{\theta\Phi} = \widehat{\Phi r} = \widehat{r\theta} = 0.$$

4) Die Grundgleichung des Gleichgewichts unter radialer Massenkraft $R$ ist

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + 2\frac{U}{r}\right) + \varrho R = 0.$$

5) Ist $R = 0$, so lautet die vollständige Lösung obiger Gleichung

$$U = Ar + Br^{-2},$$

wo $A$ und $B$ willkürliche Konstanten. Das erste Glied entspricht dem Problem der Kompression durch gleichförmigen Normaldruck [§ 70, g)].

1) Michell, *London Math. Soc. Proc.* vol. 32 (1901), p. 24.

2) Die meisten der in diesem Paragraphen angegebenen Resultate stammen von Lamé, *Leçons sur la théorie. ... de l'élasticité,* Paris 1852.

In einem festen Körper, der den Ursprung von $r$ mit enthält, kann die vollständige Lösung eine Verschiebung nicht darstellen. Der Ursprung muß entweder außerhalb des Körpers oder innerhalb einer Höhlung im Innern des Körpers liegen.

6) Die Lösung in 5) kann herangezogen werden für den Fall einer von konzentrischen Kugeln begrenzten Schale, die durch inneren und äußeren Druck verzerrt gehalten wird. Wir müssen haben

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda\frac{U}{r} = \begin{cases} -p_0 \text{ für } r = r_0, \\ -p_1 \text{ für } r = r_1, \end{cases}$$

wo $p_0$ der Druck auf der äußeren Begrenzung $(r = r_0)$ und $p_1$ der Druck auf der inneren Begrenzung $(r = r_1)$. Wir würden erhalten

$$U = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{p_1 r_1^3 - p_0 r_0^3}{r_0^3 - r_1^3}\, r + \frac{1}{4\mu}\,\frac{r_0^3 r_1^3 (p_1 - p_0)}{r_0^3 - r_1^3}\,\frac{1}{r^2}.$$

Der radiale Druck in irgend einem Punkte ist gleich

$$p_1 \frac{r_1^3}{r^3}\,\frac{r_0^3 - r^3}{r_0^3 - r_1^3} + p_0 \frac{r_0^3}{r^3}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r_0^3 - r_1^3},$$

und der Zug in irgend einer zum Radius senkrechten Richtung ist gleich

$$\tfrac{1}{2} p_1 \frac{r_1^3}{r^3}\,\frac{r_0^3 + 2r^3}{r_0^3 - r_1^3} - \tfrac{1}{2} p_0 \frac{r_0^3}{r^3}\,\frac{2r^3 + r_1^3}{r_0^3 - r_1^3}.$$

Im Falle $p_0 = 0$ ist der größte Zug der an der inneren Oberfläche; er beträgt $\frac{1}{2} p_1 (r_0^3 + 2r_1^3)/(r_0^3 - r_1^3)$; die größte Dehnung ist die senkrecht zum Radius an der inneren Oberfläche, sie beträgt

$$\frac{p_1}{r_0^3 - r_1^3}\left(\frac{r_1^3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{r_0^3}{4\mu}\right).$$

7) Haben wir in der Grundgleichung, 4), $R = -gr/r_0$, wo $g$ konstant, ist ferner die Oberfläche $r = r_0$ spannungsfrei und die Kugel massiv bis zum Mittelpunkt, so finden wir

$$U = -\frac{1}{10}\,\frac{g\varrho r_0 r}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Es entspricht dies dem Problem der Kugel, die durch die gegenseitige Gravitation ihrer Teile verzerrt gehalten wird. Es ist bemerkenswert, daß die radiale Verzerrung innerhalb der Fläche

$$r = r_0\sqrt{(3-\sigma)/(3+3\sigma)}$$

in Kontraktion, außerhalb dieser Fläche aber in *Dehnung* besteht.

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf den Fall der Erde begegnet ernstlichen Schwierigkeiten, auf die schon in § 75 hingewiesen wurde.

## § 99. Achsensymmetrische Verschiebung.

Die Bedingung, daß die Verschiebung in Ebenen, die durch eine gewisse Achse gehen, stattfindet und in allen diesen Ebenen die gleiche ist, würde sich unter Beziehung auf Zylinderkoordinaten $r, \theta, z$ ausdrücken durch die Gleichungen

$$u_\theta = 0, \quad \partial u_r/\partial\theta = \partial u_z/\partial\theta = 0.$$

Es empfiehlt sich, $U$ statt $u_r$ und $w$ statt $u_z$ zu schreiben. Die Verzerrungskomponenten drücken sich dann aus durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{U}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = e_{\theta z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Für die kubische Dilatation und die Rotation ergeben sich die Ausdrücke

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\varpi_\theta = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varpi_r = \varpi_z = 0. \tag{51}$$

Wir schreiben $\varpi$ statt $\varpi_\theta$. Die Gleichungen der Bewegung, ausgedrückt in den Verschiebungen, nehmen die Form an

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial \varpi}{\partial z} + \varrho F_r = \varrho f_r, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi) + \varrho F_z = \varrho f_z, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts lauten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta}}{r} + \varrho F_r = 0, \\ \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rz}}{r} + \varrho F_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Im Falle $w = ez$, wo $e$ konstant, und $\partial U/\partial z = 0$ haben wir einen ebenen Verzerrungszustand mit einer darüber gelagerten gleichförmigen Längsdehnung. In diesem Fall ist $\widehat{rz} = 0$. Wenn $\widehat{zz}$, $\widehat{rz}$, $F_z$ verschwinden, haben wir einen ebenen Spannungszustand.

## § 100. Rohr unter Druck.

Im Falle ebener Verzerrung mit verschwindender Massenkraft erfüllt die Verschiebung $U$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}\right) = 0, \tag{54}$$

deren vollständiges Integral von folgender Form ist:

$$U = Ar + B/r. \tag{55}$$

Diese Lösung können wir für das Problem eines zylindrischen Rohrs unter innerem und äußerem Druck heranziehen; eine gleichmäßige Längsdehnung $e$ bleibt freigestellt. Bedienen wir uns einer ähnlichen Bezeichnung wie in § 98, 6), so finden wir für die Spannungskomponenten die Werte

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr} &= \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} - \frac{p_1 - p_0}{r_0^2 - r_1^2} \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2},\\
\widehat{\theta\theta} &= \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} + \frac{p_1 - p_0}{r_0^2 - r_1^2} \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2},\\
\widehat{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} + e\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu};
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

für die Konstanten $A$ und $B$ in (55) erhalten wir

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{2(\lambda+\mu)(r_0^2 - r_1^2)} - \frac{\lambda e}{2(\lambda+\mu)}, \quad B = \frac{(p_1 - p_0) r_0^2 r_1^2}{2\mu(r_0^2 - r_1^2)}. \tag{57}$$

Die Konstante $e$ kann passend so gewählt werden, daß die Länge konstant erhalten wird, dann ist $e = 0$, und es wirkt longitudinaler Zug $\widehat{zz}$ vom Betrage

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}.$$

Oder wir können $e$ so wählen, daß longitudinaler Zug nicht wirkt, dann ist $\widehat{zz} = 0$ und

$$e = -\frac{\lambda(p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2)}{\mu(3\lambda+2\mu)(r_0^2 - r_1^2)}.$$

Wenn $p_0$ verschwindet und $e$ nicht zu groß ist, ist der größte Zug der Zug $\widehat{\theta\theta}$ an der inneren Mantelfläche $r = r_1$, er beträgt

$$p_1(r_0^2 + r_1^2)/(r_0^2 - r_1^2).$$

Die größte Dehnung ist die Umfangsdehnung $e_{\theta\theta}$ an derselben Mantelfläche.

Steht ein geschlossenes zylindrisches Gefäß unter innerem Druck $p_1$ und äußerem Druck $p_0$, so muß an den Enden der resultierende Zug $\pi(r_0^2 - r_1^2)\widehat{zz}$ dem resultierenden Druck das Gleichgewicht halten; wir haben daher die Gleichung

$$\pi(r_0^2 - r_1^2)\widehat{zz} = \pi(r_1^2 p_1 - r_0^2 p_0).$$

Diese Gleichung liefert für $e$ den Wert[1])

$$e = \frac{1}{3\lambda+2\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}. \tag{58}$$

Nehmen wir an, daß die Endflächen des Gefäßes eben sind, und vernachlässigen Gestaltänderung durch den Druck, so nimmt der Rauminhalt des Gefäßes um $\pi r_1 l_1(e r_1 + 2U_1)$ zu, wo $l_1$ die Zylinder-

1) Das Problem ist von zahlreichen Autoren untersucht worden, u. a. von Lamé, *loc. cit. ante*, S. 139. Es spielt eine Rolle in der Theorie des Piëzometers. Vgl. Poynting und Thomson, *Properties of Matter*, London 1902, p. 116. Der Umstand, daß $e$ von $k(=\lambda+\frac{2}{3}\mu)$ und keiner anderen elastischen Konstanten abhängt, ist für die Bestimmung von $k$ verwendet worden von A. Mallock, *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 74 (1904).

länge auf der Innenseite und $U_1$ den Wert von $U$ für $r = r_1$ bezeichnet. Mit obigem Wert von $e$ haben wir hierfür

$$\pi r_1^2 l_1 \left[\frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} + \frac{1}{\mu} \frac{(p_1 - p_0) r_0^2}{r_0^2 - r_1^2}\right]. \tag{59}$$

In gleicher Weise ergibt sich, wenn wir mit $l_0$ die Zylinderlänge auf der Außenseite bezeichnen und die Volumänderung der Enden vernachlässigen, die Zunahme des Inhalts des vom äußeren Mantel begrenzten Raums zu

$$\pi r_0^2 l_0 \left[\frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2}{r_0^2 - r_1^2} + \frac{1}{\mu} \frac{(p_1 - p_0) r_1^2}{r_0^2 - r_1^2}\right]. \tag{60}$$

Die Größe $l_0$ unterscheidet sich von $l_1$ um die Summe der Dicken der Endflächen. Im Falle eines langen Zylinders ist dieser Unterschied nicht von Bedeutung. Die Konstante $3/(3\lambda + 2\mu)$ ist gleich $1/k$, dem reziproken Wert des Kompressionsmoduls. Wird der Unterschied zwischen $l_0$ und $l_1$ vernachlässigt, so stimmt das Ergebnis mit einem allgemeinen Resultat[1]) überein, das sich für ein geschlossenes Gefäß von beliebiger Form unter innerem und äußerem Druck beweisen läßt; ist nämlich $V_1$ und $V_0$ der „innere" und „äußere" Rauminhalt im ungespannten Zustand, so wächst $V_0 - V_1$ um den Betrag $(p_1 V_1 - p_0 V_0)k$, wenn innere und äußere Drucke $p_1$ bezw. $p_0$ wirken. Bei Ableitung von (59) und (60) haben wir übrigens den Einfluß der Zylinderenden nicht genau in Rechnung gezogen; wir haben nämlich vorausgesetzt, daß die Endflächen in ihrer eigenen Ebene so gereckt werden, daß sie auf den ausgedehnten Zylinder passen, und haben Änderungen der Gestalt und des Volumens derselben vernachlässigt; ferner haben wir angenommen, daß die Wirkung der Endflächen auf die Gefäßwand gleichwertig ist mit einem Zug, der gleichmäßig über die Wandungsdicke verteilt ist. Die Resultate werden eine gute Annäherung liefern, sofern die Länge des Zylinders groß ist im Vergleich zu seinen Radien und falls die Wandung sehr dünn ist.

## § 101. Anwendung auf die Konstruktion der Geschütze.

In den Gleichungen (56) sind die Spannungskomponenten $\widehat{rr}$ und $\theta\theta$ ausgedrückt durch Formeln vom Typus

$$\widehat{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2},$$

wo $A$ und $B$ Konstante. Diese Konstanten bestimmen sich durch den inneren und den äußeren Druck. Wir haben daher eine Lösung der Spannungsgleichungen für ein Rohr unter innerem und äußerem Druck, die nicht nur in dem Falle anwendbar ist, wo das Material in

1) Siehe Kapitel VII, unten.

Abwesenheit von Drucken sich im spannungslosen Zustand befindet. Man hat geglaubt, diese Lösung für Zustände von Anfangsspannung heranziehen zu können, und sie demgemäß auf die Theorie der Konstruktion von Kanonen angewendet.[1]) Zeitweilig stellte man die Kanonen in Form einer Reihe einander umfassender Rohre her, und zwar wurde jedes einzelne Rohr so weit erwärmt, daß es über das nächst engere Rohr zu schlüpfen vermochte; das äußere Rohr zog sich dann infolge der Abkühlung zusammen und übte auf das innere einen Druck aus. Die so konstruierten Kanonen erwiesen sich als stärker wie einzelne Rohre von derselben Wanddicke. Nehmen wir z. B. den Fall zweier Rohre, zwischen denen ein Druck $P$ wirkt, und bezeichnen den Radius des gemeinsamen Mantels mit $r'$, so können wir die Anfangsspannung als durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -P\frac{r'^2}{r^2}\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - r'^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = P\frac{r'^2}{r^2}\frac{r_0^2 + r^2}{r_0^2 - r'^2}, \quad (r_0 > r > r')$$

und

$$\widehat{rr} = -P\frac{r'^2}{r^2}\frac{r^2 - r_1^2}{r'^2 - r_1^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = -P\frac{r'^2}{r^2}\frac{r^2 + r_1^2}{r'^2 - r_1^2}, \quad (r' > r > r_1)$$

gegeben ansehen. Die Spannung, die hinzukommt, wenn das zusammengesetzte Rohr innerem Druck $p$ unterworfen wird, wird gegeben sein durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -p\frac{r_1^2}{r^2}\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - r_1^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = p\frac{r_1^2}{r^2}\frac{r_0^2 + r^2}{r_0^2 - r_1^2}.$$

Die Verminderung der Randspannung $\widehat{\theta\theta}$ an der inneren Oberfläche $r = r_1$ kann als Maß für die Verstärkung des zusammengesetzten Rohrs angesehen werden.

## § 102. Rotierender Zylinder.[2])

Ein Beispiel für die Gleichungen der Bewegung bietet ein rotierender Zylinder. In Gleichung (32) haben wir $f_r = -\omega^2 r$ zu setzen, wo $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit.

Die Gleichungen für die Verschiebungen lauten

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) &= -\omega^2\varrho r,\\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right) &= 0\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

mit den Bedingungen

$$\widehat{rr} = \widehat{rz} = 0 \text{ für } r = a \text{ oder } r = a',$$
$$\widehat{rz} = \widehat{zz} = 0 \text{ für } z = \pm l.$$

1. A. G. Greenhill, *Nature*, vol. 42 (1890). Vgl. Boltzmann, *Wien. Berichte*, Bd. 59 (1870).

2) Siehe Abhandlungen von C. Chree in *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 7 (1891, 1892), p. 201, 283. Das Problem war schon früher von mehreren Autoren behandelt worden, u. a. von Maxwell (*loc. cit.* § 57) und Hopkinson, *Mess. of Math.* (Ser. 3) vol. 2 (1871).

Als zylindrische Begrenzung ist $r = a$ angenommen, außerdem ist vorausgesetzt, daß eine durch $r = a'$ gegebene Achsenhöhlung vorhanden ist; die Endquerschnitte sind $z = \pm l$, so daß der Zylinder eine Walze von der Länge $2l$ oder eine Scheibe von der Dichte $2l$ darstellt.

*Fall (a). Rotierende Walze.*

Eine angenäherte Lösung können wir im Falle einer langen Walze erhalten, indem wir das Problem als das eines ebenen Verzerrungszustandes behandeln unter Zulassung einer gleichmäßigen Längsdehnung $e$. Wir betrachten den Zylinder als massiv, d. h. ohne Achsenhöhlung; die angenäherte Lösung befriedigt dann die Gleichungen

$$\widehat{rz} = 0 \text{ überall,}$$

$$\widehat{rr} = 0 \text{ für } r = a,$$

sie genügt aber nicht der Bedingung $\widehat{zz} = 0$ für $z = \pm l$. Die gleichmäßige Längsdehnung $e$ kann jedoch so gewählt werden, daß die Spannungen $\widehat{zz}$ an den Enden keine statische Resultante besitzen, d. h. daß

$$\int_0^a \widehat{zz}\, r\, dr = 0;$$

dann stellt unsere Lösung den Zustand der Walze an den meisten Stellen mit hinreichender Genauigkeit dar, versagt jedoch in der Nähe der Enden [Vgl. § 89].

Wir stellen die Resultate, ausgedrückt in $E$ und $\sigma$, zusammen. Wir würden finden

$$U = Ar - \frac{\omega^2 \varrho r^3}{8E} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}, \quad w = ez, \tag{62}$$

wo die Konstanten $A$ und $e$ durch die Gleichungen gegeben sind

$$A = \frac{\omega^2 \varrho a^2}{8E} \frac{3-5\sigma}{1-\sigma}, \quad e = -\frac{\omega^2 \varrho a^2 \sigma}{2E}. \tag{63}$$

Die Spannungskomponenten sind gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} = \frac{\omega^2 \varrho (a^2 - r^2)}{8} \frac{3-2\sigma}{1-\sigma}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\omega^2 \varrho}{8}\left(\frac{3-2\sigma}{1-\sigma} a^2 - \frac{1+2\sigma}{1-\sigma} r^2\right), \\ \widehat{zz} = \frac{\omega^2 \varrho (a^2 - 2r^2)}{4} \frac{\sigma}{1-\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Statt den resultierenden longitudinalen Zug verschwinden zu lassen, könnten wir auch den Zug so gewählt denken, daß die Länge konstant erhalten wird. Wir würden dann haben

$$e = 0, \quad A = \frac{\omega^2 \varrho a^2}{8E} \frac{(3-2\sigma)(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}; \tag{65}$$

die beiden ersten der Gleichungen (64) würden bestehen bleiben, und der Longitudinalzug würde gegeben sein durch die Gleichung

$$\widehat{zz} = \frac{\omega^2 \varrho \{(3-2\sigma)a^2 - 2r^2\}}{4} \frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{66}$$

*Fall (b). Rotierende Scheibe.*

Eine angenäherte Lösung können wir im Falle einer dünnen Scheibe erhalten, indem wir das Problem als das eines ebenen Spannungszustandes behandeln. Ist die Scheibe massiv, so befriedigt die angenäherte Lösung die Gleichungen $\widehat{zz} = 0$, $\widehat{rz} = 0$ überall, so daß die ebenen Seitenflächen der Scheibe spannungsfrei sind; sie genügt aber nicht der Bedingung $\widehat{rr} = 0$ für $r = a$. Statt dessen macht sie $\int_{-l}^{+l} \widehat{rr}\,dz$ für $r = a$ zu null, so daß der resultierende Radialzug über irgendein Stück des Randes verschwindet[1]); sie stellt den Zustand der Scheibe in den Teilen, die nicht zu nahe dem Rande sind, dar.

Im vorliegenden Falle befriedigt $U$ als Funktion von $r$ die Gleichung

$$\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}\right) = -\omega^2 \varrho r; \tag{67}$$

ferner haben wir

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial z}; \tag{68}$$

daraus folgt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\lambda\omega^2\varrho r}{4\mu(\lambda+\mu)}. \tag{69}$$

Diese Gleichungen zusammen mit der Bedingung, daß $\int_{-l}^{+l} \widehat{rr}\,dz$ für $r = a$ verschwindet, bestimmen $U$ und $w$, abgesehen von einer Verschiebung, wie sie in einem starren Körper möglich wäre; wir können etwa noch vorschreiben, daß $U$ und $w$ im Anfangspunkt ($r = 0$, $z = 0$) verschwinden und daß $2\varpi = \partial U/\partial z - \partial w/\partial r$ ebenfalls dort verschwindet. Wir würden dann finden, daß $U$, $w$ durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\omega^2\varrho r}{8E}(1-\sigma)\{(3+\sigma)a^2-(1+\sigma)r^2\} + \frac{\omega^2\varrho r}{6E}\sigma(1+\sigma)(l^2-3z^2), \\ w &= -\frac{\omega^2\varrho z}{4E}\sigma\{(3+\sigma)a^2-2(1+\sigma)r^2\} - \frac{\omega^2\varrho z}{3E}\sigma^2\frac{1+\sigma}{1-\sigma}(l^2-z^2); \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

aus diesen Gleichungen würden wir folgende Ausdrücke für die Spannungskomponenten ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= \frac{\omega^2\varrho}{8}(3+\sigma)(a^2-r^2) + \frac{\omega^2\varrho}{6}\sigma\frac{1+\sigma}{1-\sigma}(l^2-3z^2), \\ \widehat{\theta\theta} &= \frac{\omega^2\varrho}{8}\{(3+\sigma)a^2-(1+3\sigma)r^2\} + \frac{\omega^2\varrho}{6}\sigma\frac{1+\sigma}{1-\sigma}(l^2-3z^2). \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

---

1) Die vollständige Lösung des Problems würde noch eine zusätzliche Verschiebung erfordern, die der Spannung $-\widehat{rr}$ auf der Randfläche und der Spannung null auf den ebenen Seitenflächen entspräche. Siehe eine Abhandlung von F. Purser in *Dublin, Trans. R. Irish Acad.*, vol. 32 (1902)

Ist ein Achsenloch vom Radius $a'$ vorhanden, so haben wir die weitere Bedingung, daß $\int\limits_{-l}^{+l}\widehat{rr}\,dz = 0$ für $r = a'$; jetzt darf aber die Verschiebung Glieder enthalten, die in der Achse selbst unendlich groß würden. Die vollständige Lösung würden wir erhalten, wenn wir zu obigen Ausdrücken für $U$ und $w$ Glieder $U'$ und $w'$ addierten, die durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{\omega^2 \varrho r}{8E}(3+\sigma)\left[(1-\sigma)a'^2 + (1+\sigma)\frac{a^2 a'^2}{r^2}\right], \\ w' &= \frac{\omega^2 \varrho z}{4E}\sigma(3+\sigma)a'^2, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

und diesen Verschiebungen entsprechen die zusätzlichen Spannungen

$$\widehat{rr} = \frac{\omega^2\varrho}{8}(3+\sigma)\left(a'^2 - \frac{a^2 a'^2}{r^2}\right), \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\omega^2\varrho}{8}(3+\sigma)\left(a'^2 + \frac{a^2 a'^2}{r^2}\right); \tag{73}$$

diese sind zu den in (71) angegebenen Ausdrücken für $\widehat{rr}$ und $\widehat{\theta\theta}$ zu addieren.

# Kapitel VI.

## Gleichgewicht äolotroper elastischer fester Körper.

### § 103. Struktursymmetrie.

Auf die Abhängigkeit der in § 72, (25), angegebenen Relationen zwischen Spannung und Verzerrung von der Richtung der Bezugsachsen ist in § 68 hingewiesen worden. Die Relationen vereinfachen sich, wenn das Material gewisse Symmetrieeigenschaften zeigt und die Bezugsachsen passend gewählt werden. Wir müssen uns zunächst über den geometrischen Charakter der Symmetriearten, die man in verschiedenen Materialien beobachtet, verbreiten. Die Natur der Äolotropie des Materials ist durch sein elastisches Verhalten allein nicht völlig bestimmt. Es kann auch mit Bezug auf andere physikalische Eigenschaften, z. B. das Lichtbrechungsvermögen, äolotrop sein. Lassen sich in einem äolotropen Körper zwei Geraden so angeben, daß die physikalischen Eigenschaften des Materials relativ zu ihnen sämtlich übereinstimmen, so nennt man solche Geraden „gleichwertig". Verschiedene Stoffe können nach der Verteilung gleichwertiger Geraden in ihnen unterschieden werden. Gegenwärtig beschränken wir uns auf den Fall homogener Materialien, für die parallele Geraden mit gleichem Richtungssinn gleichwertig sind; wir haben dann die Verteilung der in einem Punkte sich kreuzenden gleichwertigen Geraden ins Auge zu fassen. Für manche Zwecke ist es wichtig zu bemerken, daß entgegengesetzt gerichtete Geraden nicht immer gleichwertig sind. Wenn gewisse Kristalle Temperaturänderungen erleiden, so werden die entgegengesetzten Enden bestimmter Achsen entgegengesetzt elektrisch; es ist dies die Erscheinung der *Pyroelektrizität.* Wenn gewisse Kristalle von zwei parallelen Ebenen zusammengedrückt werden, die zu bestimmten Achsen senkrecht verlaufen, so werden die entgegengesetzten Enden dieser Achsen entgegengesetzt elektrisch; es ist dies die Erscheinung der *Piezoelektrizität.*[1]) Demgemäß be-

1) Eine Zusammenstellung der Haupttatsachen bezüglich der Pyro- und Piezoelektrizität findet der Leser in Mascart, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme,* t. 1, Paris 1896, oder Liebisch, *Physikalische Kristallographie,* Leipzig 1891.

trachten wir die Eigenschaften eines Materials relativ zu den von einem Punkt auslaufenden *Strahlen* oder *Richtungen*; die Natur der Symmetrie eines Materials bestimmen wir durch die Verteilung gleichwertiger Richtungen in demselben. Eine Figur, die ein System gleichwertiger Richtungen darstellt, ist das geometrische Bild für eine gewisse Art von Symmetrie.

## § 104. Geometrische Symmetrie.[1])

Wenn eine Umdrehungsfläche durch einen beliebigen Winkel um die Umdrehungsachse gedreht wird, so wird der Ort jedes Punktes, der auf der Umdrehungsfläche, aber nicht auf der Achse, liegt, geändert; die Figur als Ganzes jedoch hat ihre Lage nicht geändert. Mit andern Worten, die Fläche kann durch eine Operation, die den Ort einiger ihrer Punkte ändert, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden. Eine geometrische Figur, die durch eine Operation, welche den Ort einiger ihrer Punkte verändert, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, besitzt, wie man sagt, „Symmetrie". Die in Rede stehenden Operationen sind bekannt als „Deckoperationen", und von einer Figur, die durch eine derartige Operation mit sich selbst zur Deckung gebracht wird, sagt man, sie „gestattet" diese Operation. Die möglichen Deckoperationen umfassen 1) Drehung, und zwar durch einen bestimmten Winkel oder einen beliebigen Winkel, 2) Spiegelung an einer Ebene. Eine Figur, die eine Drehung um eine Achse gestattet, besitzt, wie man sagt, eine „Symmetrieachse"; eine Figur, die Spiegelung an einer Ebene gestattet, besitzt, wie man sagt, eine „Symmetrieebene".

Es läßt sich zeigen, daß jede Deckoperation, die weder in einer Drehung um eine Achse noch in einer Spiegelung an einer Ebene besteht, mit einer Kombination jener Operationen gleichwertig ist. Von derartigen Kombinationen ist eine besonders wichtig. Sie besteht aus einer Drehung um eine Achse und einer Spiegelung an der dazu senkrechten Ebene. Betrachten wir beispielsweise ein Ellipsoid mit den Halbachsen $a$, $b$, $c$ und nehmen an, es werde längs der Ebene $(a, b)$ mitten durchgeschnitten und darauf die eine Hälfte gegen die andere durch $\frac{1}{2}\pi$ um die Achse $(c)$ verdreht. Das Ellipsoid gestattet eine Drehung vom Betrage $\pi$ um jede Hauptachse und ebenfalls eine Spiegelung an jeder Hauptebene; der Körper, den wir in der angegebenen Weise aus dem Ellipsoid gebildet haben, gestattet eine Drehung vom Betrage $\frac{1}{2}\pi$ um die $c$-Achse, verbunden mit einer

1) Eine ausführlichere Darstellung mit den zugehörigen Beweisen gibt Schoenflies, *Kristallsysteme und Kristallstruktur,* Leipzig, 1891. Man vergleiche auch H. Hilton, *Mathematical Crystallography and the Theory of Groups of Movements*, Oxford 1903.

Spiegelung an der dazu senkrechten Ebene, gestattet aber nicht die Drehung oder die Spiegelung für sich allein. Eine Figur, die die aus Drehung um eine Achse und Spiegelung an der zu ihr senkrechten Ebene kombinierte Operation gestattet, besitzt, wie man sich ausdrückt, eine „Achse alternierender Symmetrie".

Ein besonderer Fall der eben beschriebenen Operation ergibt sich, wenn der Drehwinkel um die Achse der alternierenden Symmetrie gleich $\pi$ ist. Das Ergebnis der aus dieser Drehung und der Spiegelung an der dazu senkrechten Ebene bestehenden Operation ist das, daß jeder von einem Punkte auslaufende Strahl durch den Gegenstrahl ersetzt wird. Diese Operation ist unter dem Namen „Inversion" oder „zentrische Spiegelung" bekannt, die Richtung der entsprechenden Achse der alternierenden Symmetrie ist willkürlich; eine Figur, die diese Operation gestattet, besitzt, wie man sagt, ein „Symmetriezentrum".

Das Ergebnis von zwei oder mehr Deckoperationen, die in beliebiger Reihenfolge nacheinander ausgeführt werden, ist, wie sich zeigen läßt, entweder identisch mit dem Ergebnis einer einzigen Deckoperation, oder aber Anfangs- und Endlage jedes Punktes der Figur stimmen überein. Wir schließen den letzteren Fall in den ersteren mit ein, indem wir die „identische Operation" als Deckoperation einführen; diese Operation läßt jeden Punkt an seiner Stelle. Mit dieser Verabredung läßt sich obiger Satz in der Form aussprechen: die Deckoperationen, die irgendeine symmetrische Figur gestattet, bilden eine *Gruppe.*

Jeder Deckoperation entspricht eine orthogonale lineare Transformation der Koordinaten. Besteht die Operation in einer Drehung um eine Achse, so ist die Determinante der Transformation gleich $+1$; für jede andere Deckoperation ist die Determinante gleich $-1$. Alle Transformationen, welche von derselben Figur gestatteten Deckoperationen entsprechen, bilden eine *Gruppe linearer Substitutionen.*

## § 105. Elastische Symmetrie.

In einem isotropen elastischen Körper sind alle Strahlen, die von einem Punkte auslaufen, gleichwertig. Zeigt ein äolotroper elastischer Körper irgendeine Symmetrieeigenschaft, so lassen sich einzelne gleichwertige Richtungen angeben; die von ihnen gebildete Figur ist eine Symmetriefigur, die alle Deckoperationen einer gewissen Gruppe gestattet. Dieser Gruppe von Operationen entspricht eine Gruppe orthogonaler linearer Substitutionen; und die Verzerrungsenergie-Funktion bleibt bei allen Substitutionen dieser Gruppe ungeändert. Das Ergebnis einer derartigen Substitution ist, daß die Verzerrungskomponenten, bezogen auf die neuen Koordinaten, lineare Funktionen

der auf die alten Koordinaten bezogenen Verzerrungskomponenten sind. Es wird nützlich sein, die Relationen zwischen den elastischen Konstanten zu ermitteln, die erfüllt sein müssen, wenn die Verzerrungsenergie-Funktion bei einer derartigen Transformation der Verzerrungskomponenten ungeändert bleiben soll.

Die Koordinaten mögen nach folgendem Orthogonalschema transformiert werden:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y'$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z'$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

Aus § 12 wissen wir, daß die Verzerrungskomponenten sich nach Formeln von folgendem Typus transformieren:

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx}l_1^2 + e_{yy}m_1^2 + e_{zz}n_1^2 + e_{yz}m_1n_1 + e_{zx}n_1l_1 + e_{xy}l_1m_1, \\ e_{y'z'} &= 2\,e_{xx}l_2l_3 + 2\,e_{yy}m_2m_3 + 2\,e_{zz}n_2n_3 + e_{yz}(m_2n_3 + m_3n_2) \\ &\quad + e_{zx}(n_2l_3 + n_3l_2) + e_{xy}(l_2m_3 + l_3m_2). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Besitzt das Material in jedem Punkt ein Symmetriezentrum, so gestattet die Figur der von dem Punkte auslaufenden gleichwertigen Strahlen die Operation der zentrischen Spiegelung. Die entsprechende Substitution ist durch die Gleichungen gegeben

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z.$$

Diese Substitution ist ohne Einfluß auf die Verzerrungskomponenten, und wir schließen daraus, daß das elastische Verhalten eines Materials vom Vorhandensein oder Nichtvorhandensein zentrischer Symmetrie in keiner Weise abhängig ist. Das Fehlen derartiger Symmetrie in einem Material würde man durch experimentelle Untersuchungen über das Verhältnis zwischen Spannung und Verzerrung nicht aufdecken können.

Wir haben nun noch die Bedingungen dafür zu bestimmen, daß die Verzerrungsenergie-Funktion ungeändert bleibt, wenn die Verzerrungskomponenten durch die den folgenden Operationen entsprechenden Substitutionen transformiert werden: 1) Spiegelung an einer Ebene, 2) Drehung um eine Achse, 3) Drehung um eine Achse kombiniert mit Spiegelung an der zu der Achse senkrechten Ebene. Als Symmetrieebene nehmen wir die $(x, y)$-Ebene, als Symmetrieachse bezw. als Achse der alternierenden Symmetrie die $z$-Achse. Als Drehwinkel werden wir einen gegebenen Winkel $\theta$ anzunehmen haben, der vorderhand als völlig willkürlich zu denken ist.

Die Bedingungen dafür, daß die Verzerrungsenergie-Funktion durch irgendeine der zu betrachtenden Substitutionen ungeändert bleibt, erhalten wir, indem wir für $e_{x'x'}$ die in $e_{xx}, \ldots$ ausgedrückten Werte in der Form $c_{11} e_{x'x'}^2 + \cdots$ einsetzen und die Koeffizienten der verschiedenen Terme den Koeffizienten in der Form $c_{11} e_{xx}^2 + \cdots$ gleichsetzen.

Die Substitution, die der Spiegelung an der $(x, y)$-Ebene entspricht, ist gegeben durch die Gleichungen

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z;$$

die Formeln, die die auf die beiden Achsensysteme bezogenen Verzerrungskomponenten verknüpfen, lauten

$$\begin{gathered} e_{x'x'} = e_{xx}, \qquad e_{y'y'} = e_{yy}, \qquad e_{z'z'} = e_{zz}, \\ e_{y'z'} = -e_{yz}, \quad e_{z'x'} = -e_{zx}, \quad e_{x'y'} = e_{xy}. \end{gathered}$$

Die Bedingungen dafür, daß die Verzerrungsenergie-Funktion durch diese Substitution ungeändert bleibt, sind

$$c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0. \tag{2}$$

Die Substitution, die der Drehung um die $z$-Achse durch einen Winkel $\theta$ entspricht, ist gegeben durch die Gleichungen

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta, \quad y' = -x \sin\theta + y \cos\theta, \quad z' = z; \tag{3}$$

die Formeln, die die auf die beiden Achsensysteme bezogenen Verzerrungskomponenten verknüpfen, lauten

$$\left.\begin{aligned} e_{x'x'} &= e_{xx} \cos^2\theta + e_{yy} \sin^2\theta + e_{xy} \sin\theta \cos\theta, \\ e_{y'y'} &= e_{xx} \sin^2\theta + e_{yy} \cos^2\theta - e_{xy} \sin\theta \cos\theta, \\ e_{z'z'} &= e_{zz}. \\ e_{y'z'} &= e_{yz} \cos\theta - e_{zx} \sin\theta, \\ e_{z'x'} &= e_{yz} \sin\theta + e_{zx} \cos\theta, \\ e_{x'y'} &= -2 e_{xx} \sin\theta \cos\theta + 2 e_{yy} \sin\theta \cos\theta + e_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Bestimmung der Bedingungen dafür, daß die Verzerrungsenergie-Funktion durch diese Substitution ungeändert bleibt, erfordert eine viel verwickeltere Rechnung als in den Fällen der zentrischen Spiegelung und der Spiegelung an einer Ebene. Die Gleichungen zerfallen in einzelne Gruppen, die jede nur eine kleine Anzahl von Koeffizienten miteinander verknüpfen, und die Relationen zwischen den Koeffizienten, die in einer Gleichungsgruppe vorkommen, sind leicht abzuleiten. Wir gehen daran, das algebraische Verfahren anzudeuten. Wir haben die Gleichungsgruppe

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{11} \cos^4\theta + 2 c_{12} \sin^2\theta \cos^2\theta + c_{22} \sin^4\theta - 4 c_{16} \cos^3\theta \sin\theta \\ &\qquad - 4 c_{26} \sin^3\theta \cos\theta + 4 c_{66} \sin^2\theta \cos^2\theta, \\ c_{22} &= c_{11} \sin^4\theta + 2 c_{12} \sin^2\theta \cos^2\theta + c_{22} \cos^4\theta + 4 c_{16} \sin^3\theta \cos\theta \\ &\qquad + 4 c_{26} \cos^3\theta \sin\theta + 4 c_{66} \sin^2\theta \cos^2\theta, \end{aligned}$$

$$c_{12} = c_{11} \sin^2\theta \cos^2\theta + c_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + c_{22}\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+ 2(c_{16} - c_{26})\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 4c_{66}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$
$$c_{66} = c_{11}\sin^2\theta\cos^2\theta - 2c_{12}\sin^2\theta\cos^2\theta + c_{22}\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+ 2(c_{16}-c_{26})\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + c_{66}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2,$$
$$c_{16} = c_{11}\cos^3\theta\sin\theta - c_{12}\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - c_{22}\sin^3\theta\cos\theta$$
$$+ c_{16}\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta) + c_{26}\sin^2\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$- 2c_{66}\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$
$$c_{26} = c_{11}\sin^3\theta\cos\theta + c_{12}\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - c_{22}\cos^3\theta\sin\theta$$
$$+ c_{16}\sin^2\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) + c_{26}\cos^2\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)$$
$$+ 2c_{66}\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Die Gleichungen dieser Gruppe sind nicht unabhängig von einander, wie wir erkennen, wenn wir die ersten vier addieren. Wir bilden folgende Kombination:

$$c_{16} + c_{26} = (c_{11} - c_{22})\sin\theta\cos\theta + (c_{16} + c_{26})(\cos^4\theta - \sin^4\theta),$$
$$c_{11} - c_{22} = (c_{11} - c_{22})(\cos^4\theta - \sin^4\theta) - 4(c_{16} + c_{26})\sin\theta\cos\theta;$$

hieraus folgt, falls nicht $\sin\theta = 0$, daß wir haben:

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{26} = -c_{16}.$$

Benutzen wir diese Resultate in einer der vier ersten Gleichungen der obigen Gruppe, so finden wir

$$(c_{11} - c_{12} - 2c_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + 2c_{16}\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0;$$

benutzen wir sie in einer der beiden letzten derselben Gruppe, so finden wir

$$-8c_{16}\sin^2\theta\cos^2\theta + (c_{11} - c_{12} - 2c_{66})\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0;$$

wenn also weder $\sin\theta$ noch $\cos\theta$ verschwindet, so folgt, daß

$$c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \quad c_{16} = 0.$$

Andererseits haben wir die Gleichungsgruppe

$$c_{13} = c_{13}\cos^2\theta + c_{23}\sin^2\theta - 2c_{36}\sin\theta\cos\theta,$$
$$c_{23} = c_{13}\sin^2\theta + c_{23}\cos^2\theta + 2c_{36}\sin\theta\cos\theta,$$
$$c_{36} = (c_{13} - c_{23})\sin\theta\cos\theta + c_{36}(\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

daraus folgt, falls nicht $\sin\theta = 0$, daß wir haben

$$c_{13} = c_{23}, \quad c_{36} = 0.$$

Genau so haben wir die Gleichungsgruppe

$$c_{44} = c_{44}\cos^2\theta + c_{55}\sin^2\theta + 2c_{45}\sin\theta\cos\theta,$$
$$c_{55} = c_{44}\sin^2\theta + c_{55}\cos^2\theta - 2c_{45}\sin\theta\cos\theta,$$
$$c_{45} = -(c_{44} - c_{55})\sin\theta\cos\theta + c_{45}(\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

hieraus folgt, falls nicht $\sin\theta = 0$, daß

$$c_{44} = c_{55}, \quad c_{45} = 0.$$

Entsprechend haben wir die Gleichungsgruppe

$$c_{34} = c_{34} \cos\theta + c_{35} \sin\theta,$$
$$c_{35} = - c_{34} \sin\theta + c_{35} \cos\theta;$$

da $\cos\theta \neq 1$, folgt daraus, daß wir haben

$$c_{34} = c_{35} = 0.$$

Schließlich haben wir die Gleichungsgruppe

$$c_{14} = c_{14} \cos^3\theta + c_{15} \cos^2\theta \sin\theta + c_{24} \sin^2\theta \cos\theta + c_{25} \sin^3\theta - 2 c_{46} \cos^2\theta \sin\theta - 2 c_{56} \sin^2\theta \cos\theta,$$

$$c_{15} = - c_{14} \cos^2\theta \sin\theta + c_{15} \cos^3\theta - c_{24} \sin^3\theta + c_{25} \sin^2\theta \cos\theta + 2 c_{46} \sin^2\theta \cos\theta - 2 c_{56} \cos^2\theta \sin\theta,$$

$$c_{24} = c_{14} \sin^2\theta \cos\theta + c_{15} \sin^3\theta + c_{24} \cos^3\theta + c_{25} \cos^2\theta \sin\theta + 2 c_{46} \cos^2\theta \sin\theta + 2 c_{56} \sin^2\theta \cos\theta,$$

$$c_{25} = - c_{14} \sin^3\theta + c_{15} \sin^2\theta \cos\theta - c_{24} \cos^2\theta \sin\theta + c_{25} \cos^3\theta - 2 c_{46} \sin^2\theta \cos\theta + 2 c_{56} \cos^2\theta \sin\theta,$$

$$c_{46} = c_{14} \cos^2\theta \sin\theta + c_{15} \sin^2\theta \cos\theta - c_{24} \cos^2\theta \sin\theta - c_{25} \sin^2\theta \cos\theta + (c_{46} \cos\theta + c_{56} \sin\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

$$c_{56} = - c_{14} \sin^2\theta \cos\theta + c_{15} \cos^2\theta \sin\theta + c_{24} \sin^2\theta \cos\theta - c_{25} \cos^2\theta \sin\theta - (c_{46} \sin\theta - c_{56} \cos\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Wir bilden daraus die Kombinationen

$$c_{14} + c_{24} = (c_{14} + c_{24}) \cos\theta + (c_{15} + c_{25}) \sin\theta,$$
$$c_{15} + c_{25} = - (c_{14} + c_{24}) \sin\theta + (c_{15} + c_{25}) \cos\theta;$$

da $\cos\theta \neq 1$, so folgt hieraus, daß

$$c_{14} + c_{24} = 0, \quad c_{15} + c_{25} = 0.$$

Unter Benutzung dieser Resultate bilden wir die Kombinationen

$$(c_{14} - c_{56}) = (c_{14} - c_{56}) \cos\theta - (c_{15} + c_{46}) \sin\theta,$$
$$(c_{15} + c_{46}) = (c_{14} - c_{56}) \sin\theta + (c_{15} + c_{46}) \cos\theta;$$

daraus folgt, daß

$$c_{14} = c_{56}, \quad c_{15} = - c_{46}.$$

Wir benutzen diese Resultate, um alle Koeffizienten in obiger Gleichungsgruppe durch $c_{46}$ und $c_{56}$ auszudrücken; diese ist dann gleichwertig mit den beiden Gleichungen

$$c_{46}(1 - \cos^3\theta + 3 \sin^2\theta \cos\theta) - c_{56}(3 \cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta) = 0,$$
$$c_{46}(3 \cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta) + c_{56}(1 - \cos^3\theta + 3 \sin^2\theta \cos\theta) = 0.$$

Die Bedingung dafür, daß dieselben miteinander verträglich sind, reduziert sich, wie sich zeigt, auf $(1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)^2 = 0$; falls nicht $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, erhalten wir somit:

$$c_{46} = c_{56} = 0.$$

Es ergibt sich also Folgendes: Bleibt die Verzerrungsenergie-Funktion ungeändert durch eine Substitution, die einer Drehung um die $z$-Achse durch einen beliebigen, von $\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$ verschiedenen Winkel entspricht, so müssen folgende Koeffizienten verschwinden:

$$c_{16},\ c_{26},\ c_{36},\ c_{46},\ c_{56},\ c_{45},\ c_{14},\ c_{24},\ c_{15},\ c_{25},\ c_{34},\ c_{35}; \tag{5}$$

außerdem müssen zwischen den übrigen Koeffizienten folgende Gleichungen bestehen:

$$c_{11} = c_{22},\ c_{13} = c_{23},\ c_{44} = c_{55},\ c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \tag{6}$$

Ist der Drehwinkel gleich $\pi$, so verschwinden folgende Koeffizienten:

$$c_{14},\ c_{24},\ c_{15},\ c_{25},\ c_{46},\ c_{56},\ c_{34},\ c_{35}; \tag{7}$$

Relationen zwischen den übrigen Koeffizienten treten nicht auf. Ist der Drehwinkel gleich $\frac{1}{2}\pi$, so verschwinden folgende Koeffizienten:

$$c_{36},\ c_{46},\ e_{56},\ c_{45},\ c_{14},\ c_{24},\ c_{15},\ c_{25},\ c_{34},\ c_{35}; \tag{8}$$

und die übrigen Koeffizienten sind durch folgende Gleichungen verknüpft:

$$c_{11} = c_{22},\ c_{13} = c_{23},\ c_{44} = c_{55},\ c_{26} = -c_{16}. \tag{9}$$

Ist der Drehwinkel gleich $\frac{2}{3}\pi$, so verschwinden folgende Koeffizienten:

$$c_{16},\ c_{26},\ c_{36},\ c_{45},\ c_{34},\ c_{35}; \tag{10}$$

und zwischen den übrigen Koeffizienten bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &c_{11} = c_{22},\ c_{13} = c_{23},\ c_{44} = c_{55},\ c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}),\\ &c_{14} = -c_{24} = c_{56},\ -c_{15} = c_{25} = c_{46}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ist die $z$-Achse eine Achse alternierender Symmetrie und der Drehwinkel verschieden von $\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, so verschwinden dieselben Koeffizienten wie in dem allgemeinen Falle einer Symmetrieachse, und zwischen den übrigen Koeffizienten bestehen dieselben Relationen. Ist der Drehwinkel gleich $\pi$, so haben wir den Fall der zentrischen Spiegelung, der bereits abgehandelt wurde. Ist der Winkel gleich $\frac{1}{2}\pi$, so gelten dieselben Resultate wie für direkte Symmetrie. Ist er gleich $\frac{1}{3}\pi$, so sind die Resultate dieselben wie die für eine Achse direkter Symmetrie mit dem Drehwinkel $\frac{2}{3}\pi$.

## § 106. Isotroper Körper.

Im Falle eines isotropen Körpers ist jede Ebene eine Symmetrieebene, jede Achse ist eine Symmetrieachse, und die entsprechende Drehung

kann einen beliebigen Betrag haben. Folgende Koeffizienten müssen verschwinden:

$$c_{14},\ c_{15},\ c_{16},\ c_{24},\ c_{25},\ c_{26},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{36},\ c_{45},\ c_{46},\ c_{56}, \tag{12}$$

und es müssen folgende Beziehungen zwischen den übrigen Koeffizienten bestehen:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33},\ \ c_{23} = c_{31} = c_{12},\ \ c_{44} = c_{55} = c_{66} = \tfrac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \tag{13}$$

Somit reduziert sich die Verzerrungsenergie-Funktion auf die Form

$$\tfrac{1}{2} c_{11} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + c_{12} (e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx} + e_{xx} e_{yy}) \\ + \tfrac{1}{4} (c_{11} - c_{12}) (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2), \tag{14}$$

die mit dem in § 68 zugrunde gelegten Ausdruck übereinstimmt.

## § 107. Symmetrie der Kristalle.

Unter den äolotropen Stoffen zählen erfahrungsgemäß die kristallinischen Körper zu den wichtigsten. Man hat die Struktursymmetrien der kristallinischen Stoffe hauptsächlich in der Weise untersucht, daß man die Gestalt der Kristalle ins Auge faßte. Dies führte dazu, daß man sich in jedem Fall eine von Ebenen begrenzte Figur konstruierte, die dieselbe Symmetrie besitzt, wie sie gemeiniglich die Kristallfiguren zeigen, die von der Natur bei der Kristallisation eines Materials gebildet werden. Die in Rede stehende Figur ist die dem Material entsprechende „kristallographische Form".

F. Neumann[1]) stellte bezüglich des physikalischen Verhaltens kristallinischer Stoffe ein fundamentales Prinzip auf. Dasselbe läßt sich so aussprechen: Jede Symmetrieeigenschaft, die die kristallographische Form des Materials hat, besitzt das Material bezüglich aller physikalischen Eigenschaften. Mit andern Worten: eine Figur, die aus einem System von einem Punkt auslaufender Strahlen besteht und die dieselbe Symmetrie besitzt wie die kristallographische Form, bedeutet für das Material ein System gleichwertiger Strahlen. — Das Gesetz ist durch Induktion aus der Erfahrung geworden, der Beweis stützt sich zum Teil auf Verifikationen *a posteriori*.

Es ist zu bemerken, daß ein Kristall möglicherweise und im allgemeinen tatsächlich bezüglich einzelner physikalischer Eigenschaften Symmetrieverhältnisse aufweist, die die kristallographische Form nicht besitzt. Zum Beispiel sind Kristalle des regulären Systems optisch isotrop. Andere Beispiele sind aus Resultaten, die in § 105 erhalten wurden, zu entnehmen.

*Die Symmetriegesetze der Kristalle* sind die Gesetze, die die kristallographischen Formen erfahrungsgemäß befolgen. Am einfachsten lassen sie sich in der Sprache der gleichwertigen Strahlen aussprechen, wie folgt:

1) Siehe seine *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität,* Leipzig 1885.

1) Die Zahl der mit einem bestimmten Strahl gleichwertigen Strahlen ist endlich.

2) Die Zahl der mit einem vorgegebenen Strahl gleichwertigen Strahlen ist im allgemeinen die gleiche für alle Lagen des vorgegebenen Strahls. Wir setzen diese Zahl gleich $N-1$, sodaß wir ein System von $N$ gleichwertigen Strahlen haben. Für spezielle Lagen, z. B. wenn einer der Strahlen eine Symmetrieachse ist, kann die Zahl der Strahlen eines solchen Systems kleiner sein als $N$.

3) Eine Figur, die von $N$ gleichwertigen Strahlen gebildet wird, ist eine symmetrische Figur, die alle Deckoperationen einer gewissen Gruppe gestattet. Durch diese Operationen werden die $N$. gleichwertigen Strahlen miteinander vertauscht, sodaß jeder Strahl wenigstens einmal die Lage eines gleichwertigen Strahls einnimmt. Jede aus gleichwertigen Strahlen gebildete Figur erlaubt alle Deckoperationen derselben Gruppe.

4) Besitzt eine aus $N$ gleichwertigen Strahlen gebildete Figur eine Symmetrieachse oder eine Achse alternierender Symmetrie, so ist der entsprechende Drehwinkel gleich einem der Winkel $\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$.[1])

Es läßt sich zeigen, daß es 32 und nur 32 Gruppen von Deckoperationen gibt, die die Gesetze der Kristallsymmetrie befolgen. Jeder dieser Gruppen entspricht eine Klasse von Kristallen. Die Verzerrungsenergie-Funktion, die jeder dieser Klassen entspricht, läßt sich unter Benutzung der Resultate von § 105 hinschreiben; jede der Formen, die die Funktion annehmen kann, entspricht aber mehr als einer Klasse von Kristallen. Wir müssen die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Klassen kurz beschreiben. Zu diesem Zweck führen wir nunmehr einige Definitionen und geometrische Sätze, die Symmetrieachsen betreffend, ein:

Der Drehwinkel um eine Symmetrieachse oder eine Achse alternierender Symmetrie ist gleich $2\pi/n$, wo $n$ eine der Zahlen 2, 3, 4, 6. Man bezeichnet die Achse als „$n$-gonal". Bezüglich für $n = 2, 3, 4, 6$ nennt man die Achse „digonal", „trigonal", „tetragonal", „hexagonal". Wenn nichts anderes bemerkt ist, ist unter der $n$-gonalen Achse eine Symmetrieachse und nicht eine Achse alternierender Symmetrie zu verstehen.

Das Vorhandensein einer digonalen Achse senkrecht zu einer $n$-gonalen Achse läßt auf das Vorhandensein $n$ solcher Achsen schließen; ist z. B. die $z$-Achse tetragonal und die $x$-Achse digonal, so sind auch die $y$-Achse und die Winkelhalbierenden des $(x, y)$-Achsenkreuzes digonale Achsen.

Das Vorhandensein einer Symmetrieebene, die durch eine $n$-gonale Achse geht, läßt auf das Vorhandensein $n$ solcher Ebenen schließen; ist z. B. die $z$-Achse digonal und die Ebene $x = 0$ eine Symmetrieebene, so ist auch die Ebene $y = 0$ eine Symmetrieebene.

Ist die $n$-gonale Achse eine Achse alternierender Symmetrie, so bleiben die beiden eben genannten Sätze bestehen, falls $n$ ungerade; ist aber $n$ gerade, so ist die Zahl der betreffenden Achsen oder Ebenen gleich $\frac{1}{2}n$.

---

1) Die Beschränkung auf diese Winkel drückt das „Gesetz der rationalen Indices" aus.

## § 108. Klassifikation der Kristalle.

Wir können nun den Symmetriecharakter der einzelnen Kristallklassen beschreiben, indem wir uns auf die Gruppe der Deckoperationen beziehen, die jeder von ihnen entspricht:

Eine Gruppe besteht aus der identischen Operation allein; die entsprechende Figur besitzt keine Symmetrie; sie wird als „asymmetrisch" zu bezeichnen sein. Die identische Operation ist eine in allen Gruppen enthaltene Operation. Eine zweite Gruppe umfaßt außer der identischen Operation nur die Operation der zentrischen Spiegelung; die Symmetrie der entsprechenden Figur werden wir als „zentrisch" bezeichnen. Eine dritte Gruppe enthält außer der identischen Operation nur die Operation der Spiegelung an einer Ebene; die Symmetrie der entsprechenden Figur werden wir als „äquatorial" bezeichnen. Außer diesen drei Gruppen gibt es 24 Gruppen, die eine „Hauptachse" besitzen: bei diesen steht jede von der Hauptachse verschiedene Symmetrieachse zur Hauptachse senkrecht, und jede Symmetrieebene geht entweder durch die Hauptachse oder steht zu ihr senkrecht. Die fünf übrigen Gruppen sind gekennzeichnet durch das Vorhandensein von vier Achsen trigonaler Symmetrie, die so zueinander geneigt sind wie die Diagonalen eines Würfels.

Wenn im Falle einer $n$-gonalen Hauptachse keine Symmetrieebene durch die Achse geht, so bezeichnet man die Symmetrie als „$n$-gonal"; falls digonale Achsen senkrecht zur Hauptachse vorhanden sind, bezeichnet man die Symmetrie weiterhin als „holoaxial"; existiert eine Symmetrieebene senkrecht zur Hauptachse, so wird die Symmetrie des näheren als „äquatorial" bezeichnet; ist die Symmetrie weder holoaxial noch äquatorial, so spricht man von „polarer" Symmetrie. Wenn eine Symmetrieebene durch die $n$-gonale Hauptachse vorhanden ist, so bezeichnet man die Symmetrie als „di-$n$-gonal"; genauer wird sie als „äquatorial" oder „polar" bezeichnet, je nachdem senkrecht zur Hauptachse eine Symmetrieebene existiert oder nicht.

Wenn die Hauptachse eine Achse alternierender Symmetrie ist, so nennt man die Symmetrie „di-$n$-gonal alternierend" oder „$n$-gonal alternierend", je nachdem eine Symmetrieebene durch die Hauptachse vorhanden ist oder nicht.

Die beigefügte Tabelle enthält die Namen[1]) der bisher angeführten Kristallklassen, die Symbole[2]) der entsprechenden Deckoperationsgruppen und die Nummer der Klassen nach Voigt.[3]) Außerdem findet man darin die Gruppierung der Klassen nach Systemen und die Namen der Klassen nach Lewis.[4])

1) Es sind die von H. A. Miers, *Mineralogy,* Oxford 1902, angenommenen Namen.

2) Es sind die von Schoenflies in seinem Buch *Kristallsysteme und Kristallstruktur* gebrauchten Symbole.

3) *Rapports présentées au Congrès International de Physique,* t. 1, Paris 1900.

4) W. J. Lewis, *Treatise on Crystallography,* Cambridge 1899. Die ältere Klassifikation nach sechs (bisweilen sieben) „Systemen" im Gegensatz zu den 32 „Klassen" wird noch von neueren Autoritäten vertreten. Siehe V. Goldschmidt, *Zeitschr. f. Kristallographie,* Bde. 31 und 32 (1899).

| System | Name der Klasse [Miers] | Symbol der Gruppe [Schoenflies] | Nummer der Klasse [Voigt] | Name der Klasse [Lewis] |
|---|---|---|---|---|
| Triklin oder anorthisch | Asymmetrisch | $C_1$ | 2 | Anorthisch I |
| | Zentrisch | $S_2$ | 1 | Anorthisch II |
| Monoklin | Äquatorial | $S$ | 4 | Monoklin II |
| | Digonal polar | $C_2$ | 5 | Monoklin I |
| | Digonal äquatorial | $C_2^h$ | 3 | Monoklin III |
| Rhombisch oder prismatisch | Digonal holoaxial | $V$ | 7 | Prismatisch I |
| | Didigonal polar | $C_2^v$ | 8 | Prismatisch III |
| | Didigonal äquatorial | $V^h$ | 6 | Prismatisch II |
| Hexagonal und rhomboëdrisch | Trigonal polar | $C_3$ | 13 | Rhomboëdrisch I |
| | Trigonal holoaxial | $D_3$ | 10 | Rhomboëdrisch IV |
| | Trigonal äquatorial | $C_3^h$ | 27 | Rhomboëdrisch VI |
| | Ditrigonal polar | $C_3^v$ | 11 | Rhomboëdrisch V |
| | Ditrigonal äquatorial | $D_3^h$ | 26 | Rhomboëdrisch VII |
| | Hexagonal polar | $C_6$ | 25 | Hexagonal I |
| | Hexagonal alternierend | $S_6$ | 12 | Rhomboëdrisch II |
| | Hexagonal holoaxial | $D_6$ | 23 | Hexagonal V |
| | Hexagonal äquatorial | $C_6^h$ | 24 | Hexagonal II |
| | Dihexagonal polar | $C_6^v$ | 22 | Hexagonal III |
| | Dihexagonal alternierend | $S_6^v$ | 9 | Rhomboëdrisch III |
| | Dihexagonal äquatorial | $D_6^h$ | 21 | Hexagonal IV |
| Tetragonal | Tetragonal polar | $C_4$ | 18 | Tetragonal III |
| | Tetragonal alternierend | $S_4$ | 20 | Tetragonal VII |
| | Tetragonal holoaxial | $D_4$ | 15 | Tetragonal V |
| | Tetragonal äquatorial | $C_4^h$ | 17 | Tetragonal IV |
| | Ditetragonal polar | $C_4^v$ | 16 | Tetragonal VI |
| | Ditetragonal alternierend | $S_4^v$ | 19 | Tetragonal I |
| | Ditetragonal äquatorial | $D_4^h$ | 14 | Tetragonal II |

Die übrigen Gruppen, für die eine Hauptachse nicht existiert, lassen sich durch Bezugnahme auf einen Würfel schildern; die entsprechenden Kristalle nennt man häufig „kubische“ oder „tesserale“ Kristalle. Alle derartigen Kristalle besitzen in jedem Punkt Symmetrieachsen, die wie die Diagonalen eines Würfels verteilt sind, der jenen Punkt zum Mittelpunkt hat, und auch solche, die den Kanten des Würfels parallel sind. Letztere mögen die „kubischen Achsen“ genannt werden. Die Symmetrie um die Diagonalen ist trigonal, sodaß die kubischen Achsen einander gleichwertig sind. Die Symmetrie bezüglich der kubischen Achsen deckt sich mit einem der früher genannten Typen. Es gibt fünf Klassen kubischer Kristalle, die nach ihrer Symmetrie bezüglich dieser Achsen unterschieden werden können. Der Tabelle sind die Namen der Klassen (Miers, Lewis), die Symbole der entsprechenden Gruppen (Schoenflies), die Nummern der Klassen (Voigt) und der Symmetriecharakter bezüglich der kubischen Achsen zu entnehmen.

| Name der Klasse [Miers] | [Lewis] | Symbol der Gruppe [Schoenflies] | Nummer der Klasse [Voigt] | Symmetrie in Bezug auf die kubischen Achsen |
|---|---|---|---|---|
| Tesseral polar | Kubisch III | $T$ | 32 | Digonal |
| Tesseral holoaxial | Kubisch I | $O$ | 29 | Tetragonal |
| Tesseral zentrisch | Kubisch IV | $T^{(h)}$ | 31 | Digonal äquatorial |
| Ditesseral polar | Kubisch V | $T^{(d)}$ | 30 | Tetragonal alternierend |
| Ditesseral zentrisch | Kubisch II | $O^{(h)}$ | 28 | Tetragonal äquatorial |

## § 109. Elastizität der Kristalle.

Wir können jetzt die Formen der Verzerrungsenergie-Funktion für die verschiedenen Kristallklassen hinschreiben. Bei den Klassen, die eine Hauptachse haben, nehmen wir diese als $z$-Achse; ist eine Symmetrieebene durch die Hauptachse vorhanden, so nehmen wir diese Ebene als $(x, z)$-Ebene; wenn keine solche Symmetrieebene existiert, aber eine digonale Achse senkrecht zur Hauptachse vorhanden ist, nehmen wir diese Achse als $y$-Achse. Bei den Kristallen des kubischen Systems wählen wir die kubischen Achsen als Koordinatenachsen. Die Klassen werden wir durch ihre Gruppensymbole wie in den Tabellen von § 108 bezeichnen; an erster Stelle werden wir das Symbol bezw. die Symbole hinschreiben, darauf die entsprechende Verzerrungsenergie-Funktion; die weggelassenen Glieder haben den Koeffizienten null, und die Konstanten mit verschiedenen Suffixen sind voneinander unabhängig. Die Resultate[1]) lauten:

Gruppen $C_1$, $S_2$ — (21 Konstanten)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} c_{11} e_{xx}^2 + c_{12} e_{xx} e_{yy} + c_{13} e_{xx} e_{zz} + c_{14} e_{xx} e_{yz} + c_{15} e_{xx} e_{zx} + c_{16} e_{xx} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{22} e_{yy}^2 + c_{23} e_{yy} e_{zz} + c_{24} e_{yy} e_{yz} + c_{25} e_{yy} e_{zx} + c_{26} e_{yy} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{33} e_{zz}^2 + c_{34} e_{zz} e_{yz} + c_{35} e_{zz} e_{zx} + c_{36} e_{zz} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{44} e_{yz}^2 + c_{45} e_{yz} e_{zx} + c_{46} e_{yz} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{55} e_{zx}^2 + c_{56} e_{zx} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{66} e_{xy}^2 .
\end{aligned}$$

Gruppen $S$, $C_2$, $C_2^h$ — (13 Konstanten)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} c_{11} e_{xx}^2 + c_{12} e_{xx} e_{yy} + c_{13} e_{xx} e_{zz} + c_{16} e_{xx} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{22} e_{yy}^2 + c_{23} e_{yy} e_{zz} + c_{26} e_{yy} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{33} e_{zz}^2 + c_{36} e_{zz} e_{xy} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{44} e_{yz}^2 + c_{45} e_{yz} e_{zx} \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{55} e_{zx}^2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2} c_{66} e_{xy}^2 .
\end{aligned}$$

1) Man verdankt sie Voigt.

Gruppen $V$, $C_2^v$, $V^h$ — (9 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{22}e_{yy}^2 + c_{23}e_{yy}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{55}e_{zx}^2 + \tfrac{1}{2}c_{66}e_{xy}^2.$$

Gruppen $C_3$, $S_6$ — (7 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + c_{14}e_{xx}e_{yz} + c_{15}e_{xx}e_{zx} + \tfrac{1}{2}c_{11}e_{yy}^2 + c_{13}e_{yy}e_{zz} - c_{14}e_{yy}e_{yz} - c_{15}e_{yy}e_{zx} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 - c_{15}e_{yz}e_{xy} + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{zx}^2 + c_{14}e_{zx}e_{xy} + \tfrac{1}{4}(c_{11} - c_{12})e_{xy}^2.$$

Gruppen $D_3$, $C_3^v$, $S_6^u$ — (6 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + c_{15}e_{xx}e_{zx} + \tfrac{1}{2}c_{11}e_{yy}^2 + c_{13}e_{yy}e_{zz} - c_{15}e_{yy}e_{zx} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{zx}^2 - c_{15}e_{yz}e_{xy} + \tfrac{1}{4}(c_{11} - c_{12})e_{xy}^2.$$

Gruppen $C_3^h$, $D_3^h$, $C_6$, $D_6$, $C_6^h$, $C_6^v$, $D_6^h$ — (5 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{11}e_{yy}^2 + c_{13}e_{yy}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{zx}^2 + \tfrac{1}{4}(c_{11} - c_{12})e_{xy}^2.$$

Gruppen $C_4$, $S_4$, $C_4^h$ — (7 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + c_{16}e_{xx}e_{xy} + \tfrac{1}{2}c_{11}e_{yy}^2 + c_{13}e_{yy}e_{zz} - c_{16}e_{yy}e_{xy} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{zx}^2 + \tfrac{1}{2}c_{66}e_{xy}^2.$$

Gruppen $D_4$, $C_4^v$, $S_4^u$, $D_4^h$ — (6 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}e_{xx}^2 + c_{12}e_{xx}e_{yy} + c_{13}e_{xx}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{11}e_{yy}^2 + c_{13}e_{yy}e_{zz} + \tfrac{1}{2}c_{33}e_{zz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{yz}^2 + \tfrac{1}{2}c_{44}e_{zx}^2 + \tfrac{1}{2}c_{66}e_{xy}^2.$$

Gruppen $T$, $O$, $T^h$, $T^d$, $O^h$ — (3 Konstanten)

$$\tfrac{1}{2}c_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + c_{12}(e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy}) + \tfrac{1}{2}c_{44}(e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2).$$

## § 110. Verschiedene Symmetrietypen.

Außer den Symmetrieeigenschaften, die die Kristalle zeigen, kommen noch andere vor, die besondere Beachtung verdienen. Wir notieren folgende Fälle:

1) Das Material kann in jedem Punkt drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen. Wählen wir diese als Koordinatenebenen, so würde die Formel für die Verzerrungsenergie-Funktion lauten

$$2W = Ae_{xx}^2 + Be_{yy}^2 + Ce_{zz}^2 + 2Fe_{yy}e_{zz} + 2Ge_{zz}e_{xx} + 2He_{xx}e_{yy} + Le_{yz}^2 + Me_{zx}^2 + Ne_{xy}^2. \tag{15}$$

Diese Formel umfaßt eine Anzahl der für verschiedene Kristallklassen erhaltenen Formeln.

2) Das Material kann in dem Sinne eine Symmetrieachse besitzen, daß alle Strahlen rechtwinklig zu diesen Achsen gleichwertig sind. Nehmen wir die Symmetrieachse als $z$-Achse, so würde die Formel für die Verzerrungsenergie-Funktion lauten

$$2W = A(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + Ce_{zz}^2 + 2F(e_{yy} + e_{xx})e_{zz} + 2(A - 2N)e_{xx}e_{yy} + L(e_{yz}^2 + e_{zx}^2) + Ne_{xy}^2. \tag{16}$$

Körper, die diese Art von Symmetrie zeigen, kann man als „quer-isotrop" bezeichnen. Zu bemerken ist, daß kubische Kristalle nicht quer-isotrop sind. Für einen kubischen Kristall ist $A = B = C$, $F = G = H$, $L = M = N$, aber die Relation $H = A - 2N$ besteht nicht.

3) Das Material kann eine der eben erörteten Symmetriearten oder noch andere Symmetrie besitzen, so jedoch, daß die Symmetrieachsen in verschiedenen Punkten verschieden gerichtet sind.[1]) In solchen Fällen werden wir ein System rechtwinkliger krummliniger Koordinaten so wählen können, daß die Verzerrungsenergie-Funktion in einem Punkt, bezogen auf die Normalen der orthogonalen Flächen in diesem Punkt, eine einfachere Form annimmt. So wäre es möglich, daß Formel (16) für $(x,y,z)$-Achsen gälte, die in die Richtung der Normalen der Koordinatenflächen fallen; dann wäre das Material mit Bezug auf die Normalen und Tangentialebenen einer Flächenschar quer-isotrop. Diese Art von Symmetrie dürften krumme Metallplatten besitzen. Wenn der Körper derartige Symmetrie zeigt, so sagt man, er besitzt „krummlinige Äolotropie".

## § 111. Material mit drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen. Moduln.

In den Fällen, wo Formel (15) gilt, ist der Youngsche Modul für irgend eine Richtung $(l_1, m_1, n_1)$ gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{E} = \frac{l_1^4}{E_1} + \frac{m_1^4}{E_2} + \frac{n_1^4}{E_3} + \frac{2m_1^2n_1^2}{F_1} + \frac{2n_1^2l_1^2}{F_2} + \frac{2l_1^2m_1^2}{F_3} \tag{17}$$

wo $E_1$, $E_2$, $E_3$ die Youngschen Moduln für die drei Hauptrichtungen und die $E$ und $F$ bestimmt sind durch die Gleichungen vom Typus

1) Auf diese Art von Äolotropie wies Saint-Venant, *J. de Math.* (*Liouville*), (Sér. 2), t. 10 (1865) hin, erledigte auch einige Beispiele für die Anwendung derselben. Der Fall der zylindrischen Verteilung wurde von Voigt, *Göttinger Nachrichten*, 1886, diskutiert.

$$\frac{1}{E_1} = \frac{BC - F^2}{\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}}, \quad \frac{2}{F_1} = \frac{2(GH - AF)}{\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}} + \frac{1}{L}. \tag{18}$$

Dieser Fall ist von Saint-Venant[1]) untersucht worden. Er zeigt, daß es im allgemeinen 13 Richtungen gibt, für die $E$ ein Maximum oder Minimum wird. Von diesen fallen 3 mit den $(x, y, z)$-Achsen zusammen, je zwei andere liegen in jeder der Koordinatenebenen zwischen den Achsen, und die übrigen 4 zeigen je in einen der Winkelräume der von den Koordinatenebenen gebildeten dreiseitigen Ecken. Er fand auch, daß diese sämtlichen Richtungen außer den drei ersten imaginär ausfallen, wenn $F_1$ zwischen $E_2$ und $E_3$, $F_2$ zwischen $E_3$ und $E_1$ und $F_3$ zwischen $E_1$ und $E_2$ und wenn die drei Größen von der Form $\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{F_3}\right)\left(\frac{1}{E_3} - \frac{1}{F_2}\right) + \left(\frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1}\right)\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}\right)$ nicht sämtlich das gleiche Vorzeichen haben.

In den Bezeichnungen dieses Paragraphen ist die Steifigkeit für die Richtungen $(l_2, m_2, n_2)$ und $(l_3, m_3, n_3)$ der reziproke Wert des Ausdrucks

$$\begin{aligned} 4\Big[\frac{l_2^2 l_3^2}{E_1} + \frac{m_2^2 m_3^2}{E_2} + \frac{n_2^2 n_3^2}{E_3} + \left(\frac{2}{F_1} - \frac{1}{L}\right) m_2 m_3 n_2 n_3 + \left(\frac{2}{F_2} - \frac{1}{M}\right) n_2 n_3 l_2 l_3 \\ + \left(\frac{2}{F_3} - \frac{1}{N}\right) l_2 l_3 m_2 m_3\Big] + \frac{(m_2 n_3 + m_3 n_2)^2}{L} + \frac{(n_2 l_3 + n_3 l_2)^2}{M} + \frac{(l_2 m_3 + l_3 m_2)^2}{N}. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Steifigkeiten für die zu den Symmetrieebenen senkrechten Achsenpaare sind $L$, $M$, $N$.

In derselben Bezeichnung sind, wie sich zeigen läßt, die Poissonschen Konstanten für die Verkürzung in der $y$- und $z$-Richtung bei Zug in der $x$-Richtung gegeben durch

$$E_1(1/2N - 1/F_3) \quad \text{bezw.} \quad E_1(1/2M - 1/F_2). \tag{20}$$

Die Werte für andere Richtungspaare lassen sich ohne Schwierigkeit hinschreiben (§ 73).

In derselben Bezeichnungsweise ist, wie sich zeigen läßt, der Kompressionsmodul gleich dem reziproken Wert von

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} + \frac{2}{F_1} + \frac{2}{F_2} + \frac{2}{F_3} - \frac{1}{L} - \frac{1}{M} - \frac{1}{N}. \tag{21}$$

Im Falle kubischer Kristalle ist, wie wir zeigen können, der Wert des Youngschen Moduls $E$ für Zug in der Richtung $(l, m, n)$ gegeben durch die Gleichung[2])

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \left\{\frac{1}{N} - \frac{2(1+\sigma)}{E_1}\right\}(m^2 n^2 + n^2 l^2 + l^2 m^2). \tag{22}$$

Vorausgesetzt daß der Koeffizient des zweiten Gliedes positiv ist, hat $E$ ein Maximum in der Richtung der Hauptachsen und ein Minimum in

---

1) Siehe Clebsch-Ausgabe, p. 95 ff.

2) Eine Figur, die die Änderung von $1/E$ mit der Richtung zeigt, gibt Liebisch, *Physikalische Kristallographie* (Leipzig, 1891), p. 564.

den Richtungen der zu den drei Hauptachsen gleich geneigten Linien; ferner wird $E$ stationär, ohne ein Maximum oder Minimum zu haben, in den Richtungen der Winkelhalbierenden der von je zwei Hauptachsen eingeschlossenen Winkel und bleibt konstant für alle durch $l \pm m \pm n = 0$ gegebenen Geraden.

## § 112. Dehnung und Biegung eines Stabes.

Als Beispiele für Spannungsverteilungen in einem äolotropen festen Körper können wir die Probleme der Dehnung eines Stabes und der Biegung eines Stabes durch an den Enden angreifende Kräftepaare wählen. Wir nehmen an, das Material habe in jedem Punkte drei Struktursymmetrieebenen, so daß die Verzerrungsenergie-Funktion durch die Formel (15) gegeben ist; ferner setzen wir voraus, daß der Querschnitt des Stabes konstant ist, daß die $z$-Achse in die Linie der Schwerpunkte der Normalschnitte fällt und daß die $x$-Achse und die $y$-Achse den Hauptträgheitsachsen der Normalschnitte parallel sind, so daß die Schwerpunktslinie und besagte Hauptachsen senkrecht zu den Symmetrieebenen liegen.

a) *Dehnung.*

Wir nehmen an, alle Spannungskomponenten außer $Z_z$ verschwinden und setzen $Z_z = E\varepsilon$, wo $\varepsilon$ konstant und $E$ der einem Zug $Z_z$ entsprechende Youngsche Modul des Materials.

Für die Verschiebung ergibt sich

$$u = -\sigma_1 \varepsilon x, \quad v = -\sigma_2 \varepsilon y, \quad w = \varepsilon z, \tag{23}$$

wo $\sigma_1$ die Poissonsche Konstante für Verkürzung in der $x$-Richtung bei Zug in der $z$-Richtung und $\sigma_2$ die entsprechende Konstante für Verkürzung in der $y$-Richtung.

b) *Biegung durch Kräftepaare.*

Wir nehmen an, alle Spannungskomponenten außer $Z_z$ verschwinden, und setzen $Z_z = -ER^{-1}x$, wo $R$ konstant.

Wir finden, daß die Verschiebung durch die Gleichungen gegeben ist

$$u = \tfrac{1}{2} R^{-1}(z^2 + \sigma_1 x^2 - \sigma_2 y^2), \quad v = \sigma_2 R^{-1} xy, \quad w = -R^{-1} xz \tag{24}$$

und daß die Spannung über einen Normalschnitt statisch äquivalent ist mit einem Kräftepaar um eine zur $y$-Achse parallele Achse vom Moment $EI/R$, wo $I = \iint x^2 dx dy$ (die Integration über den Querschnitt erstreckt).

Die Deutung des Ergebnisses ist ähnlich der in § 88.

## § 113. Elastische Konstanten der Kristalle. Experimentelle Resultate.

Die elastischen Konstanten einer Anzahl von Mineralien sind von W. Voigt[1]) durch Drillungs- und Biegungsversuche mit Stäbchen bestimmt worden. Einige seiner Hauptresultate sollen hier mitgeteilt werden. Die Konstanten sind ausgedrückt in einer Spannungseinheit von $10^6$ Grammgewichten pro Quadratzentimeter.

---

1) Bezüglich der Belege siehe *Einleitung*, Fußnote 55.

Für Pyrit (kubisch) sind die Konstanten

$$c_{11} = 3680\,,\quad c_{44} = 1075\,,\quad c_{12} = -483\,,$$

und wir haben in bezug auf eine Hauptachsenrichtung:

$$\text{Youngscher Modul } E = 3530\,,$$

$$\text{Steifigkeit } c_{44} = \mu = 1075\,;$$

daraus berechnet: Poissonsche Konstante $\sigma = -\frac{1}{7}$ nahezu.

Diese Ergebnisse sind sehr bemerkenswert, da sie zeigen, daß die Moduln des Pyrit viel größer sind als die des Stahls[1]), ferner, daß ein Stab, der aus jenem Material in Richtung einer Hauptachse geschnitten ist und gedehnt wird, sich auch seitlich etwas *ausdehnt*.[2]) Der Kompressionsmodul ist etwa gleich $1070 \times 10^6$ Grammgewichten pro Quadratzentimeter, also erheblich kleiner als der des Stahls.

Die nachstehende Tabelle enthält die Werte der Konstanten für drei andere Mineralien, für die die Verzerrungsenergie-Funktion dieselbe Form hat wie für Pyrit. In dieser Tabelle bedeutet $c_{44}$ die Steifigkeit und $E$ den Youngschen Modul für eine Hauptachsenrichtung.

| Material | $E$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{44}$ |
|---|---|---|---|---|
| Flußspat | 1470 | 1670 | 457 | 345 |
| Steinsalz | 418 | 477 | 132 | 129 |
| Sylvin | 372 | 375 | 198 | 65.5 |

Außer im Falle des Steinsalzes findet sich die Cauchysche Bedingung ($c_{12} = c_{44}$) auch nicht annähernd bestätigt, und die Abweichungen sind weit größer als daß man sie auf Rechnung von Beobachtungsfehlern setzen könnte.

Beryll ist ein hexagonaler Kristall aus der durch die Gruppe $D_6{}^h$ gekennzeichneten Klasse; die Konstanten sind bei ihm

$$c_{11} = 2746\,,\quad c_{33} = 2409\,,\quad c_{12} = 980\,,\quad c_{13} = 674\,,\quad c_{44} = 666\,.$$

Für einen Stab, dessen Achse in die Richtung der Hauptsymmetrieachse fällt, ist $E = 2100$. Für einen Stab, dessen Achse in die Richtung einer sekundären Symmetrieachse fällt, ist $E = 2300$. Der erste dieser Werte stimmt ungefähr mit dem für Stahl überein, und der zweite ist erheblich größer. Die Hauptsteifigkeiten sind 666 und 980; der erste Wert ist kleiner, der zweite beträchtlich größer als die Steifigkeit des Stahls. Die Cauchyschen Bedingungen sind annähernd erfüllt.

Quarz ist ein rhomboedrischer Kristall aus der Klasse, die durch die Gruppe $D_3$ gekennzeichnet ist. Die Konstanten sind

$$c_{11} = 868\,,\quad c_{33} = 1074\,,\quad c_{13} = 143\,,\quad c_{12} = 70\,,\quad c_{44} = 582\,,\quad c_{15} = -171\,,$$

und $E$ in der Richtung der Hauptachse hat den Wert 1030.

1) Siehe Tabelle, § 71.

2) Man hat vermutet, daß diese etwas paradoxen Resultate von den „Zwillingsbildungen" der Kristalle herrühren.

Topas ist ein rhombischer Kristall (aus der durch die Gruppe $V^h$ gekennzeichneten Klasse), dessen Youngsche Moduln und Steifigkeiten in den Hauptrichtungen größer sind als die des gewöhnlichen Stahls. Die Konstanten der Formel (15) haben für dies Mineral die Werte

$$A = 2870, \quad B = 3560, \quad C = 3000, \quad F = 900, \quad G = 860, \quad H = 1280,$$
$$L = 1100, \quad M = 1350, \quad N = 1330.$$

Die Youngschen Moduln in den Hauptrichtungen sind 2300, 2890, 2650.

Baryt ist ein Kristall derselben Klasse, und seine Konstanten sind

$$A = 907, \quad B = 800, \quad C = 1074, \quad F = 273, \quad G = 275, \quad H = 468,$$
$$L = 122, \quad M = 293, \quad N = 283.$$

Diese Resultate zeigen, daß für diese Stoffe die Cauchysche Reduktion nicht zutrifft.

## § 114. Krummlinige Äolotropie.

Als Beispiele für krummlinige Äolotropie (§ 110) nehmen wir die Probleme des Rohrs (§ 100) und der Kugelschale (§ 98) unter Druck, wenn Quer-Isotropie um den Radiusvektor herrscht.[1]

a) Im Falle des *Rohrs* ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \widehat{rr} &= C\frac{\partial U}{\partial r} + F\left(\frac{U}{r} + e\right), \\ \widehat{\theta\theta} &= A\frac{U}{r} + F\frac{\partial U}{\partial r} + He, \\ \widehat{zz} &= Ae + F\frac{\partial U}{\partial r} + H\frac{U}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wo $H$ für $A - 2N$ geschrieben ist. Die Verschiebung $U$ ist gegeben durch die Gleichung

$$C\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{C}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{AU}{r^2} + \frac{(F-H)e}{r} = 0, \tag{26}$$

deren vollständiges Integral ist

$$U = \alpha r^n + \beta r^{-n} + \frac{F-H}{A-C}er, \tag{27}$$

wo $n$ für $\sqrt{(A/C)}$ geschrieben und $\alpha$ und $\beta$ willkürliche Konstanten. Die Konstanten können so gewählt werden, daß $\widehat{rr}$ an der äußeren Oberfläche $r = r_0$ den Wert $-p_0$ und an der inneren Oberfläche $r = r_1$ den Wert $-p_1$ hat. Die Konstante $e$ läßt sich so bestimmen, daß die Resultante des Longitudinalzugs $\widehat{zz}$ über den Ring $r_0 > r > r_1$ dem Druck $\pi(p_1 r_1^2 - p_0 r_0^2)$ auf das Zylinderende das Gleichgewicht hält.

b) Im Falle der *Kugel* würden wir in derselben Weise finden, daß die radiale Verschiebung $U$ die Gleichung befriedigt

1) Saint-Venant, *J. de Math. (Liouville)*, (Sér. 2), t. 10 (1865).

$$C\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2C}{r}\frac{dU}{dr}-2(A+H-F)\frac{U}{r^2}=0, \tag{28}$$

sodaß

$$U=\alpha r^{n-\frac{1}{2}}+\beta r^{-n-\frac{1}{2}},$$

wo

$$n^2=\frac{1}{4}\left\{1+8\frac{A+H-F}{C}\right\},$$

und wir können zu der Formel gelangen

$$U=\frac{1}{r_0^{2n}-r_1^{2n}}\left\{\frac{p_1r_1^{n+\frac{3}{2}}-p_0r_0^{n+\frac{3}{2}}}{(n-\frac{1}{2})C+2F}r^{n-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+(r_0r_1)^{2n}\frac{p_1r_1^{\frac{3}{2}-n}-p_0r_0^{\frac{3}{2}-n}}{(n+\frac{1}{2})C-2F}r^{-n-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{29}$$

die mit dem in § 99, 6) im Falle der Isotropie erhaltenen Resultat im Einklang steht.

Die kubische Dilatation des kugelförmigen Hohlraumes ist durch den Wert von $3\,U/r$ für $r=r_1$ gegeben, und der ist

$$\frac{3r_1^{n-\frac{3}{2}}}{r_0^{2n}-r_1^{2n}}\left\{\frac{p_1r_1^{n+\frac{3}{2}}-p_0r_0^{n+\frac{3}{2}}}{(n-\frac{1}{2})C+2F}+r_0^{2n}\frac{p_1r_1^{\frac{3}{2}-n}-p_0r_0^{\frac{3}{2}-n}}{(n+\frac{1}{2})C-2F}\right\}. \tag{30}$$

Dies Ergebnis wurde von Saint-Venant auf die Theorie der Piëzometerexperimente angewendet, bei denen eine Unstimmigkeit zwischen den tatsächlich erhaltenen Resultaten und der unter Voraussetzung der Isotropie des Materials theoretisch gefundenen Dilatation beobachtet zu sein scheint. Die in (30) gegebene Lösung enthält 3 unabhängige Konstante, und Saint-Venant hielt dafür, daß diese in einer für die Erklärung der betreffenden Experimente geeigneten Weise sich würden wählen lassen.

# Kapitel VII.

## Allgemeine Theoreme.

### § 115. Die Variationsgleichung der Bewegung.[1])

Immer, wenn eine Verzerrungsenergie-Funktion $W$ existiert, können wir die Gleichungen der Bewegung aus dem Hamiltonschen Prinzip ableiten. Um dies Prinzip auszudrücken, bezeichnen wir mit $T$ die gesamte kinetische Energie des Körpers und mit $V$ die potentielle Energie der Deformation, sodaß $V$ gleich dem Volumintegral von $W$. Wir bilden nach den Regeln der Variationsrechnung die Variation des Integrals $\int(T-V)dt$, das genommen ist zwischen festen Anfangs- und Endwerten ($t_0$ und $t_1$) von $t$. Beim Variieren des Integrals nehmen wir an, daß die Verschiebung allein der Variation unterworfen ist und daß ihre Werte im Anfangs- und Endzustand gegeben sind. Die so gebildete Variation bezeichnen wir mit

$$\delta\int(T-V)dt.$$

Wir bezeichnen mit $\delta W_1$ die Arbeit, die von den äußeren Kräften geleistet wird, wenn die Verschiebung variiert wird. Dann drückt sich das Prinzip aus durch die Gleichung

$$\delta\int(T-V)dt+\int\delta W_1 dt=0. \tag{1}$$

Die Variation von $\int T dt$ können wir ausführen. Wir haben

$$T=\iiint\tfrac{1}{2}\varrho\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz;$$

mithin

$$\begin{aligned}\delta\int T dt&=\int dt\iiint\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\,\delta u}{\partial t}+\cdots+\cdots\right)dx\,dy\,dz\\ &=\Big|_{t_0}^{t_1}\iiint\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\delta u+\frac{\partial v}{\partial t}\,\delta v+\frac{\partial w}{\partial t}\,\delta w\right)dx\,dy\,dz\\ &\quad-\int dt\iiint\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w\right)dx\,dy\,dz. \end{aligned}\tag{2}$$

---

1) Vgl. Kirchhoff, *Vorlesungen über . . . Mechanik*, Vorlesung 11.

Hierin sind $t_0$ und $t_1$ der Anfangs- und Endwert von $t$, und $\delta u, \ldots$ verschwinden für diese beiden Werte. Das erste Glied fällt daher weg, und die Gleichung (1) transformiert sich in eine *Variationsgleichung der Bewegung*. Ferner ist $\delta V = \iiint \delta W dx dy dz$, und $\delta W_1$ ist gegeben durch die Gleichung

$$\delta W_1 = \iiint \varrho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz$$
$$+ \iint (X_\nu \delta u + Y_\nu \delta v + Z_\nu \delta w) dS.$$

Mithin hat die Variationsgleichung der Bewegung die Form

$$\iiint \left\{ \varrho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) + \delta W \right\} dx dy dz$$
$$- \iiint \varrho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz$$
$$- \iint (X_\nu \delta u + Y_\nu \delta v + Z_\nu \delta w) dS = 0. \quad (3)$$

Andererseits ist

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy},$$

wo z. B. $\delta e_{xx} = \partial \delta u / \partial x$. Daher läßt sich $\iiint \delta W dx dy dz$ durch Integration per partes umformen in die Summe eines Oberflächenintegrals und eines Raumintegrals. Wir finden

$$\iiint \delta W dx dy dz = \iint \left[ \left\{ \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \cos(z, \nu) \right\} \delta u + \cdots + \cdots \right] dS$$
$$- \iiint \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \right) \delta u + \cdots + \cdots \right] dx dy dz. \quad (4)$$

Die Koeffizienten der Variationen $\delta u, \ldots$ unter den Volum- und Oberflächenintegralzeichen in der durch (4) umgeformten Gleichung (3) müssen für sich verschwinden, und wir erhalten so drei Differentialgleichungen der Bewegung, die in allen Punkten des Körpers gelten, und drei Bedingungen, die an der Oberfläche gelten. Die Bewegungsgleichungen sind vom Typus

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varrho X + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, \quad (5)$$

und die Oberflächenbedingungen sind vom Typus

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \cos(z, \nu) = X_\nu. \quad (6)$$

## § 116. Anwendungen der Variationsgleichung.

1) Ein Beispiel[1]) für die Anwendung dieser Methode bietet folgende Ableitung der Gleichungen (19) von § 58. Wir haben

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}} \delta e_{\alpha\alpha} + \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}} \delta e_{\beta\beta} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}} \delta e_{\alpha\beta};$$

ferner haben wir nach § 20, (36),

$$\delta e_{\alpha\alpha} = h_1 \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) \delta u_\beta + h_1 h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right) \delta u_\gamma,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\delta e_{\beta\gamma} = \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \beta}(h_3 \delta u_\gamma) + \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma}(h_2 \delta u_\beta).$$

. . . . . . . . . . . . . .

Jeder Term von

$$\iiint \delta W \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{h_1 h_2 h_3}$$

ist nun zu transformieren mittels der Formeln vom Typus

$$\iiint \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \iint h_2 h_3 \xi \cos(\alpha, \nu) dS,$$

das Integral formt sich dann um in die Summe eines Oberflächenintegrals und eines Raumintegrals derart, daß keine Differentialquotienten von $\delta u_\alpha$, $\delta u_\beta$, $\delta u_\gamma$ auftreten. Wir können z. B. die Glieder im Raumintegral, die $\delta u_\alpha$ enthalten, zusammenziehen. Also

$$-\iiint \Big[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}}\right) - \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right) \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right) \frac{\partial W}{\partial e_{\gamma\gamma}}$$
$$+ h_1 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial W}{\partial e_{\gamma\alpha}}\right) + h_1 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1^2 h_3} \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}}\right)\Big] \delta u_\alpha\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die in Rede stehenden Gleichungen lassen sich dann ohne Schwierigkeit ableiten.

2) Ein anderes Beispiel gibt folgende Ableitung der Gleichungen (21) von § 91 und der zweiten Form der Gleichungen (22) desselben Paragraphen. Wir bemerken, daß

$$e_{yz}^2 - 4 e_{yy} e_{zz} = 4 \varpi_x^2 + 4\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Die Verzerrungsenergie-Funktion in einem isotropen Körper läßt sich daher in der Form ausdrücken

$$W = \tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\Delta^2 + 2\mu(\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2) + 2\mu\Big[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+ \text{zwei ähnliche Ausdrücke}\Big].$$

1) Vgl. J. Larmor, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 14 (1885).

Nun ist

$$\iiint \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \delta v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right)\right] dx\,dy\,dz$$

$$= \iint \left[\left\{\cos(z, \nu)\frac{\partial w}{\partial y} - \cos(y, \nu)\frac{\partial w}{\partial z}\right\}\delta v + \left\{\cos(y, \nu)\frac{\partial v}{\partial z} - \cos(z, \nu)\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\delta w\right] dS;$$

die Glieder vom Typus $2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ in $W$ tragen daher nichts zu dem Raumintegral in dem umgeformten Ausdruck für $\iiint \delta W dx\,dy\,dz$ bei. Mithin können wir die Gleichungen der Bewegung oder des Gleichgewichts erhalten, indem wir die Variation von

$$\iiint \left[\tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\Delta^2 + 2\mu(\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)\right] dx\,dy\,dz$$

statt von $\iiint W dx\,dy\,dz$ bilden. Die Gleichungen (21) und die zweite Form der Gleichungen (22) von § 91 sind jene Gleichungen, zu denen dies Verfahren führen würde.

Wir sind damit zu dem Ergebnis gelangt, daß die Differentialgleichungen der Schwingung oder des Gleichgewichts eines isotropen festen Körpers übereinstimmen mit denjenigen eines Körpers, der die durch die Formel

$$\tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\Delta^2 + 2\mu(\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)$$

ausgedrückte potentielle Energie der Deformation pro Volumeinheit besitzt. Die Oberflächenbedingungen sind in den beiden Fällen verschieden. In Mac Cullaghs Theorie des Lichts[1]) wird gezeigt, daß, wenn der Lichtäther inkompressibel ist und potentielle Energie gemäß der Formel

$$2\mu(\varpi_x^2 + \varpi_y^2 + \varpi_z^2)$$

besitzt, den beobachteten Tatsachen hinsichtlich der Reflexion und Brechung des Lichts Rechnung getragen wird; die Oberflächenbedingungen, die von der optischen Theorie für ihre Zwecke gefordert werden, sind genau diejenigen, die aus der Variation des Volumintegrals dieses Ausdrucks entspringen. Larmor[2]) bezeichnet ein Medium, das potentielle Energie in der verlangten Weise besitzt, als „rotationselastisch“ (engl. „rotationally elastic“). Die Bewegungsgleichungen eines rotationselastischen Mediums stimmen der Form nach überein mit denjenigen, die die Fortpflanzung elektrischer Wellen im freien Äther beherrschen.

1) *Dublin, Trans. R. Irish Acad.* vol. 21 (1839) = *Collected Works of James Mac Cullagh,* Dublin 1880, p. 145

2) *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 185 (1894).

## § 117. Das allgemeine Problem des Gleichgewichts.

Wir suchen den Spannungs- und Verzerrungszustand in einem Körper von gegebener Gestalt zu bestimmen, der durch Massenkräfte und Oberflächenspannungen verzerrt gehalten wird. Zu diesem Zweck haben wir die Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)+\varrho X=0 \qquad (7)$$

als ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungskomponenten $u$, $v$, $w$ auszudrücken; die Lösungen desselben müssen so ermittelt werden, daß sie gewisse Bedingungen an der Oberfläche $S$ des Körpers befriedigen. Im allgemeinen werden diese Bedingungen, wie wir annehmen, dahin gehen, daß entweder ($a$) die Verschiebung in allen Punkten von $S$ vorgegeben ist oder ($b$) die Oberflächenspannungen in allen Punkten von $S$ gegeben sind. Im Falle ($a$) haben die Größen $u$, $v$, $w$ auf $S$ gegebene Werte, im Falle ($b$) haben die Größen vom Typus

$$X_\nu=\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\cos(x,\nu)+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\cos(y,\nu)+\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\cos(z,\nu)$$

auf $S$ gegebene Werte. Wie nun ohne weiteres klar ist, wird, wenn irgend eine Verschiebung gefunden ist, die die Gleichungen vom Typus (7) befriedigt und die vorgeschriebenen Werte für die Oberflächenspannungen zuläßt, noch eine kleine Verschiebung sich überlagern lassen, die in einem starren Körper möglich wäre: die Gleichungen werden dann immer noch befriedigt sein; die Verzerrung und die Spannung werden durch Überlagerung dieser Verschiebung nicht geändert. Daraus folgt, daß im Falle ($b$) die Lösung der Gleichungen nicht bestimmt ist, insofern nämlich über irgend eine den Gleichungen genügende Verschiebung noch eine kleine Verschiebung sich überlagern läßt, wie sie in einem starren Körper möglich wäre.

Die Frage nach der Existenz der Lösung der Gleichungen vom Typus (7), die auch die gegebenen Randbedingungen erfüllt, soll hier nicht erörtert werden. Wichtiger ist die Bemerkung, daß bei gegebenen Oberflächenspannungen die Gleichungen und Randbedingungen nur dann miteinander verträglich sind, wenn diese Spannungen mit den Massenkräften ein Kräftesystem bilden, das einen starren Körper im Gleichgewicht halten würde. In der Tat, nehmen wir an, $u$, $v$, $w$ seien ein System von Funktionen, die die Gleichungen vom Typus (7) befriedigen. Integrieren wir die linke Seite von (7) über das Volumen des Körpers und formen die die Terme $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)$ usw. enthaltenden Raumintegrale mittels der Greenschen Transformation um, so erhalten wir die Gleichung

$$\iint X_\nu\, dS+\iiint \varrho X\,dx\,dy\,dz=0. \qquad (8)$$

Multiplizieren wir die Gleichung vom Typus (7), die $Z$ enthält, mit $y$ und diejenige, die $Y$ enthält, mit $z$ und subtrahieren, so erhalten wir die Gleichung

$$\iiint\left[y\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\right)\right\}\right.$$

$$\left.-z\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)\right\}+\varrho(yZ-zY)\right]dx\,dy\,dz=0;$$

formen wir dieselbe mittels der Greenschen Transformation um, so ergibt sich

$$\iint(yZ_\nu - zY_\nu)dS + \iiint\varrho(yZ - zY)dx\,dy\,dz = 0. \tag{9}$$

Auf diese Weise läßt sich von allen Bedingungen des statischen Gleichgewichts nachweisen, daß sie erfüllt sein müssen.

## § 118. Eindeutigkeit der Lösung.[1])

Wir werden folgendes Theorem beweisen: Sind entweder die Oberflächenverschiebungen oder die Oberflächenspannungen gegeben, so ist die Lösung des Gleichgewichtsproblems eindeutig bestimmt in dem Sinne, daß der Spannungs- (bezw. Verzerrungs-)Zustand eindeutig festgelegt ist.

Wir bemerken zunächst, daß die Funktion $W$ als homogene, für reelle Werte ihrer Argumente stets positive quadratische Funktion nur verschwinden kann, wenn ihre sämtlichen Argumente verschwinden. Es sind dies die sechs Verzerrungskomponenten; und wenn diese verschwinden, haben wir eine Verschiebung, wie sie in einem starren Körper möglich wäre. Wenn also $W$ verschwindet, bewegt sich der Körper bloß als Ganzes.

Angenommen nun, $u', v', w'$ und $u'', v'', w''$ seien zwei Verschiebungssysteme, die den Gleichungen vom Typus (7) genügen und auch die gegebenen Bedingungen an der Oberfläche $S$ des Körpers befriedigen. Dann stellt $u'-u''$, $v'-v''$, $w'-w''$ ein System von Verschiebungen dar, das den Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)=0 \tag{10}$$

im ganzen Körper genügt und außerdem gewisse Oberflächenbedingungen befriedigt. Wir bezeichnen dies System mit $(u, v, w)$. Wir können dann die Gleichung hinschreiben

1) Vgl. Kirchhoff, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 56 (1859).

$$\iiint\Big[u\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)\right\}$$

$$+v\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)\right\}$$

$$+w\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\right)\right\}\Big]dx\,dy\,dz=0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\iint\Big[u\left\{\cos(x,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}+\cos(y,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}+\cos(z,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right\}$$

$$+\text{ zwei ähnliche Ausdrücke}\Big]dS$$

$$-\iiint\Big[\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}e_{xx}+\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}e_{yy}+\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}e_{zz}+\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}e_{yz}$$

$$+\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}e_{zx}+\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}e_{xy}\Big]dx\,dy\,dz=0.$$

Beziehen sich die Oberflächenbedingungen auf die Verschiebung, so verschwinden $u, v, w$ in allen Punkten von $S$; beziehen sie sich auf die Spannung, so verschwinden die aus $u, v, w$ berechneten Oberflächenspannungen in allen Punkten von $S$. In jedem Fall vorschwindet das Oberflächenintegral in obiger Gleichung. Das Raumintegral ist gleich $\iiint 2W\,dx\,dy\,dz$, kann also, da $W$ notwendig positiv ist, nur verschwinden, wenn $W$ verschwindet. Somit ist $(u, v, w)$ eine Verschiebung, wie sie in einem starren Körper möglich ist. Beziehen sich die Oberflächenbedingungen auf die Verschiebungen, so müssen $u, v, w$ verschwinden, da sie in allen Punkten von $S$ verschwinden.

## § 119. Theorem vom Minimum der Energie.

Dem Theorem von der Eindeutigkeit der Lösung stellt sich das Theorem vom Minimum der potentiellen Energie an die Seite. Wir betrachten den Fall, wo keine Massenkräfte wirken und die Oberflächenverschiebungen gegeben sind. Die potentielle Energie der Deformation des Körpers ist gleich dem Raumintegral über die Verzerrungsenergie-Funktion, das erstreckt ist über den vom Körper erfüllten Raum. Wir können das Theorem in folgender Form aussprechen:

Diejenige Verschiebung, die die Differentialgleichungen des Gleichgewichts sowohl wie die Bedingungen an der Oberfläche befriedigt, läßt für die potentielle Energie der Deformation einen kleineren Wert zu als irgend eine andere Verschiebung, die dieselben Oberflächenbedingungen befriedigt.

Es sei $(u, v, w)$ die Verschiebung, die die Gleichungen des Gleichgewichts im ganzen Körper und die Bedingungen an der Oberfläche

befriedigt; irgend eine andere Verschiebung, die die Oberflächenbedingungen befriedigt, werde mit $(u + u', v + v', w + w')$ bezeichnet. Die Größen $u', v', w'$ verschwinden an der Oberfläche. Wir bezeichnen die aus $u, v, w$ berechneten Verzerrungskomponenten insgesamt mit $e$ und die aus $u', v' w'$ berechneten Verzerrungskomponenten insgesamt mit $e'$; ferner sei $f(e)$ die aus den Verschiebungen $u, v, w$ berechnete Verzerrungsenergie-Funktion, und entsprechend werde die aus den andern Verschiebungen berechnete Verzerrungsenergie-Funktion bezeichnet. Wir schreiben $V$ für die potentielle Energie der Deformation, die der Verschiebung $(u, v, w)$ entspricht, und $V_1$ für die potentielle Energie der Deformation, die der Verschiebung $(u + u', v + v', w + w')$ entspricht. Dann können wir zeigen, daß $V_1 - V$ positiv sein muß.

Wir haben

$$V_1 - V = \iiint \{f(e + e') - f(e)\}\, dx\, dy\, dz,$$

oder

$$V_1 - V = \iiint \left[\Sigma e' \frac{\partial f(e)}{\partial e} + f(e')\right] dx\, dy\, dz,$$

weil $f(e)$ eine homogene quadratische Funktion der insgesamt mit $e$ bezeichneten Argumente ist. Hierin ist $f(e')$ notwendig positiv, denn $f(e')$ ist die aus der Verschiebung $(u', v', w')$ berechnete Verzerrungsenergie-Funktion. Ferner haben wir in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise

$$\Sigma e' \frac{\partial f(e)}{\partial e} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}$$
$$+ \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right) \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right) \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right) \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}.$$

Das Raumintegral über diesen Ausdruck formen wir in ein Oberflächenintegral und ein Raumintegral um derart, daß in keinem der letzteren Differentialquotienten von $u', v', w'$ auftreten. Das Oberflächenintegral verschwindet, weil $u', v', w'$ an der Oberfläche verschwinden. Der Koeffizient von $u'$ im Raumintegral ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right),$$

verschwindet also vermöge der Gleichungen des Gleichgewichts. In gleicher Weise verschwinden die Koeffizienten von $v'$ und $w'$. Es folgt daraus, daß

$$V_1 - V = \iiint f(e')\, dx\, dy\, dz;$$

dies ist notwendig positiv, und daher $V < V_1$.

Die Umkehrung des Theorems hat man benutzt, um die Existenz der Lösung der Gleichungen des Gleichgewichts, welche für die Verschiebungen an der Oberfläche gegebene Werte liefert, zu beweisen.[1]) Den Beweis für die Richtigkeit jener Umkehrung würden wir erbringen können, wenn wir von anderer Seite her wüßten, daß unter allen Funktionstripeln $u$, $v$, $w$, die an der Oberfläche die gegebenen Werte annehmen, eines sein muß, das für $\iiint W dx dy dz$ einen kleineren Wert liefert als irgend ein anderes Tripel. Dieselbe Schwierigkeit tritt auf in dem Beweis für das Existenztheorem in der Potentialtheorie.[2]) Dort hat man übrigens der Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen gesucht, indem man ein Verfahren ersann, um die verlangte Funktion tatsächlich zu konstruieren.[3]) Im Falle zweidimensionaler Potentialfunktionen ist die Existenz des Minimums für das betreffende Integral von Hilbert[4]) bewiesen worden.

## § 120. Theorem über die potentielle Energie der Deformation.[5])

Die potentielle Energie der Deformation eines Körpers, der sich unter einer gegebenen Belastung im Gleichgewicht befindet, ist gleich der halben, von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit, wenn diese längs der Verschiebungen aus dem spannungslosen Zustand in den Gleichgewichtszustand wirken.

Die in Rede stehende Arbeit ist gleich

$$\iiint \varrho(uX + vY + wZ)dxdydz + \iint (uX_\nu + vY_\nu + wZ_\nu)dS.$$

Das Oberflächenintegral ist die Summe dreier Glieder von der Form

$$\iint u\left\{\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\cos(x,\nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\cos(y,\nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\cos(z,\nu)\right\}dS,$$

und die Arbeit ist daher gleich

$$\iiint\left\{u\left(\varrho X + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right) + \cdots + \cdots\right\}dxdydz$$

$$+\iiint\left(e_{xx}\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + e_{yy}\frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + e_{zz}\frac{\partial W}{\partial e_{zz}} + e_{yz}\frac{\partial W}{\partial e_{yz}} + e_{zx}\frac{\partial W}{\partial e_{zx}} + e_{xy}\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)dxdydz.$$

Die erste Reihe dieses Ausdrucks verschwindet vermöge der Gleichungen des Gleichgewichts, und die zweite Reihe ist gleich $2\iiint W dx dy dz$. Daraus folgt ohne weiteres das Theorem.

1) Lord Kelvin (Sir W. Thomson), *Phil. Trans. Roy. Soc.* vol. 153 (1863) = *Math. and Phys. Papers*, vol. 3, p. 351.

2) Die Schwierigkeit scheint zuerst von Weierstraß in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung dargelegt zu sein. Siehe den Artikel „Variation of an integral" in *Ency. Brit. Supplement* [*Ency. Brit.*, 10. Aufl., vol. 33 (1902)].

3) Siehe z. B. C. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential*, Leipzig 1877.

4) „Über das Dirichletsche Prinzip", *(Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen)*, Berlin 1901.

5) In einigen Büchern wird die potentielle Energie der Deformation die „Spannkraft" (engl. „resilience") des Körpers genannt.

## § 121. Das Reziprozitätstheorem.[1])

Es seien $u$, $v$, $w$ Funktionen von $x$, $y$, $z$, $t$, die in dem ganzen von einem Körper erfüllten Raum einwertig und frei von Unstetigkeiten sind; wir wollen annehmen, $u$, $v$, $w$ seien in allen Punkten klein genug, um als „kleine Verschiebungen" im Sinne der auf das Hookesche Gesetz gegründeten Elastizitätstheorie gelten zu können. Geeignete Kräfte würden dann den Körper in dem durch $u$, $v$, $w$ bestimmten Verschiebungszustand erhalten können. Die erforderlichen Massenkräfte und Oberflächenspannungen lassen sich bestimmen, indem man aus der Verschiebung $(u, v, w)$ die Verzerrungskomponenten und die Verzerrungsenergie-Funktion berechnet und in die Gleichungen von der Form

$$\varrho X + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right) = \varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$X_\nu = \cos(x, \nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) + \cos(y, \nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) + \cos(z, \nu)\,\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}$$

einsetzt. Durch diese Massenkräfte und Oberflächenspannungen würde die Verschiebung $u$, $v$, $w$ in der Tat hervorgerufen werden können.

Es seien nun $(u, v, w)$, $(u', v', w')$ zwei Verschiebungssysteme, $(X, Y, Z)$ und $(X', Y', Z')$ die entsprechenden Massenkräfte, $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ und $(X_\nu', Y_\nu', Z_\nu')$ die entsprechenden Oberflächenspannungen. Das Reziprozitätstheorem lautet dann:

*Die gesamte Arbeit, die von den Kräften des ersten Systems (einschließlich der kinetischen Reaktionen) geleistet wird, wenn sie längs der vom zweiten System hervorgebrachten Verschiebungen wirken, ist gleich der gesamten von den Kräften des zweiten Systems geleisteten Arbeit, wenn diese längs der vom ersten System hervorgebrachten Verschiebungen wirken.*

Der analytische Ausdruck des Theorems ist gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned}\iiint \varrho\left\{\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)u' + \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)v' + \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)w'\right\}dx\,dy\,dz \\ + \iint (X_\nu u' + Y_\nu v' + Z_\nu w')\,dS \\ = \iiint \varrho\left\{\left(X' - \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}\right)u + \left(Y' - \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2}\right)v + \left(Z' - \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}\right)w\right\}dx\,dy\,dz \\ + \iint (X_\nu' u + Y_\nu' v + Z_\nu' w)\,dS. \qquad (11)\end{aligned}$$

[1]) Das Theorem stammt von E. Betti, *Il nuovo Cimento* (Ser. 2), t. 7 und 8 (1872). Es ist ein spezieller Fall eines allgemeineren Theorems von Lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 4 (1873) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 179. Eine allgemeine Untersuchung über Reziprozitätssätze in der Dynamik findet man in einer Abhandlung von H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 19 (1889), p. 144.

Vermöge der Bewegungsgleichungen und der Gleichungen, die die Oberflächenspannungen mit den Komponenten des Spannungszustands verknüpfen, können wir die linke Seite von (11) in Spannungskomponenten ausdrücken und zwar in Form einer Summe von Gliedern, die explicite $u'$, $v'$, $w'$ enthalten. Die Glieder in $u'$ sind

$$-\iiint u'\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)\right\}dxdydz$$
$$+\iint u'\left\{\cos(x,\nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right)+\cos(y,\nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right)+\cos(z,\nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)\right\}dS.$$

Daraus folgt, daß die linke Seite von (11) sich als ein Raumintegral ausdrücken läßt; sie nimmt die Form an

$$\iiint\left[e'_{xx}\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}+e'_{yy}\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}+e'_{zz}\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}+e'_{yz}\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}+e'_{zx}\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right.$$
$$\left.+e'_{xy}\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right]dxdydz.$$

Einer allgemeinen Eigenschaft der quadratischen Funktionen entsprechend ist dieser Ausdruck symmetrisch in den Verzerrungskomponenten der beiden Systeme, $e_{xx}, \ldots$ und $e'_{xx}, \ldots$ Daher stimmt er überein mit dem Ausdruck, auf den die Transformation der rechten Seite von (11) führt.

## § 122. Bestimmung der durchschnittlichen Verzerrungen.[1])

Wir können das Reziprozitätstheorem benutzen, um die Durchschnittswerte der Verzerrungen zu finden, die in einem Körper von irgendeinem Kräftesystem, das ihn im Gleichgewicht zu halten vermag, hervorgebracht werden. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur $u'$, $v'$, $w'$ als Verschiebungen anzunehmen, die einer homogenen Verzerrung entsprechen. Die aus $u'$, $v'$, $w'$ berechneten Spannungskomponenten sind dann im ganzen Körper konstant. Gleichung (11) läßt sich in der Form ausdrücken

$$\begin{aligned}&\iiint(e_{xx}X_x'+e_{yy}Y_y'+e_{zz}Z_z'+e_{yz}Y_z'+e_{zx}Z_x'+e_{xy}X_y')dxdydz\\&=\iiint\varrho(Xu'+Yv'+Zw')dxdydz+\iint(X_\nu u'+Y_\nu v'+Z_\nu w')dS.\end{aligned}\tag{12}$$

Ist $X_x'$ die einzige von null verschiedene Spannungskomponente des gleichförmigen Spannungszustandes, so lassen sich die entsprechenden Verzerrungskomponenten mittels der Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung berechnen, und wir können die Verschiebungen ($u'$, $v'$, $w'$,) ermitteln. Auf diese Weise läßt sich die Größe

1) Die Methode stammt von Betti, *loc. cit.*

$\iiint e_{xx}\,dx\,dy\,dz$ bestimmen, also das Produkt aus dem Volumen des Körpers und dem Durchschnittswert der Verzerrungskomponente $e_{xx}$. Auf dieselbe Weise ergeben sich die Durchschnittswerte der übrigen Verzerrungen. Um die durchschnittliche kubische Dilatation zu finden, lassen wir das gleichförmige Spannungssystem aus gleichförmigem und in einem Punkte allseitig gleichen Zug bestehen.

## § 123. Durchschnittliche Verzerrungen in einem isotropen festen Körper.

Im Falle eines isotropen festen Körpers vom Volumen $V$ ist der Durchschnittswert von $e_{xx}$ gleich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{EV}\iiint \varrho\,\{Xx-\sigma(Yy+Zz)\}\,dx\,dy\,dz\\&+\frac{1}{EV}\iint\{X_\nu x-\sigma(Y_\nu y+Z_\nu z)\}\,dS;\end{aligned}\tag{13}$$

der Durchschnittswert von $e_{yz}$ ist

$$\frac{1}{2\mu V}\iiint\varrho(Yz+Zy)\,dx\,dy\,dz+\frac{1}{2\mu V}\iint\varrho(Y_\nu z+Z_\nu y)\,dS;\tag{14}$$

der Durchschnittswert von $\Delta$ ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3kV}\iiint\varrho(Xx+Yy+Zz)\,dx\,dy\,dz\\&+\frac{1}{3kV}\iint(X_\nu x+Y_\nu y+Z_\nu z)\,dS.\end{aligned}\tag{15}$$

Aus diesen Formeln sind folgende Resultate[1]) leicht abzuleiten:

1) Ein zylindrisch geformter fester Körper von beliebigem Querschnitt, der mit der einen Grundfläche auf einer horizontalen Ebene steht, ist um das Stück $Wl/2E\omega$ kürzer als im ungespannten Zustande, wo $W$ sein Gewicht, $l$ seine Länge, $\omega$ der Flächeninhalt des Querschnitts. Das Volumen des Zylinders ist um $Wl/6k$ kleiner als im ungespannten Zustand.

2) Liegt derselbe Zylinder auf der Seite, so ist er um $\sigma Wh/E\omega$ länger als im spannungslosen Zustand, wo $h$ die Höhe des Schwerpunkts über der Ebene. Das Volumen des Zylinders ist um $Wh/3k$ kleiner als im spannungslosen Zustand.

3) Das Volumen eines beliebig geformten Körpers, der von zwei um $c$ voneinander entfernten parallelen Ebenen zusammengepreßt wird, nimmt um $pc/3k$ ab, wo $p$ der über jede Ebene resultierende Druck. Haben wir es mit einem Zylinder mit ebenen Endflächen zu tun, die senkrecht zu seinen Erzeugenden liegen und von den pressenden Ebenen berührt werden,

1) Zahlreiche Beispiele für die Anwendung dieser Formeln und der entsprechenden Formeln für äolotrope Körper gibt C. Chree, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 15 (1892), p. 313.

so vermindert sich die Länge um $pc/E\omega$, wo $\omega$ der Inhalt des Querschnitts.

4) Ein beliebig geformtes Gefäß, dessen inneres Volumen $V_1$ und dessen äußeres Volumen $V_0$ ist, wird, wenn es einem inneren Druck $p_1$ und einem äußeren Druck $p_0$ unterworfen wird, so deformiert, daß das Volumen $V_0 - V_1$ des Gefäßmaterials um den Betrag $(p_0 V_0 - p_1 V_1)/k$ sich verringert.

## § 124. Das allgemeine Problem der Schwingungen. Eindeutigkeit der Lösung.

Wird ein fester Körper in einem Zustand der Verzerrung gehalten und die Kräfte, die die Verzerrung aufrecht erhalten, hören auf zu wirken, so entsteht im allgemeinen innere, relative Bewegung. Derartige Bewegungen können auch durch die Wirkung von Kräften, die mit der Zeit variieren, hervorgerufen werden. Im letzteren Falle kann man sie als „erzwungene Bewegungen" bezeichnen. Bei Problemen erzwungener Bewegung können sich die Oberflächenbedingungen entweder auf die Verschiebung oder auf die Spannung beziehen. Wenn keine Massenkräfte wirken und die Oberfläche des Körpers spannungsfrei ist, so sind die Bewegungen, die stattfinden können, „freie Schwingungen". Dieselben sind als Lösungen der Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right) = \varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{16}$$

die an der Oberfläche des Körpers den Bedingungen vom Typus

$$\cos(x,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \cos(y,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \cos(z,\nu)\frac{\partial W}{\partial e_{zx}} = 0 \tag{17}$$

genügen, zu bestimmen. Arten freier Schwingung gibt es in unbegrenzter Anzahl, und wir können die Lösung der Gleichungen beliebigen Anfangsbedingungen bezüglich der Verschiebung und der Geschwindigkeit unterwerfen.

Wenn wir es mit veränderlichen Massenkräften zu tun haben und die Oberfläche spannungsfrei ist, so können freie Schwingungen neben erzwungenen Bewegungen bestehen, und dasselbe gilt für erzwungene Bewegungen, die durch veränderliche Oberflächenspannungen hervorgebracht werden.

Die Methoden der Integration der Gleichungen der freien Schwingung werden uns sogleich beschäftigen. Hier wollen wir beweisen, daß die Lösung der Gleichungen der freien Schwingung, die zugleich gegebenen Anfangsbedingungen bezüglich der Verschiebung und Geschwindigkeit genügt, eindeutig bestimmt ist.[1]

1) Vgl. F. Neumann, *Vorlesungen über ... Elastizität*, p. 125.

Angenommen, $(u', v', w')$ und $(u'', v'', w'')$ seien zwei Verschiebungssysteme, die beide die Gleichungen vom Typus (16) und die Bedingungen vom Typus (17) befriedigen, und in einem bestimmten Augenblick $t = t_0$ sei $(u', v', w') = (u'', v'', w'')$ und

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial t}, \frac{\partial v'}{\partial t}, \frac{\partial w'}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial u''}{\partial t}, \frac{\partial v''}{\partial t}, \frac{\partial w''}{\partial t}\right).$$

Dann würde die Differenz $(u' - u'', v' - v'', w' - w'')$ eine Verschiebung darstellen, die gleichfalls den Gleichungen vom Typus (16) und den Bedingungen vom Typus (17) genügte, und im Augenblick $t = t_0$ würde diese Verschiebung und die entsprechende Geschwindigkeit verschwinden. Es bezeichne $(u, v, w)$ diese Verschiebung. Wir bilden die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} dt \iiint \Bigg[ & \frac{\partial u}{\partial t}\left\{\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)\right\} \\ & + \frac{\partial v}{\partial t}\left\{\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right)\right\} \\ & + \frac{\partial w}{\partial t}\left\{\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\right)\right\}\Bigg] dx\,dy\,dz = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

in der die Verzerrungskomponenten, $e_{xx} \ldots$, und die Verzerrungsenergie-Funktion, $W$, aus der Verschiebung $(u, v, w)$ zu berechnen sind. Die $\varrho$ enthaltenden Glieder lassen sich nach $t$ integrieren, und das Ergebnis ist, daß diese Glieder gleich sind der aus $\frac{\partial u}{\partial t}, \ldots$ berechneten kinetischen Energie zur Zeit $t$, denn die kinetische Energie zur Zeit $t_0$ verschwindet. Die $W$ enthaltenden Glieder lassen sich in ein Oberflächen- und ein Raumintegral umformen. Das Oberflächenintegral ist die Summe dreier Glieder vom Typus

$$\begin{aligned}-\int_{t_0}^{t} dt \iint dS \frac{\partial u}{\partial t} \Bigg\{ & \cos(x, \nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right) + \cos(y, \nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right) \\ & + \cos(z, \nu)\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\right)\Bigg\};\end{aligned}$$

dieser Ausdruck verschwindet, weil die aus $(u, v, w)$ berechneten Oberflächenspannungen verschwinden. Das Raumintegral ist gleich

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} dt \iiint \Bigg[ & \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial e_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\frac{\partial e_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\frac{\partial e_{zz}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\frac{\partial e_{yz}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\frac{\partial e_{zx}}{\partial t} \\ & + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial e_{xy}}{\partial t}\Bigg] dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

d. i. gleich dem Wert von $\iiint W dx\,dy\,dz$ zur Zeit $t$, denn $W$ verschwindet im Augenblick $t = t_0$, weil die Verschiebung im ganzen

Körper in jenem Augenblick verschwindet. Unsere Gleichung (18) lautet daher

$$\iiint \left\{ \tfrac{1}{2} \varrho \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] + W \right\} dx\,dy\,dz = 0; \qquad (19)$$

diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn zur Zeit $t$ die Geschwindigkeit $(\partial u/\partial t, \ldots)$ und die Verzerrungsenergie-Funktion $W$ verschwinden. Wir würden dann also weder Geschwindigkeit noch Verzerrung haben, und es wäre nur eine Verschiebung $(u, v, w)$ denkbar, die in einem starren Körper möglich und von der Zeit unabhängig ist. Da nun die Verschiebung $(u, v, w)$ im Augenblick $t = t_0$ im ganzen Körper verschwindet, so verschwindet sie auch in jedem folgenden Augenblick im ganzen Körper.

## § 125. Energiefluß bei schwingender Bewegung.

Die kinetische Energie $T$ und die potentielle Energie $V$ des von einer geschlossenen Fläche $S$ begrenzten Teils des Körpers drücken sich aus durch die Formeln

$$T = \iiint \tfrac{1}{2} \varrho (\dot u^2 + \dot v^2 + \dot w^2)\, dx\,dy\,dz, \qquad V = \iiint W\, dx\,dy\,dz,$$

wo die Punkte Differentiation nach $t$ bezeichnen und die Integration über den von $S$ begrenzten Raum erstreckt ist. Wir haben nun sofort

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V) = \iiint \Big\{ & \varrho (\ddot u \dot u + \ddot v \dot v + \ddot w \dot w) + \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \frac{\partial \dot u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \frac{\partial \dot v}{\partial y} \\ & + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \frac{\partial \dot w}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} \left( \frac{\partial \dot w}{\partial y} + \frac{\partial \dot v}{\partial z} \right) + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \left( \frac{\partial \dot u}{\partial z} + \frac{\partial \dot w}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \left( \frac{\partial \dot v}{\partial x} + \frac{\partial \dot u}{\partial y} \right) \Big\} dx\,dy\,dz. \end{aligned} \qquad (20)$$

Die rechte Seite läßt sich in ein Raum- und ein Oberflächenintegral umformen. Die Glieder des Raumintegrals, welche $\dot u$ enthalten, sind

$$\iiint \dot u \left( \varrho \ddot u - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \right) dx\,dy\,dz;$$

und die Glieder des Oberflächenintegrals, welche $\dot u$ enthalten, sind

$$\iint \dot u \left\{ \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \cos(z, \nu) \right\} dS.$$

Wenn keine Massenkräfte wirken, erhalten wir demnach die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \iint (\dot u X_\nu + \dot v Y_\nu + \dot w Z_\nu)\, dS. \qquad (21)$$

Diese Gleichung läßt sich in Worten folgendermaßen aussprechen: Die Zunahme der Energie innerhalb $S$ in der Zeiteinheit ist gleich der Leistung der auf $S$ wirkenden Spannungen.

Nach § 53, Satz 7), ist der Ausdruck $(\dot{u} X_\nu + \dot{v} Y_\nu + \dot{w} Z_\nu)$ gleich der Normalkomponente einer Vektorgröße, deren Komponenten parallel den Achsen durch

$$-(\dot{u} X_x + \dot{v} X_y + \dot{w} Z_x), \; -(\dot{u} X_y + \dot{v} Y_y + \dot{w} Y_z), \; -(\dot{u} Z_x + \dot{v} Y_z + \dot{w} Z_z)$$

gegeben sind. Dieser Vektor kann daher zur Berechnung des Energieflusses benutzt werden.

## § 126. Freie Schwingungen elastischer fester Körper.

In der Theorie der kleinen Schwingungen dynamischer Systeme mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden wird gezeigt, daß die allgemeinste kleine Bewegung eines Systems, das aus einer Lage stabilen Gleichgewichts etwas abgelenkt wird, sich in eine Anzahl kleiner periodischer Bewegungen zerlegen läßt, von denen jede unabhängig von den übrigen ausgeführt werden könnte. Die Zahl dieser speziellen Bewegungstypen ist gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Systems. Jeder derselben ist durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

1. Die Bewegung jedes Teilchens des Systems ist eine einfache harmonische.

2. Periode und Phase der einfachen harmonischen Bewegung sind für alle Teilchen identisch.

3. Die in irgend einer Richtung gemessene Verrückung eines Teilchens aus seiner Gleichgewichtslage steht zu der in einer bestimmten Richtung gemessenen Verrückung eines anderen Teilchens in einem bestimmten Verhältnis.

Geht die Bewegung des Systems nach einem dieser speziellen Typen vonstatten, so sagt man, es führt eine „Haupt“- oder „Normalschwingung“ (engl. „normal mode of vibration“) aus. Die auf irgend eine kleine Störung folgende Bewegung läßt sich darstellen als Überlagerung verschiedener Normalschwingungen.

Versuchen wir, diese Theorie zu verallgemeinern, um sie auf Systeme von unendlichem Grade der Freiheit zu übertragen, so werden wir mit dem Aufsuchen von Normalschwingungen beginnen.[1] Indem wir die Frequenz gleich $p/2\pi$ nehmen, setzen wir für die Verschiebung die Formeln an

$$u = u' \cos(pt + \varepsilon), \quad v = v' \cos(pt + \varepsilon), \quad w = w' \cos(pt + \varepsilon), \quad (22)$$

wo $u'$, $v'$, $w'$ Funktionen von $x$, $y$, $z$, aber nicht von $t$, und $p$ und $\varepsilon$ Konstanten sind. Nun sei $W'$ das, was die Verzerrungsenergie-Funktion darstellen würde, falls $u'$, $v'$, $w'$ die Verschiebung wäre, und $X_x'$, ... das, was im gleichen Falle die Spannungskomponenten vorstellen

1) Siehe Clebsch, *Elastizität* oder Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 1.

würde. Die Gleichungen der Bewegung bei fehlenden Massenkräften nehmen dann die Form an

$$\frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_x'}{\partial z} + \varrho p^2 u' = 0, \tag{23}$$

u. s. w.; und die Randbedingungen gehen, wenn die Oberfläche spannungsfrei ist, in Relationen von der Form über

$$\cos(x, \nu) X_x' + \cos(y, \nu) X_y' + \cos(z, \nu) Z_x' = 0. \tag{24}$$

Diese Gleichungen und Bedingungen reichen hin, um $u'$, $v'$, $w'$ als Funktionen von $x, y, z$ mit einem willkürlichen konstanten Faktor zu bestimmen, und diese Funktionen enthalten auch $p$. Die Grenzbedingungen führen zu einer Gleichung für $p$, die im allgemeinen transzendent ist und eine unendliche Zahl von Wurzeln besitzt. Diese Gleichung ist bekannt als die „Frequenzengleichung".

Wir sehen also, daß ein elastischer fester Körper eine unbegrenzte Zahl von Normalschwingungen besitzt.

Es seien $p_1, p_2, \ldots$ die Wurzeln der Frequenzengleichung, und die Normalschwingung mit der Periode $2\pi/p_r$ drücke sich aus durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} u = A_r u_r \cos(p_r t + \varepsilon_r), \qquad v = A_r v_r \cos(p_r t + \varepsilon_r) \\ w = A_r w_r \cos(p_r t + \varepsilon_r), \end{array}\right\} \tag{25}$$

wo $A_r$ ein willkürlicher konstanter Faktor; die Funktionen $u_r$, $v_r$, $w_r$ werden „Normalfunktionen" genannt.

Durch Überlagerung der verschiedenen Normalschwingungen würden wir eine Bewegung erhalten, die sich ausdrückt durch Gleichungen vom Typus

$$u = \Sigma u_r \Phi_r, \quad v = \Sigma v_r \Phi_r, \quad w = \Sigma w_r \Phi_r, \tag{26}$$

wo $\Phi_r$ statt der Funktion $A_r \cos(p_r t + \varepsilon_r)$ geschrieben ist. Der Satz, daß jede kleine Bewegung sich als Überlagerung von Normalschwingungen darstellen läßt, ist gleichwertig mit dem Theorem, daß jede beliebige Verschiebung (oder Geschwindigkeit) als Summe einer endlichen oder unendlichen Reihe von Normalfunktionen dargestellt werden kann. Derartige Sätze über die Entwicklung von Funktionen sind Verallgemeinerungen des Fourierschen Theorems, und vom Standpunkt der strengen Analysis verlangen sie noch einen besonderen Beweis. Jedes freie Schwingungen betreffende Problem liefert ein derartiges Entwicklungstheorem.

## § 127. Allgemeine Sätze über freie Schwingungen.[1])

1) In der Variationsgleichung der Bewegung

$$\begin{gathered}\iiint \delta W dx dy dz \\ + \iiint \varrho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dx dy dz = 0\end{gathered} \tag{27}$$

mögen $u, v, w$ die Form $u_r \Phi_r, v_r \Phi_r, w_r \Phi_r$ und $\delta u, \delta v, \delta w$ die Form $u_s \Phi_s, v_s \Phi_s, w_s \Phi_s$ haben, wo $\Phi_r$ und $\Phi_s$ statt $A_r \cos(p_r t + \varepsilon_r)$ und $A_s \cos(p_s t + \varepsilon_s)$ geschrieben sind und die Konstanten $A_r$ und $A_s$ so klein sein können wie wir wollen. $W$ gehe in $W_r$ über, wenn $u_r$, $v_r$, $w_r$ statt $u, v, w$, und in $W_s$, wenn $u_s, v_s, w_s$ statt $u, v, w$ eingesetzt werden. Wir bezeichnen mit $e$ irgend eine der sechs Verzerrungskomponenten und $e_r$ und $e_s$ die Ausdrücke, in die $e$ übergeht, wenn statt $u, v, w$ bezüglich $u_r, v_r, w_r$ und $u_s, v_s, w_s$ eingesetzt werden. Die Variationsgleichung nimmt dann die Form an

$$\iiint \Sigma \left( \frac{\partial W}{\partial e_r} e_s \right) dx dy dz = p_r^2 \iiint \varrho (u_r u_s + v_r v_s + w_r w_s) dx dy dz.$$

Die linke Seite bleibt ungeändert, wenn $e_r$ und $e_s$ miteinander vertauscht werden, d. h. wenn $u, v, w$ in der Form $u_s \Phi_s, \ldots$ und $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ in der Form $u_r \Phi_r, \ldots$ angenommen werden; auf der rechten Seite tritt dann $p_s^2$ statt $p_r^2$ auf. Da $p_r$ und $p_s$ nicht einander gleich sind, so folgt, daß

$$\iiint \varrho (u_r u_s + v_r v_s + w_r w_s) dx dy dz = 0\,. \tag{28}$$

Dies Ergebnis ist als die „konjugierte Eigenschaft" der Normalfunktionen bekannt.

2) Wir können $\Phi_r$ in der Form $A_r \cos p_r t + B_r \sin p_r t$ schreiben, dann ermöglicht uns die konjugierte Eigenschaft der Normalfunktionen die Bestimmung der Konstanten $A_r$, $B_r$ aus den Anfangswerten der Verschiebung und Geschwindigkeit. Wir setzen voraus, daß die Verschiebung zu irgendeiner Zeit in der Form (26) sich darstellen läßt. Wir haben dann zu Anfang

$$u_0 = \Sigma A_r u_r\,, \qquad v_0 = \Sigma A_r v_r\,, \qquad w_0 = \Sigma A_r w_r\,, \tag{29}$$

$$\dot{u}_0 = \Sigma B_r p_r u_r\,, \quad \dot{v}_0 = \Sigma B_r p_r v_r\,, \quad \dot{w}_0 = \Sigma B_r p_r w_r\,, \tag{30}$$

wo $(u_0, v_0, w_0)$ die Anfangsverschiebung und $(\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0)$ die Anfangsgeschwindigkeit. Multiplizieren wir die drei Gleichungen (29) bezüglich mit $\varrho u_r$, $\varrho v_r$, $\varrho w_r$ und integrieren über den vom Körper erfüllten Raum, so erhalten wir die Gleichung

1) Diese Sätze wurden von Clebsch als Verallgemeinerung der Poissonschen Theorie der Schwingungen einer elastischen Kugel aufgestellt. Siehe *Einleitung*.

$$A_r \iiint \varrho(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint \varrho(u_0 u_r + v_0 v_r + w_0 w_r)\,dx\,dy\,dz. \tag{31}$$

Die andern Koffizienten werden durch ein ähnliches Verfahren ermittelt.

3) Die konjugierte Eigenschaft der Normalfunktionen kann dazu dienen zu zeigen, daß die Frequenzengleichung keine imaginären Wurzeln haben kann. Gäbe es eine Wurzel $p_r^2$ von der Form $\alpha + i\beta$, so würden wir auch eine Wurzel $p_s^2$ von der Form $\alpha - i\beta$ haben. Diesen beiden Wurzeln würden zwei Systeme von Normalfunktionen, $u_r, v_r, w_r$ und $u_s, v_s, w_s$, entsprechen, die gleichfalls konjugiert imaginär sein würden. Die Gleichung

$$\iiint \varrho(u_r u_s + v_r v_s + w_r w_s)\,dx\,dy\,dz = 0$$

könnte dann nicht erfüllt sein, denn der Integrand würde gleich dem Produkte aus der positiven Größe $\varrho$ und einer Summe positiver Quadrate sein.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $p_r^2$ nicht negativ sein kann. Zu diesem Zweck betrachten wir das Integral

$$\iiint \varrho(u_r^2 + v_r^2 + w_r^2)\,dx\,dy\,dz;$$

dasselbe ist gleich

$$-p_r^{-2} \iiint \left\{ u_r \left( \frac{\partial X_x^{(r)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(r)}}{\partial y} + \frac{\partial Z_x^{(r)}}{\partial z} \right) + \cdots + \cdots \right\} dx\,dy\,dz,$$

wo $X_x^{(r)}, \ldots$ das sind, was $X_x, \ldots$ darstellen, wenn $u_r, v_r, w_r$ statt $u, v, w$ eingesetzt werden. Der letztere Ausdruck läßt sich umformen in

$$-p_r^{-2} \iint [u_r \{\cos(x,\nu) X_x^{(r)} + \cos(y,\nu) X_y^{(r)} + \cos(z,\nu) Z_x^{(r)}\} + \cdots + \cdots]\,dS,$$
$$+ p_r^{-2} \iiint 2\,W_r\,dx\,dy\,dz,$$

wo nun das Oberflächenintegral verschwindet und das Raumintegral notwendig positiv ist. Daraus folgt, daß $p_r^2$ positiv ist.

## § 128. Plötzliche Belastung oder Belastungsumkehrung.

Die Theorie der Schwingungen fester Körper kann man anwenden, um zwei hervorragend wichtige Sätze der Festigkeitslehre zu beweisen. Der eine besagt, daß die Verzerrung, die durch eine plötzliche Belastung hervorgerufen wird, doppelt so groß sein kann wie jene, die durch allmähliche Anbringung der gleichen Last entsteht; der andere Satz besagt, daß, wenn die Belastung plötzlich umgekehrt wird, die Verzerrung sich möglicherweise verdreifacht.

Um den ersten Satz zu beweisen, bemerken wir, daß, wenn wir an einem elastischen System eine Last plötzlich angreifen lassen, das System in einen Zustand der Schwingung um eine gewisse Gleichgewichtslage gerät, um jene Lage nämlich, die das System einnehmen würde, wenn wir die Last allmählich anbrächten. Im Anfangszustand ist die Energie rein potentiell, und da keine elastische Spannung vorhanden ist, ist diese Energie einfach gegeben durch die Lage des elastischen festen Körpers in dem Kraftfelde, das die Belastung liefert. Fällt die Anfangslage zusammen mit einer möglichen instantanen Ruhelage einer Normalschwingung des Systems, so wird das System eben diese Normalschwingung ausführen, und die Konfiguration nach Verlauf einer Viertelperiode wird die Gleichgewichtskonfiguration sein, d. h. die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage wird dann null sein; nach Verlauf einer halben Periode wird sie jener in der Anfangslage entgegengesetzt gleich sein. Die größte Verschiebung von der Anfangslage aus wird daher doppelt so groß sein wie die in der Gleichgewichtslage. Wenn das nach der plötzlichen Belastung sich selbst überlassene System keine Normalschwingung ausführt, so wird die Verzerrung kleiner bleiben als das Doppelte der in der Gleichgewichtslage vorhandenen Verzerrung, da es nie durch eine Konfiguration hindurchgeht, in der die Energie rein potentiell ist.

Ganz ähnlich ist der Beweis des zweiten Satzes. Während das System in einer Gleichgewichtslage verzerrt gehalten wird, wird die Belastung plötzlich umgekehrt, und in der neuen Gleichgewichtslage sind alle Verschiebungen den früheren entgegengesetzt. Um diese Lage schwingt das System. Führt es eine Normalschwingung aus, so ist die größte Verschiebung aus der Gleichgewichtskonfiguration doppelt so groß wie die Anfangsverschiebung aus dem unverzerrten Zustand; und in dem Augenblick, wo die Verschiebung aus der Gleichgewichtskonfiguration ihr Maximum erreicht, ist die Verschiebung vom unverzerrten Zustand aus dreimal so groß wie in der Gleichgewichtslage.

Ein typisches Beispiel für den ersten Satz liefert der Fall einer elastischen Schnur, an der plötzlich ein Gewicht angehängt wird. Die größte Dehnung ist doppelt so groß wie diejenige, die es bei statischer Einwirkung des Gewichtes erfährt.

Ein typisches Beispiel für den zweiten Satz liefert der Fall eines gedrillt gehaltenen zylindrischen Stabes. Bei plötzlicher Umkehrung des drillenden Kräftepaars kann der größte Schub das Dreifache des Schubs betragen, der ursprünglich mit dem Drall verbunden war.

# Kapitel VIII.

## Die Ausbreitung der Kraft.

§ 129. In diesem Kapitel wollen wir einige spezielle Probleme des Gleichgewichts eines isotropen festen Körpers bei fehlenden Massenkräften untersuchen. Wir werden die Gleichungen des Gleichgewichts in der Form annehmen

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta + \mu\nabla^2(u, v, w) = 0 \qquad (1)$$

und werden gewisse besondere Lösungen betrachten, die in der Nähe bestimmter Punkte gegen unendlich konvergieren. Diese Punkte müssen außerhalb des Körpers oder in Höhlungen im Innern des Körpers liegen. Wir erhalten für die Lösung unserer Gleichungen eine Theorie, die auf einer Zusammensetzung solcher Lösungen beruht, für welche gewisse Punkte singuläre Bedeutung haben, und die analog ist der Theorie der harmonischen Funktionen, wenn sie als Potentiale von Massenpunkten betrachtet werden. Vom physikalischen Gesichtspunkte aus ist der einfachste singuläre Punkt ein Punkt, in dem eine Kraft am Körper angreift.

### § 130. In einem Punkte angreifende Kraft.[1])

Wenn Massenkräfte $(X, Y, Z)$ auf den Körper wirken, so lauten die Gleichungen des Gleichgewichts

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Delta + \mu\nabla^2(u, v, w) + \varrho(X, Y, Z) = 0, \qquad (2)$$

und die allgemeinste Lösung dieser Gleichung erhalten wir, indem wir zu irgend einer partikularen Lösung derselben die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) hinzufügen. Der Einfluß der Massenkräfte wird dann durch die partikuläre Lösung dargestellt. Wir suchen solch eine Lösung für den Fall, wo $(X, Y, Z)$ innerhalb eines endlichen Bereichs $T$ von null verschieden sind und außerhalb $T$ ver-

---

1) Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Resultate verdankt man Lord Kelvin. Siehe *Einleitung*, Fußnote 66.



schwinden. Der Bereich $T$ kann mit dem vom Körper oder einem Teil desselben erfüllten Raum zusammenfallen. Für den vorliegenden Zweck können wir uns den Körper als unbegrenzt nach allen Richtungen ausgedehnt und den Bereich $T$ als Teil desselben vorstellen. Wir gehen zu einem Grenzfall über, indem wir $T$ beliebig klein werden lassen.

Wir drücken die Verschiebung durch ein skalares Potential $\Phi$ und ein Vektorpotential $(F, G, H)$ aus (vgl. § 16) mit Hilfe der Formeln vom Typus

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \tag{3}$$

und die Massenkraft drücken wir in gleicher Weise aus mit Hilfe der Formeln vom Typus

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}. \tag{4}$$

Da $\Delta = \nabla^2 \Phi, \ldots$, so lassen sich die Gleichungen (2) nach Art der folgenden schreiben:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi + \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 H - \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 G\right)& \\ + \varrho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) &= 0,\end{aligned} \tag{5}$$

und wir können partikuläre Lösungen erhalten, indem wir von folgenden vier Gleichungen partikuläre Lösungen hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \Phi + \varrho \Phi = 0, \quad \mu \nabla^2 F + \varrho L = 0,\\ \mu \nabla^2 G + \varrho M = 0, \quad \mu \nabla^2 H + \varrho N = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir können nun $X, Y, Z$ in der durch (4) gegebenen Form ausdrücken, indem wir setzen

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right) dx'\,dy'\,dz',\\ L &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right) dx'\,dy'\,dz',\\ M &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} - Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right) dx'\,dy'\,dz',\\ N &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left(Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} - X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right) dx'\,dy'\,dz',\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wo $X', Y', Z'$ die Werte von $X, Y, Z$ in irgend einem Punkte $(x', y', z')$ innerhalb $T$ bezeichnen, $r$ den Abstand dieses Punktes von $(x, y, z)$ bedeutet und die Integration über $T$ erstreckt ist. Man übersieht sofort, daß obige Ausdrücke in jedem Punkt innerhalb $T$ für $X, Y, Z$ die richtigen Werte liefern und in jedem Punkt außerhalb $T$ den Wert null ergeben.

Wir gehen nunmehr zur Grenze über, und zwar lassen wir alle linearen Abmessungen von $T$ unbegrenzt abnehmen, setzen aber dabei voraus, daß $\iiint X'dx'dy'dz'$ einem endlichen Grenzwert zustrebt. Auf diese Weise gelangen wir zu dem Fall einer im Punkte $(x', y', z')$ in der Richtung der $x$-Achse wirkenden Kraft $X_0$. Wir haben zu setzen

$$\varrho \iiint X'dx'dy'dz' = X_0 \tag{8}$$

und haben dann

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\varrho} X_0 \frac{\partial r^{-1}}{\partial x},\; L = 0,\; M = \frac{1}{4\pi\varrho} X_0 \frac{\partial r^{-1}}{\partial z},\; N = -\frac{1}{4\pi\varrho} X_0 \frac{\partial r^{-1}}{\partial y}. \tag{9}$$

Nun ist $\nabla^2(\partial r/\partial x) = 2\partial r^{-1}/\partial x$, und wir können daher setzen

$$\Phi = \frac{X_0}{8\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial r}{\partial x},\; F = 0,\; G = -\frac{X_0}{8\pi\mu} \frac{\partial r}{\partial z},\; H = \frac{X_0}{8\pi\mu} \frac{\partial r}{\partial y}. \tag{10}$$

Die entsprechenden Formen für $u$, $v$, $w$ sind

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{X_0}{4\pi\mu r}, \\ v &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, \\ w &= -\frac{(\lambda+\mu)X_0}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Allgemeiner drückt sich die Verschiebung, die von der im Punkte $(x', y', z')$ wirkenden Kraft $(X_0, Y_0, Z_0)$ herrührt, durch die Gleichung aus

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= \frac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left(\frac{X_0}{r}, \frac{Y_0}{r}, \frac{Z_0}{r}\right) \\ &+ \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left(\frac{x-x'}{r}, \frac{y-y'}{r}, \frac{z-z'}{r}\right) \frac{X_0(x-x')+Y_0(y-y')+Z_0(z-z')}{r^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Wenn die Kräfte $X$, $Y$, $Z$ in einem Bereich $T$ von endlicher Größe wirksam sind, so lassen sich partikuläre Integrale der Gleichungen (2) folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} u = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \iiint \Bigg\{ & \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \varrho \frac{X'}{r} \\ & + \varrho(x-x') \frac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{r^3} \Bigg\} dx'dy'dz', \end{aligned} \tag{13}$$

usw., wo die Integration über den Bereich $T$ sich erstreckt.

Bemerkt sei, daß die Dilatation und die Rotation, die der Verschiebung (11) entsprechen, durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left.\begin{aligned} \Delta = \frac{X_0}{4\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x},\; 2\varpi_x = 0,\; 2\varpi_y = \frac{X_0}{4\pi\mu} \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}, \\ 2\varpi_z = -\frac{X_0}{4\pi\mu} \frac{\partial r^{-1}}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

## § 131. Erster Typus einfacher Lösungen.[1])

Wirkt die Kraft im Ursprungspunkt parallel der $z$-Achse, so können wir die Ausdrücke für die Verschiebungen in der Form schreiben

$$u = A\frac{xz}{r^3},\quad v = A\frac{yz}{r^3},\quad w = A\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{r}\right). \tag{15}$$

Es ist ohne weiteres zu verifizieren, daß diese Ausdrücke eine Lösung der Gleichungen (1) überall außer im Ursprungspunkt darstellen. Wir nehmen an, der Ursprung liege in einer Höhlung, und berechnen die auf die Oberfläche der Höhlung wirkende Spannung. Die aus (15) folgenden Spannungen über beliebige einen Körper begrenzende Flächen bilden ein im statischen Gleichgewicht befindliches Kräftesystem, wenn der Ursprung nicht ein Punkt des Körpers selbst ist [vgl. § 117]. Daraus ergibt sich, daß im Falle des Körpers mit der Höhlung die Resultante und das resultierende Moment der auf die äußere Begrenzung wirkenden Spannungen entgegensetzt gleich der Resultante und dem resultierenden Moment der auf die Oberfläche der Höhlung wirkenden Spannungen sind. Die Werte dieser Spannungen auf der äußeren Begrenzung hängen von der Gestalt oder Größe der Höhlung nicht ab, und wir können sie daher berechnen, indem wir die Höhlung kugelförmig annehmen und, zur Grenze übergehend, den Radius der Kugel unbegrenzt abnehmen lassen. Auf diese Weise verifizieren wir, daß die durch (15) ausgedrückte Verschiebung durch eine Einzelkraft von der Größe $8\pi\mu(\lambda+2\mu)A/(\lambda+\mu)$ hervorgebracht wird, die im Ursprungspunkt in der Richtung der $z$-Achse angreift.

Wir schreiben die Gleichungen (15) in der Form

$$u = -A\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z},\quad v = -A\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z},\quad w = -A\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2 r\right). \tag{16}$$

Die kubische Dilatation, die der Verschiebung (16) entspricht, ist gleich $A\dfrac{2\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{\partial r^{-1}}{\partial z}$, und die Spannungskomponenten berechnen sich leicht in der Form

$$X_x = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\},\quad Y_z = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\},$$

$$Y_y = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\},\quad Z_x = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\},$$

$$Z_z = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\},\quad X_y = 6\mu A\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}.$$

Die Spannungen auf eine beliebige Ebene (deren Normale in die Richtung $\nu$ fällt) sind gegeben durch die Gleichungen

$$X_\nu = 2\mu A\left[3\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{\cos(z,\nu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} - \cos(x,\nu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right\}\right],$$

$$Y_\nu = 2\mu A\left[3\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left\{\cos(z,\nu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - \cos(y,\nu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right\}\right],$$

$$Z_\nu = 2\mu A\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu}\left\{3\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\};$$

1) Die durch die Gleichungen (15) ausgedrückte Lösung wird so betitelt nach Boussinesq, *Applications des Potentiels.*

bedeutet $\nu$ die nach innen gerichtete Normale der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, so haben wir hierfür

$$X_\nu = \frac{6\mu A x z}{r^4}, \quad Y_\nu = \frac{6\mu A y z}{r^4}, \quad Z_\nu = \frac{2\mu A}{r^2}\left(3\frac{z^2}{r^2} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right). \tag{17}$$

Dies Spannungssystem ist, wie wir auch den Radius der Höhlung wählen mögen, statisch gleichwertig mit einer Einzelkraft vom Betrage $8\pi\mu A(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$, die im Ursprung angreift und im Sinne der positiven Richtung der $z$-Achse wirkt.

Einige weitere Resultate bezüglich des Spannungszustandes, der durch eine in einem Punkte angreifende Kraft in einem Körper erzeugt wird, folgen unten in § 140.

## § 132. Typische Verzerrungskerne.

Aus den in § 131 diskutierten Lösungen lassen sich mannigfache Lösungen ableiten, die singuläre Punkte besitzen. Insbesondere können wir zwei Punkte, in denen Kräfte wirken, zusammenrücken lassen und durch einen Grenzprozeß neue Lösungen erhalten. Es empfiehlt sich, die Verschiebung, die von einer im Ursprung angreifenden Kraft $(X_0, Y_0, Z_0)$ herrührt, mit

$$(X_0 u_1 + Y_0 u_2 + Z_0 u_3, \quad X_0 v_1 + Y_0 v_2 + Z_0 v_3, \quad X_0 w_1 + Y_0 w_2 + Z_0 w_3)$$

zu bezeichnen, sodaß z. B. $(u_1, v_1, w_1)$ die Verschiebung bedeutet, die sich ergibt, wenn in den Gleichungen (11) $X_0$ durch eins ersetzt wird. Wir betrachten einige Beispiele[1]) der Zusammensetzung von Singularitäten:

a) Im Ursprung greife eine Kraft $h^{-1}P$ in der Richtung der $x$-Achse an, und im Punkte $(h, 0, 0)$ wirke eine gleiche und entgegengesetzte Kraft; wir wollen, zur Grenze übergehend, annehmen, daß $h$ unbegrenzt abnimmt, während $P$ konstant bleibt. Die Verschiebung ist

$$P\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial x}\right).$$

Wir können die Singularität bezeichnen als „Doppelkraft ohne Moment". Sie ist bezogen auf eine Achse, in diesem Falle die $x$-Achse, und ist dem Betrage nach durch die Größe $P$ gekennzeichnet.

a′) Wir können drei Doppelkräfte ohne Moment, deren Achsen den Koordinatenachsen parallel und die durch dieselbe Größe $P$ gekennzeichnet sind, miteinander kombinieren. Die resultierende Verschiebung ist

$$P\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right)\right\}. \tag{18}$$

Nun zeigt Formel (12), daß wir haben

$$v_3 = w_2, \quad w_1 = u_3, \quad u_2 = v_1; \tag{19}$$

1) Bei den meisten sind nur die Hauptpunkte der Rechnung angegeben. Die Ergebnisse a′) und b′) rühren her von J. Dougall, *Edinburgh Math. Soc. Proc.*, vol. 16 (1898).

somit können wir (18) schreiben $P(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, wo $\Delta_1$ die Dilatation, falls $(u_1, v_1, w_1)$ die Verschiebung, usw. Die Verschiebung (18) ist daher gleich

$$-\frac{P}{4\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial r^{-1}}{\partial y}, \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right\}. \tag{20}$$

Wir können diese Singularität als „Kompressionszentrum" bezeichnen; wenn $P$ negativ ist, können wir sie „Dilatationszentrum" nennen. Der betreffende Punkt muß in einer Höhlung im Inneren des Körpers liegen; ist die Höhlung kugelförmig und fällt der Mittelpunkt in den singulären Punkt, so ist, wie leicht zu verifizieren, die Spannung auf die Höhlungswand normaler Zug vom Betrage

$$\left\{\mu P/(\lambda + 2\mu)\pi\right\} r^{-3}.$$

b) Wir wollen annehmen, im Ursprung greife eine Kraft $h^{-1}P$ in der positiven Richtung der $x$-Achse an und eine gleiche und entgegengesetzte Kraft wirke im Punkte $(0, h, 0)$; wir können dann wie vorhin zur Grenze übergehen. Die resultierende Verschiebung ist

$$P\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial w_1}{\partial y}\right).$$

Wir können die Singularität als „Doppelkraft mit Moment" bezeichnen. Die Kräfte, die auf den Körper in der Nähe dieses Punktes wirken, sind statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar vom Moment $P$ um die $z$-Achse. Die Singularität ist bezogen auf diese Achse und gleichfalls auf die Richtung der Kräfte, in diesem Falle die $x$-Achse.

b′) Wir können zwei Doppelkräfte mit Moment miteinander kombinieren, wobei die Momente um dieselbe Achse und in demselben Sinne drehen und die Richtungen der Kräfte einander rechtwinklig kreuzen mögen. Wir nehmen die Kräfte im Ursprungspunkt gleich $h^{-1}P$ und $-h^{-1}P$ parallel der $x$- und $y$-Achse, im Punkte $(0, h, 0)$ gleich $-h^{-1}P$ parallel der $x$-Achse und im Punkte $(h, 0, 0)$ gleich $h^{-1}P$ parallel der $y$-Achse an; wir gehen wie vorhin zur Grenze über und erhalten als resultierende Verschiebung

$$P\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\right\}$$

oder

$$\frac{P}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}, -\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}, 0\right). \tag{21}$$

Wir können die Singularität als „Zentrum einer Rotation um die $z$-Achse" bezeichnen. Die Kräfte, die in der Nähe dieses Punktes auf den Körper wirken, sind statisch gleichwertig mit einem Kräftepaar vom Moment $2P$ um die $z$-Achse; die Singularität ist nicht bezogen auf die Richtungen der Kräfte. In gleicher Weise können wir Singularitäten haben, welche Zentren einer Rotation um die $x$- oder $y$-Achse sind; die entsprechenden Verschiebungen haben die Form

$$\frac{P}{4\pi\mu}\left(0, \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}, -\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right) \tag{22}$$

und

$$\frac{P}{4\pi\mu}\left(-\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}, 0, \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right). \tag{23}$$

c) Wir nehmen an, Dilatationszentren seien gleichmäßig längs eines unendlichen Halbstrahls verteilt. Derselbe falle etwa mit dem Teil der $z$-Achse zusammen, auf dem $z$ negativ ist. Die Verschiebung ist gegeben durch Gleichungen von der Form

$$u = Bx\int_0^\infty \frac{dz'}{R^3}, \quad v = By\int_0^\infty \frac{dz'}{R^3}, \quad w = B\int_0^\infty \frac{z+z'}{R^3}\,dz',$$

wo $B$ eine Konstante und $R^2 = x^2 + y^2 + (z+z')^2$.

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{dz'}{R^3} = \frac{1}{x^2+y^2}\,{}_0^\infty\!\left[\frac{z+z'}{R}\right] = \frac{1}{r^2-z^2}\left(1-\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r(r+z)}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{z+z'}{R^3}\,dz' = {}_0^\infty\!\left[-\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{r};$$

und die Verschiebung ist gegeben durch die Gleichungen

$$u = B\frac{x}{r(z+r)}, \quad v = B\frac{y}{r(z+r)}, \quad w = \frac{B}{r}. \tag{24}$$

Diese Verschiebungen stellen die „einfachen Lösungen vom zweiten Typus“[1] dar. Das Ergebnis läßt sich ausdrücken in der Form

$$(u, v, w) = B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\log(z+r). \tag{25}$$

Eine Singularität der hier beschriebenen Art könnten wir eine „Dilatationslinie“ und $B$ ihre „Stärke“ nennen. Ist $B$ negativ, so könnten wir die Singularität eine „Kompressionslinie“ nennen.

d) Eine Dilatationslinie kann beiderseits begrenzt und ihre Stärke veränderlich genommen werden. Liegen ihre Endpunkte im Ursprung und im Punkte $(0, 0, -k)$ und ist ihre Stärke dem Abstand vom Ursprung proportional, so haben wir

$$u = C'x\int_0^k \frac{z'\,dz'}{R^3}, \quad v = C'y\int_0^k \frac{z'\,dz'}{R^3}, \quad w = C'\int_0^k \frac{(z+z')z'\,dz'}{R^3}, \tag{26}$$

wo $C'$ eine Konstante. Nun haben wir

$$\int_0^k \frac{z'\,dz'}{R^3} = \int_0^k \left(\frac{z+z'}{R^3} - \frac{z}{R^3}\right)dz' = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} - \frac{z}{x^2+y^2}\left(\frac{z+k}{R_1} - \frac{z}{r}\right),$$

1) Boussinesq, *loc. cit.*

wo $R_1^2 = x^2 + y^2 + (z + k)^2$. Das Integral bleibt endlich, wenn $k$ unbegrenzt zunimmt, und wir erhalten

$$\int_0^\infty \frac{z' \, dz'}{R^3} = \frac{1}{r} - \frac{z}{r^2 - z^2}\left(1 - \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{z + r}.$$

Andererseits haben wir

$$\int_0^k \frac{(z + z')z'}{R^3} \, dz' = -\frac{k}{R_1} + \int_0^k \frac{dz'}{R} = -\frac{k}{R_1} + \log \frac{z + k + R_1}{z + r}.$$

Dieser Ausdruck strebt keinem Grenzwert zu, wenn $k$ unbegrenzt zunimmt. Es bezeichne $C'(U, V, W)$ die Verschiebung (26), und es bestehe außer der Dilatationslinie, die zu der Verschiebung $(U, V, W)$ Anlaß gibt, eine Kompressionslinie, deren Stärke demselben Gesetze folgt und die sich vom Punkte $(h, 0, 0)$ bis zum Punkte $(h, 0, -k)$ erstreckt. Zur Grenze übergehend lassen wir $h$ unbegrenzt abnehmen und $C'$ unbegrenzt zunehmen in der Weise, daß $C'h$ einen endlichen Grenzwert, etwa $C$, annimmt. Die Verschiebung ist durch die Gleichungen gegeben

$$u = C\frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = C\frac{\partial V}{\partial x}, \quad w = C\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{kx}{R_1^3} + \frac{x}{R_1(z + k + R_1)} - \frac{x}{r(z + r)};$$

dieser Ausdruck strebt, wenn $k$ unbegrenzt zunimmt, einer endlichen Grenze, nämlich $-x/r(z + r)$, zu. Die Verschiebung, die von einer derartigen halb-unendlichen Singularitäten-Doppellinie, wie wir sie hier beschrieben haben, herrührt, drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u = C\left(\frac{1}{z + r} - \frac{x^2}{r(z + r)^2}\right), \quad v = -C\frac{xy}{r(z + r)^2}, \quad w = -C\frac{x}{r(z + r)}, \tag{27}$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$(u, v, w) = -C\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)\{z \log(z + r) - r\}. \tag{28}$$

Entsprechend würden wir erhalten

$$(u, v, w) = -C\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)\{z \log(z + r) - r\}. \tag{29}$$

e) Statt einer linienhaften Verteilung von Dilatationszentren können wir auch eine linienhafte Verteilung von Rotationszentren ins Auge fassen. Aus dem Resultat von Beispiel b') würden wir erhalten

$$u = 0, \quad v = -D\int_0^\infty \frac{z + z'}{R^3} \, dz', \quad w = D\int_0^\infty \frac{y}{R^3} \, dz',$$

wo $D$ eine Konstante bedeutet und die Achsen der Rotationszentren der $x$-Achse parallel sind. Dies liefert

$$u = 0, \quad v = -\frac{D}{r}, \quad w = D\frac{y}{r(z + r)}. \tag{30}$$

Entsprechend würden wir erhalten

$$u = \frac{D}{r}, \quad v = 0, \quad w = -D \frac{x}{r(z+r)}, \tag{31}$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$(u, v, w) = D \left(\frac{\partial}{\partial z}, \quad 0, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right) \{\log (z+r)\}. \tag{32}$$

Andere Formeln derselben Art könnten wir erhalten, wenn wir die Singularitätenlinie in einer andern als der $z$-Richtung annähmen.

Der Leser wird bemerken, daß bei allen Beispielen dieses Paragraphen außer a) und b) die Verschiebungskomponenten harmonische Funktionen sind und die kubische Dilatation verschwindet. Die einzigen Verzerrungen, die vorkommen, sind Schubverzerrungen, und die Verschiebungen sind unabhängig von dem Verhältnis der elastischen Konstanten, $\lambda : \mu$.

## § 133. Lokale Störungen.

Die Fälle a) und a′) des vorigen Paragraphen zeigen an speziellen Beispielen, wie ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem, das an einem kleinen Teil eines Körpers angreift, Verzerrungen hervorruft, die in einer gewissen Entfernung von jenem Teil unbedeutend werden. Die Verschiebung, die von einer Kraftverteilung herrührt, welche für einen kleinen Raumteil eine endliche Resultante besitzt, ist dem Abstand umgekehrt proportional; diejenige, die von Kräften herrührt, welche für den kleinen Raumteil die Resultante null ergeben, ist dem Quadrat der Entfernung umgekehrt und der linearen Abmessung des Raumteilchens direkt proportional. Daraus können wir schließen, daß die Verzerrung, die von lokal angreifenden Kräften hervorgebracht wird, von der Resultante der Kräfte abhängt und von der Art der Verteilung der mit dieser Resultante statisch gleichwertigen Kräfte praktisch unabhängig ist. Der Einfluß der Art der Kräfteverteilung beschränkt sich praktisch auf ein verhältnismäßig kleines Stück des Körpers in der Nähe des Ortes, wo die Kräfte angreifen. Derartige lokale Wirkungen nennt Boussinesq „perturbations locales".[1])

Der Satz, daß die Art der Verteilung lokal angreifender Kräfte nur zu lokalen Störungen Anlaß gibt, schließt in sich das Saint-Venantsche „Prinzip von der elastischen Gleichwertigkeit statisch gleichbedeutender Lastensysteme", das bei Stab- und Plattenproblemen benutzt wird. In den hier in Betracht kommenden Fällen nehmen die lokalen Störungen mit wachsender Entfernung von der Belastungsstelle viel schneller ab als im Falle eines festen Körpers, dessen sämtliche Abmessungen groß sind im Vergleich zu denjenigen des der direkten Wirkung der Kräfte unterworfenen Teils. Als Beispiel nennen wir

1) Boussinesq, *loc. cit.*

den Fall einer sehr dünnen rechteckigen Platte, die längs der Kanten durch ein gleichförmiges Torsionsmoment beansprucht wird. Die lokalen Störungen nehmen mit der Entfernung vom Rande nach dem Gesetze einer Exponentialfunktion ab.[1])

## § 134. Zweiter Typus einfacher Lösungen.

Die Verschiebung drückt sich aus durch die in § 132, c) angegebenen Gleichungen, nämlich

$$u = B\frac{x}{r(z+r)}, \quad v = B\frac{y}{r(z+r)}, \quad w = \frac{B}{r} \tag{24'}$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$u = B\frac{\partial \log(z+r)}{\partial x}, \quad v = B\frac{\partial \log(z+r)}{\partial y}, \quad w = B\frac{\partial \log(z+r)}{\partial z}.$$

Es ist ohne weiteres zu verifizieren, daß diese Ausdrücke Lösungen der Gleichungen (1) darstellen in allen Punkten außer dem Ursprung und den auf der $z$-Achse liegenden Punkten, für die $z$ negativ ist. Dilatation ist nicht vorhanden, und die Spannungskomponenten sind gegeben durch die Gleichungen

$$X_x = 2\mu B\left\{\frac{y^2+z^2}{r^3(z+r)} - \frac{x^2}{r^2(z+r)^2}\right\}, \quad Y_z = -2\mu B\frac{y}{r^3},$$

$$Y_y = 2\mu B\left\{\frac{z^2+x^2}{r^3(z+r)} - \frac{y^2}{r^2(z+r)^2}\right\}, \quad Z_x = -2\mu B\frac{x}{r^3},$$

$$Z_z = -2\mu B\frac{z}{r^3}, \qquad X_y = -2\mu B\frac{xy(z+2r)}{r^3(z+r)^2}.$$

An der Oberfläche einer Halbkugel, für die $r$ konstant und $z$ positiv ist, ergeben sich danach die Spannungen

$$X_\nu = 2\mu B\frac{x}{r^2(z+r)}, \quad Y_\nu = 2\mu B\frac{y}{r^2(z+r)}, \quad Z_\nu = \frac{2\mu B}{r^2}, \tag{33}$$

wo die Normale $\nu$ nach dem Mittelpunkt gerichtet ist.

## § 135. Druck in einem Punkte auf einer ebenen Oberfläche.

Wir betrachten einen elastischen festen Körper, an dem in der Umgebung eines einzelnen Punktes der Oberfläche Kräfte angreifen. Wenn alle linearen Abmessungen des Körpers groß sind im Vergleich zu denjenigen des durch die Last beanspruchten Flächenstücks, so können wir den Körper als durch eine unendliche Ebene begrenzt ansehen.

Den Punkt, an dem die Last angreift, wählen wir als Ursprungspunkt und die Oberfläche des Körpers als $(x, y)$-Ebene; die positive Richtung der $z$-Achse sei diejenige, die ins Innere des Körpers hineinzeigt. Da der lokale Einfluß der im Ursprung angreifenden Kraft

1) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Part. II, p. 267 ff.

sehr groß ist, nehmen wir an, der Ursprung sei durch eine Halbkugel ausgeschlossen.

Die durch (15) ausgedrückte Verschiebung würde in dem Körper durch Spannungen über die ebene Oberfläche sich aufrecht erhalten lassen, die durch die Gleichungen gegeben sind

$$X_z = -\frac{2\mu^2}{\lambda+\mu} A \frac{x}{r^3},\ Y_z = -\frac{2\mu^2}{\lambda+\mu} A \frac{y}{r^3},\ Z_z = 0,$$

sowie durch Spannungen über die halbkugelförmige Begrenzung, die durch die Gleichungen (17) ausgedrückt sind. Die Resultante der letzteren über die Halbkugel ist eine Kraft in der positiven Richtung der $z$-Achse vom Betrage

$$4\pi\mu A(\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu).$$

Die durch (24) ausgedrückte Verschiebung könnten wir in dem Körper erhalten durch Spannungen über die ebene Oberfläche, die durch die Gleichungen gegeben sind

$$X_z = -2\mu B \frac{x}{r^3},\ Y_z = -2\mu B\frac{y}{r^3},\ Z_z = 0, \tag{34}$$

sowie durch Spannungen über die halbkugelförmige Begrenzung, die sich durch die Gleichungen (33) ausdrücken. Die Resultante der letzteren ist eine Kraft in der positiven Richtung der $z$-Achse vom Betrage $4\pi\mu B$.

Setzen wir $B = -A\,\mu/(\lambda+\mu)$, so wird der Verschiebungszustand, der durch die Summe der Verschiebungen (15) und (24) ausgedrückt wird, durch Kräfte erhalten werden, die nur an der Halbkugeloberfläche angreifen; ist die Resultante dieser Kräfte gleich $P$, so ist die Verschiebung gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{xz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{x}{r(z+r)},\\ v &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{yz}{r^3} - \frac{P}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{y}{r(z+r)},\\ w &= \frac{P}{4\pi\mu}\frac{z^2}{r^3} + \frac{P(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{1}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

In allen Punkten, die nicht allzu nahe beim Ursprung liegen, drücken diese Gleichungen die Verschiebung aus, die von einem im Ursprung wirkenden Druck von der Stärke $P$ herrühren.

Für die Diskussion dieser Lösung ist es bequem, die ebene Oberfläche als horizontal zu betrachten und anzunehmen, daß der Körper im Ursprungspunkt ein Gewicht $P$ trägt. Wir bemerken, daß auf eine horizontale Ebene die Spannungen wirken

$$X_z = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^2x}{r^5},\ Y_z = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^2y}{r^5},\ Z_z = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{r^5};$$

mithin ist die resultierende Spannung pro Flächeneinheit, die die Ebene in irgend einem Punkte von oben erfährt, eine Kraft, die in die Richtung des vom Ursprung aus gezogenen Radiusvektors fällt und den Betrag $\frac{3}{2}(P/\pi r^2)\cos^2\theta$ hat, wo $\theta$ der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der abwärts gerichteten Vertikalen bildet. Die Spannungen auf horizontale Ebenen sind in allen Punkten einer Kugel, die die begrenzende Ebene im Ursprungspunkt berührt, einander gleich und zwar gleich $\frac{3}{2}P/\pi D^2$, wo $D$ der Durchmesser der Kugel. Diese Ausdrücke für die Spannungen auf horizontale Ebenen sind von den elastischen Konstanten unabhängig.

Die Verschiebung läßt sich in eine horizontale Komponente und eine vertikale Komponente auflösen. Erstere ist gleich

$$\frac{P\sin\theta}{4\pi\mu r}\left[\cos\theta - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{1}{(1+\cos\theta)}\right];$$

sie ist der Wirkungslinie des Gewichtes zugewendet oder von ihr weggewendet, je nachdem der Radiusvektor außerhalb oder innerhalb des Kegels liegt, der durch die Gleichung gegeben ist

$$(\lambda+\mu)\cos\theta\,(1+\cos\theta) = \mu.$$

Ist die Poissonsche Konstante des Materials gleich $\frac{1}{4}$, so beträgt der Winkel des Kegels ungefähr $68^0\,32'$. In jedem Punkt der begrenzenden Ebene ist die horizontale Verschiebung auf die Achse zu gerichtet und vom Betrage $\frac{1}{4}P/\pi r(\lambda+\mu)$. Die vertikale Verschiebung in einem beliebigen Punkt ist gleich

$$\frac{P}{4\pi\mu r}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2\theta\right);$$

sie ist stets abwärts gerichtet. In einem Punkte der begrenzenden Ebene ist ihre Größe gleich $\frac{1}{4}P(\lambda+2\mu)/\pi r\mu(\lambda+\mu)$. Die anfangs ebene Oberfläche deformiert sich zu einer krummen Fläche. Die Teile, welche dem Ursprung nicht zu nahe liegen, kommen auf der Fläche zu liegen, die durch die Umdrehung der Hyperbel

$$xz = \frac{1}{4}P(\lambda+2\mu)/\pi\mu(\lambda+\mu)$$

um die $z$-Achse entsteht.

## § 136. Verteilter Druck.

Statt den Druck in einem Punkt angreifen zu lassen, können wir ihn über ein Stück der begrenzenden Ebene verteilt annehmen. Es sei $(x', y', 0)$ irgend ein Punkt dieser Ebene, $P'$ der Druck in diesem Punkte pro Flächeneinheit, $r$ der Abstand eines Punktes $(x, y, z)$ im Innern des Körpers vom Punkte $(x', y', 0)$. Es bezeichne $\psi$ das *direkte Potential* einer Flächenbelegung $P'$ und $\chi$ das *logarithmische Potential* derselben Verteilung, sodaß

$$\psi = \iint P' r\,dx'\,dy',\quad \chi = \iint P'\log(z+r)\,dx'\,dy', \tag{36}$$

wo die Integrationen über das dem Druck unterworfene Flächenstück erstreckt sind. Wir bemerken, daß

$$\nabla^2 \chi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 2\frac{\partial \chi}{\partial z} = 2\iint \frac{P'}{r}\, dx'dy' = 2\Phi, \tag{37}$$

wo $\Phi$ das gewöhnliche oder *inverse Potential* der Verteilung $P'$. Wir bemerken überdies, daß $\frac{\partial \psi}{\partial z} = z\Phi$

Die Verschiebung, die an irgend einer Stelle des Körpers von der Druckverteilung $P'$ hervorgebracht wird, drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial z},$$

$$v = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial z},$$

$$w = -\frac{1}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\lambda+2\mu}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\nabla^2\psi.$$

Diese Ausdrücke lassen sich vereinfachen durch Einführung einer neuen Funktion $\Omega$, die bestimmt ist durch die Gleichung

$$\Omega = -\frac{z\Phi}{4\pi\mu} - \frac{\chi}{4\pi(\lambda+\mu)}; \tag{38}$$

wir erhalten dann für die Verschiebung die Ausdrücke[1])

$$u = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\lambda+2\mu}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\Phi. \tag{39}$$

Wir bemerken, daß diese Ausdrücke für alle Werte von $(x, y, z)$ endlich und bestimmt sind, vorausgesetzt, daß $z$ positiv ist; ferner, daß sie endlichen Grenzwerten zustreben, wenn der Punkt $(x, y, z)$ einem Punkte $(x', y', 0)$ sich nähert. Sie stellen die Verschiebung in allen Punkten des von der unendlichen Ebene $z = 0$ begrenzten Körpers dar, wenn auf ein beliebiges Stück der Oberfläche Druckkräfte wirken.[2]) Die Normalkomponente $w$ der Verschiebung in einem beliebigen Punkt der Oberfläche des Körpers ist gleich $(\lambda + 2\mu)\Phi/4\pi\mu(\lambda+\mu)$.

## § 137. Druck zwischen zwei sich berührenden Körpern. Geometrische Vorbetrachtung.

Es mögen zwei Körper gegeneinander gepreßt werden, so daß der resultierende Druck zwischen ihnen gleich $P$ ist. Die Teile der Körper in der Nähe der Berührungspunkte werden dabei so zusammengedrückt werden, daß über einen kleinen Bereich der beiden Oberflächen Berührung stattfindet. Den gemeinsamen Bereich werden

1) Diese Formeln stammen von Hertz, *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 92 (1881).
2) Eine Anzahl spezieller Fälle ist durchgeführt von Boussinesq, *loc. cit.*

wir die *Druckfläche* nennen und die Kurve, die ihn begrenzt, die *Druckfigur*. Wir wollen die Druckfigur und die Verteilung des Drucks über die Druckfläche bestimmen.[1])

Im spannungslosen Zustand bestimmt sich die Gestalt der beiden Körper in der Nähe der Berührungsstellen mit hinreichender Annäherung durch Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 H_1 xy, \\ z_2 &= A_2 x^2 + B_2 y_2 + 2 H_2 xy, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

wo die $z_1$- und die $z_2$-Achse bezüglich mit den ins Innere der Körper gerichteten Normalen zusammenfallen. Im ungespannten Zustand berühren sich die Körper im Ursprung des $(x, y)$-Systems, sie haben dort eine gemeinsame Tangentialebene, und die Entfernung zwischen zweien ihrer Punkte in der Richtung der gemeinsamen Normalen drückt sich mit hinreichender Annäherung durch die quadratische Form $(A_1 + A_2)x^2 + (B_1 + B_2)y^2 + 2(H_1 + H_2)xy$ aus. Dieser Ausdruck muß positiv sein, wie auch die $x$- und die $y$-Achse gewählt sein mögen, und wir können diese Achsen so wählen, daß $H_1 + H_2$ verschwindet. Dann müssen $A_1 + A_2$ und $B_1 + B_2$ positiv sein. Wir können daher schreiben

$$A_1 + A_2 = A, \quad B_1 + B_2 = B, \quad H_1 = -H_2, \qquad (41)$$

wo $A$ und $B$ positiv.

Sind $R_1$, $R_1'$ die Hauptkrümmungsradien im Berührungspunkte für den Körper (1) und $R_2$, $R_2'$ diejenigen für den Körper (2) und haben dieselben positives Vorzeichen, wenn der entsprechende Krümmungsmittelpunkt innerhalb des betreffenden Körpers liegt, so haben wir

$$2(A + B) = 1/R_1 + 1/R_1' + 1/R_2 + 1/R_2'. \qquad (42)$$

Der Winkel $(\omega)$ zwischen denjenigen Normalebenen der beiden Flächen, zu denen die Krümmungsradien $R_1$, $R_2$ gehören, ist gegeben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 4(A - B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 \\ + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\omega. \end{aligned} \qquad (43)$$

Der Winkel $(\omega')$ zwischen der $(x, z)$-Ebene (die so gewählt ist, daß $H_2 = -H_1$) und derjenigen Normalebene, in welcher der Krümmungsradius gleich $R_1$ ist, ist durch die Gleichung gegeben

$$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\sin 2(\omega - \omega') = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\sin 2\omega'. \qquad (44)$$

---

1) Die Theorie verdankt man Hertz, *loc. cit.*

Führen wir den Winkel $\tau$ ein durch die Gleichung

$$\cos\tau = \frac{B-A}{B+A}, \tag{45}$$

sodaß

$$2A\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}\tau = 2B\sec^2\tfrac{1}{2}\tau = 1/R_1 + 1/R_1' + 1/R_2 + 1/R_2', \tag{46}$$

so hängt die Gestalt der „relativen Indikatrix“, $Ax^2 + By^2 = \text{const.}$, nur vom Winkel $\tau$ ab.

Wenn die Körper gegeneinander gepreßt werden, so wird in beiden eine Verschiebung eintreten. Wir setzen die Verschiebung des Körpers (1) gleich $(u_1, v_1, w_1)$ bezüglich der Achsen $(x, y, z_1)$ und die des Körpers (2) gleich $(u_2, v_2, w_2)$ bezüglich der Achsen $(x, y, z_2)$. Da die Teile innerhalb der Druckfläche nach der Kompression sich berühren, so müssen wir für alle Punkte dieses Gebiets haben

$$z_1 + w_1 = -(z_2 + w_2) + \alpha,$$

wo $\alpha$ der Wert von $w_1 + w_2$ im Ursprungspunkt.[1]) Mithin gilt innerhalb der Druckfläche die Beziehung

$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax^2 - By^2, \tag{47}$$

außerhalb der Druckfläche müssen wir, wenn die Flächen voneinander getrennt sein sollen, haben

$$w_1 + w_2 > \alpha - Ax^2 - By^2. \tag{48}$$

## § 138. Lösung des Problems des Drucks zwischen zwei sich berührenden Körpern.

Wir bezeichnen mit $\lambda_1$, $\mu_1$ die elastischen Konstanten des Körpers (1) und mit $\lambda_2$, $\mu_2$ die des Körpers (2). Der Druck $P$ zwischen den Körpern ist die Resultante eines über die Druckfläche verteilten Drucks $P'$ pro Flächeneinheit. Wir können nun für den Körper (1)

1) Wenn die Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ des Körpers (1) und die Punkte $(x_2, y_2, z_2)$ des Körpers (2) zur Berührung gelangen, so müssen wir haben

$$x_1 + u_1 = x_2 + u_2,\quad y_1 + v_1 = y_2 + v_2,\quad z_1 + w_1 = -(z_2 + w_2) + \alpha;$$

in Gleichung (47) dagegen identifizieren wir $(x_1, y_1)$ mit $(x_2, y_2)$. Ohne diese Identifizierung würden wir, wie sich zeigen läßt, haben

$$w_1 + w_2 = \alpha - Ax_1^2 - By_1^2 - 2[A_2 x_1(u_1 - u_2) + B_2 y_1(v_1 - v_2) + H_2\{x_1(v_1 - v_2) + y_1(u_1 - u_2)\}].$$

Es ergibt sich schließlich für $w_1 + w_2$ ein Ausdruck von der Ordnung $Aa^2$, wo $a$ der größte Durchmesser der Druckfläche, und $u_1, u_2 \ldots$ werden in $a$ von gleicher Ordnung wie $w_1 + w_2$; somit sind die vernachlässigten Glieder von höherer Größenordnung als die beibehaltenen Sind die Körper von gleichem Material, so haben wir $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; in diesem Falle liefert also die Identifizierung von $(x_1, y_1)$ mit $(x_2, y_2)$ ein exaktes Resultat.

in derselben Weise, wie wir in § 136 die Funktionen $\Phi$, $\chi$, $\Omega$ bildeten, die Funktionen $\Phi_1$, $\chi_1$, $\Omega_1$ und die entsprechenden Funktionen für den Körper (2) bilden. Die Werte von $w_1$ und $w_2$ auf der gemeinsamen Fläche lassen sich dann schreiben

$$w_1 = \vartheta_1 \Phi_0, \quad w_2 = \vartheta_2 \Phi_0, \tag{49}$$

wo

$$\vartheta_1 = (\lambda_1 + 2\mu_1)/4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1), \; \vartheta_2 = (\lambda_2 + 2\mu_2)/4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2) \tag{50}$$

und $\Phi_0$ der Wert von $\Phi_1$ oder $\Phi_2$ an der Oberfläche, d. h. der Wert des konvergenten Integrals $\iint P' r^{-1} dx' dy'$ in einem Punkte der Oberfläche. Der Wert von $\Phi_0$ in irgend einem Punkte der Druckfläche bestimmt sich, in der Größe $\alpha$ und den Koordinaten des Punktes ausgedrückt, durch die Gleichung

$$\Phi_0 = \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} (\alpha - Ax^2 - By^2). \tag{51}$$

Dies Resultat legt nahe, welches unser nächster Schritt zur Lösung sein wird. Die mit $\Phi_1$ und $\Phi_2$ bezeichneten Funktionen bedeuten, auf der einen oder andern Seite der Ebene $z = 0$, das Potential einer Oberflächenverteilung von der Dichte $P'$ auf der Druckfläche, und in einem Punkte dieses Bereichs ist das Potential eine quadratische Funktion der Koordinaten des Punktes. Wir erinnern uns nun, daß das Potential eines homogenen Ellipsoides in einem inneren Punkt eine quadratische Funktion der Koordinaten des Punktes ist. Wir suchen daher den Bedingungen des Problems durch die Annahme zu genügen, daß die Druckfläche mit einer elliptischen Fläche, die als stark abgeflachtes Ellipsoid zu betrachten ist, sich deckt und daß der Druck $P'$ durch einen Grenzprozeß erhalten werden kann, bei dem die gesamte Masse des Ellipsoids endlich bleibt und eine der Hauptachsen unbegrenzt abnimmt. Im Falle eines Ellipsoids von der Dichte $\varrho$, dessen Gleichung, auf die Hauptachsen bezogen, lautet

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1,$$

würde die Masse gleich $\frac{4}{3}\pi\varrho abc$ sein; derjenige Teil dieser Masse, der in einem über dem Flächenelement $dx'dy'$ sich erhebenden Zylinder eingeschlossen wäre, würde sein

$$2\varrho\, dx'dy'c\sqrt{1 - x'^2/a^2 - y'^2/b^2},$$

und das Potential in irgendeinem äußeren Punkte würde sein

$$\pi\varrho abc \int_{\nu}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi} - \frac{z^2}{c^2+\psi}\right) \frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $\nu$ die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2/(a^2+\nu) + y^2/(b^2+\nu) + z^2/(c^2+\nu) = 1$$

In einem inneren Punkte würden wir für das Potential dieselbe Form haben, nur daß 0 für $\nu$ zu schreiben wäre. Nunmehr haben wir zur Grenze überzugehen, indem wir $c$ unbegrenzt abnehmen und $\varrho$ unbegrenzt zunehmen lassen, während $a$ und $b$ endlich bleiben, und zwar so, daß

1) $\frac{4}{3}\pi(\varrho c)\,ab = P$,

2) $2(\varrho c)\sqrt{1 - x'^2/a^2 - y'^2/b^2} = P'$,

3) $\Phi_0 = \pi ab(\varrho c)\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}}$,

wobei die dritte Bedingung in allen Punkten innerhalb der Druckfläche erfüllt sein muß. Sonach haben wir

$$P' = \frac{3P}{2\pi ab}\sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \tag{52}$$

und

$$\frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}(\alpha - Ax^2 - By^2)$$
$$= \tfrac{3}{4}P\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{53}$$

Die Gleichung (52) bestimmt das Gesetz der Verteilung des Druckes $P'$ über die Druckfläche, wenn die Dimensionen dieses Bereichs bekannt sind. Die Gleichung (53) muß für alle Werte von $x$ und $y$ innerhalb dieses Bereichs gelten und ist daher gleichwertig mit drei Gleichungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{3}{4}P(\vartheta_1 + \vartheta_2)\int\limits_0^\infty \frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}},\\
A &= \tfrac{3}{4}P(\vartheta_1 + \vartheta_2)\int\limits_0^\infty \frac{d\psi}{(a^2+\psi)^{\frac{3}{2}}\{(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}},\\
B &= \tfrac{3}{4}P(\vartheta_1 + \vartheta_2)\int\limits_0^\infty \frac{d\psi}{(b^2+\psi)^{\frac{3}{2}}\{(a^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen bestimmen $a$ und $b$, und die erste bestimmt $\alpha$, wenn $a$ und $b$ bekannt sind. Drücken wir die Resultate mit Hilfe der Exzentrizität ($e$) der Ellipse aus, so wird $e$ sich durch die Gleichung

$$B\int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}\{\zeta(1-e^2+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}} = A\int\limits_0^\infty \frac{d\zeta}{(1-e^2+\zeta)^{\frac{3}{2}}\{\zeta(1+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}} \tag{55}$$

bestimmen, $a$ wird durch die Gleichung

$$A a^3 = \tfrac{3}{4} P(\vartheta_1 + \vartheta_2) \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}} \{\zeta(1-e^2+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}} \tag{56}$$

und $\alpha$ durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{3P}{4a} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\{\zeta(1+\zeta)(1-e^2+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}} \tag{57}$$

gegeben sein. Wir bemerken, daß $e$ nur von dem Verhältnis $A:B$ abhängt. Hertz hat die Werte von $b/a$, $=(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, in ihrer Abhängigkeit vom Winkel $\tau$, dessen Kosinus gleich $(B-A)/(B+A)$ ist, in einer Tabelle dargestellt. Er fand folgende Resultate:

| $\tau =$ | 90° | 80° | 70° | 60° | 50° | 40° | 30° | 20° | 10° | 0° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b/a =$ | 1 | 0.79 | 0.62 | 0.47 | 0.36 | 0.26 | 0.18 | 0.10 | 0.05 | 0 |

In Punkten der Ebene $z=0$, die außerhalb der Druckfläche liegen, ist $\Phi_0$ gleich dem Wert des Potentials der Verteilung $P'$ über die Druckfläche in diesen Punkten. Aus (49) folgt, daß wir in Punkten der Oberfläche der Körper, die außerhalb der Druckfläche, aber nicht weit davon entfernt liegen, mit hinreichender Annäherung schreiben können

$$w_1 + w_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2) \frac{3P}{4} \int_\nu^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi}\right) \frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}},$$

wo $\nu$ die positive Wurzel der Gleichung

$$x^2/(a^2+\nu) + y^2/(b^2+\nu) = 1. \tag{58}$$

Daher haben wir

$$(w_1 + w_2) - (\alpha - Ax^2 - By^2)$$
$$= -(\vartheta_1 + \vartheta_2) \frac{3P}{4} \int_0^\nu \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi}\right) \frac{d\psi}{\{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{59}$$

Liegt nun $\psi$ zwischen 0 und $\nu$, so befindet sich der auf der Ellipse (58) gelegene Punkt $(x, y)$ außerhalb der Ellipse $x^2/(a^2+\psi) + y^2/(b^2+\psi) = 1$, und der Ausdruck rechter Hand in Gleichung (59) ist demnach positiv. Die Ungleichung (48) ist daher befriedigt.

Die Annahme, daß die Druckfläche von einer Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ begrenzt wird, wo $a$ und $b$ sich durch die zweite und dritte der Gleichungen (54) bestimmen, und daß der Druck $P'$ über diese Fläche sich durch Formel (52) ausdrückt, genügt allen Bedingungen des Problems. Ist $P'$ bekannt, so lassen sich die Funktionen $\Phi$, $\chi$, $\Omega$

für beide Körper berechnen, und daraus können wir die Verschiebung und Spannungsverteilung in jedem Körper bestimmen.

Hertz[1]) hat die Spannungstrajektorien in der $(x, z)$-Ebene für den Fall gezeichnet, daß $\lambda = 2\mu$ (Poissonsche Konstante $= \frac{1}{3}$). In der Nähe des Mittelpunktes der Druckfläche sind die Hauptspannungsebenen nahezu parallel mit den Koordinatenebenen, und beide Spannungen bedeuten Druck. Indem wir vom Mittelpunkt der Druckfläche die $x$-Achse entlang gehen, nimmt die der Oberfläche annähernd parallele Spannungskomponente bis zu null ab, geht in Zug über und wächst an bis zu einem Maximalwert nahe dem Rande der Druckfläche; hierauf nimmt sie langsam ab, ohne nochmals das Vorzeichen zu wechseln. Die andere Komponente erweist sich als Druck, welcher stetig abnimmt, wenn wir längs einer ungefähr vom Mittelpunkt der Druckfläche auslaufenden Spannungstrajektorie ins Innere des Körpers eindringen. Der Spannungszustand wird veranschaulicht durch Fig. 15.[2]) $O$ bedeutet den Mittelpunkt der Druckfläche, $AA'$ die Spur derselben in der $(x, z)$-Ebene; die in einem Punkt $P$ endigenden Linien sind überall Drucklinien, solche, die in einem Punkt $T$ endigen, sind überall Zuglinien; die in einem Punkt $R$ endigenden Linien sind Spannungstrajektorien, auf denen im mittleren (punktierten) Teil Druck, in den übrigen Teilen Zug herrscht.

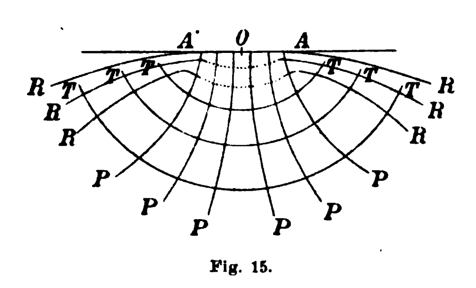


Fig. 15.

Hertz stellte eine Reihe von Experimenten an, um die Richtigkeit der Theorie zu prüfen. Die Folgerung, daß die linearen Abmessungen der Druckfläche der Kubikwurzel aus dem Druck zwischen den Körpern proportional sind, bestätigte sich sehr genau; die Abhängigkeit der Form der Druckfläche von der Form der relativen Indikatrix wurde gleichfalls in Fällen, wo letztere mit wünschenswerter Genauigkeit sich ermitteln ließ, bestätigt.

## § 139. Hertz' Theorie des Stoßes.

Die im letzten Paragraphen erhaltenen Resultate sind auf das Problem des Stoßes zweier Körper angewendet worden.[3]) Die gewöhnliche, von Newton begründete Theorie des Stoßes teilt die Körper in zwei Klassen ein, in „vollkommen elastische" und „unvollkommen elastische". Bei ersteren ist mit dem Stoß ein Verlust an kinetischer Energie nicht verbunden. Bei letzteren wird durch den Stoß Energie

1) *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes*, 1882 = *Ges. Werke*, Bd. 1, p. 174.

2) Vgl. die Bemerkung D am Ende des Buches.

3) Hertz, *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 92 (1881).



zerstreut. In Wirklichkeit sind viele Körper nahezu vollkommen elastisch im Newtonschen Sinne. Die Hertzsche Theorie des Stoßes zieht die Energiezerstreuung nicht in Betracht; sie geht davon aus, daß die Kompression an der Berührungsstelle allmählich entsteht und dann durch Umkehrung des Prozesses, der sie hervorbrachte, völlig wieder verschwindet. Die lokale Pressung wird also als statische Erscheinung angesehen. Eine derartige Theorie kann nur richtig sein, wenn die Dauer des Stoßes ein bedeutendes Vielfaches der Periode der langsamsten freien Schwingung beider Körper, die mit Kompression an der betreffenden Stelle verbunden ist, beträgt. Für die Stoßdauer, die dieser Anforderung genügt, wenn die Körper mit mäßiger Geschwindigkeit aufeinander stoßen, ist eine Formel von Hertz aufgestellt worden, und das Resultat ist experimentell bestätigt worden.[1])

In jedem Augenblick während des Stoßvorganges ist die Größe $\alpha$ die relative Verschiebung der Massenmittelpunkte der beiden Körper, gemessen von ihrer relativen Lage zu Beginn des Stoßes aus und projiziert auf die Richtung der gemeinsamen Normale. Der Druck $P$ zwischen den beiden Körpern ist gleich der Abnahme ihrer Bewegungsgröße in der Zeiteinheit. Wir haben daher die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \frac{m_2 \dot{\alpha}}{m_1 + m_2}\right) = - P, \tag{60}$$

wo $\dot{\alpha}$ für $d\alpha/dt$ steht und $m_1$, $m_2$ die Massen der Körper. Nun ist $P$ eine Funktion von $t$, so daß die Halbachsen $a$ und $b$ der Druckfigur gleichfalls Funktionen von $t$ sind, die sich mittels der zweiten und dritten der Gleichungen (54) in $P$ ausdrücken lassen; tatsächlich ist $a$ sowohl wie $b$ mit $P^{\frac{1}{3}}$ proportional. Gleichung (57) zeigt, daß $\alpha$ mit $P^{\frac{2}{3}}$ oder $P$ mit $\alpha^{\frac{3}{2}}$ proportional ist; wir schreiben

$$P = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}, \tag{61}$$

wo

$$(\tfrac{3}{4})^2 k_2^2 A(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 \left[\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\{\zeta(1+\zeta)(1-e^2+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}}\right]^3$$
$$= \int_0^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}}\{\zeta(1-e^2+\zeta)\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{62}$$

Gleichung (60) läßt sich nun so schreiben:

$$\ddot{\alpha} = - k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}, \tag{63}$$

1) Schneebeli, *Arch. des sci. phys., Genf,* t. 15 (1885). Untersuchungen über die Dauer des Stoßes bei großen Geschwindigkeiten wurden angestellt von Tait, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.*, vols. 26, 27 (1890, 1892).

wo $k_1 = (m_1 + m_2)/m_1 m_2$. Diese Gleichung läßt sich in der Form integrieren

$$\tfrac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - v^2) = -\tfrac{2}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}, \qquad (64)$$

wo $v$ der Anfangswert von $\dot{\alpha}$, d. h. die Annäherungsgeschwindigkeit der Körper vor dem Stoß. Der Wert von $\alpha$ im Augenblick der stärksten Kompression ist

$$\left(\frac{5}{k_1 k_2}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{4}{5}}; \qquad (65)$$

bezeichnen wir diese Größe mit $\alpha_1$, so ist die Stoßdauer gleich

$$2 \int^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{[v^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}]^{\frac{1}{2}}},$$

d. h. gleich

$$2 \frac{\alpha_1}{v} \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{4}{5}\sqrt{\pi}\, \frac{\alpha_1}{v} \frac{\Gamma(\frac{2}{5})}{\Gamma(\frac{9}{10})} = (2{,}9432\ldots) \frac{\alpha_1}{v}.$$

Wir können $\alpha_1$ durch Form und Masse der beiden Körper und die Geschwindigkeit, mit der Kompressionswellen sich in ihnen fortpflanzen, ausdrücken; diese Geschwindigkeit sei $V_1$ bezw. $V_2$;[1]) die Dichte der Körper sei $\varrho_1$ bezw. $\varrho_2$, der Wert der Poissonschen Konstanten $\sigma_1$ bezw. $\sigma_2$; dann ist

$$\vartheta_1 = \frac{(1-\sigma_1)^2}{\pi V_1{}^2 \varrho_1 (1 - 2\sigma_1)}, \quad \vartheta_2 = \frac{(1-\sigma_2)^2}{\pi V_2{}^2 \varrho_2 (1 - 2\sigma_2)}, \qquad (66)$$

sodaß

$$\alpha_1 = \left[\frac{5 m_1 m_2 v^2}{4(m_1 + m_2)} \frac{3\sqrt{A}}{4\pi} \left\{\frac{(1-\sigma_1)^2}{V_1{}^2 \varrho_1 (1 - 2\sigma_1)} + \frac{(1-\sigma_2)^2}{V_2{}^2 \varrho_2 (1 - 2\sigma_2)}\right\} I\right]^{\frac{2}{5}}, \qquad (67)$$

wo

$$I^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^{\frac{3}{2}} \{\zeta(1 - e^2 + \zeta)\}^{\frac{1}{2}}} = \left[\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\{\zeta(1+\zeta)(1 - e^2 + \zeta)\}^{\frac{1}{2}}}\right]^3. \qquad (68)$$

Es zeigt sich, daß die Stoßdauer der fünften Wurzel aus der relativen Annäherungsgeschwindigkeit vor dem Stoß umgekehrt proportional ist. Die Größenordnung der Periode der langsamsten freien Schwingung, bei der Kompression auftreten würde, ist gegeben durch $1/A_1 V_1$; die Stoßdauer steht also zu dieser Periode in einem Verhältnis von der Größenordnung $(V_1/v)^{\frac{1}{5}}$.

---

1) Es ist $V_1{}^2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)/\varrho_1$ und $V_2{}^2 = (\lambda_2 + 2\mu_2)/\varrho_2$.

## § 140. Stoß zweier Kugeln.

Sind die Körper Kugeln vom Radius $r_1$ bezw. $r_2$, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} &A = B = \tfrac{1}{2}(1/r_1 + 1/r_2), \quad e = 0, \quad a = b, \\ &a^3 = \frac{3\pi}{4}\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)P, \\ &\alpha = \frac{3\pi}{4a}(\vartheta_1 + \vartheta_2)P; \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

hieraus erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &k_2 = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \quad a = \{\alpha(r_1 r_2)/(r_1 + r_2)\}^{\frac{1}{2}}, \\ &\alpha_1 = \left[\frac{15\pi v^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) m_1 m_2}{16(m_1 + m_2)}\right]^{\frac{2}{5}} \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^{\frac{1}{5}}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Die Stoßdauer und der Radius der (kreisförmigen) Druckfigur sind somit bestimmt.

In dem besonderen Fall zweier gleicher Kugeln aus gleichem Material beträgt die Stoßdauer

$$(2{,}9432\ldots)\left\{\frac{25\pi^2}{8}\frac{(1-\sigma)^4}{(1-2\sigma)^2}\right\}^{\frac{1}{5}} \frac{r}{v^{\frac{1}{5}} V^{\frac{4}{5}}}, \tag{71}$$

wo $r$ der Radius der Kugeln, $\sigma$ die Poissonsche Konstante des Materials und $V$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kompressionswellen. Der Radius der zur Berührung kommenden kreisförmigen Fleckchen ist gleich

$$r\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{2}{5}}\left[\frac{5\pi}{16}\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}\right]^{\frac{1}{5}}. \tag{72}$$

Diese Resultate sind experimentell bestätigt worden.[1])

## § 141. Die aus Verzerrungskernen entspringende Deformation, bezogen auf Polarkoordinaten.

Wir können Lösungen der Gleichungen (1) zu bestimmen suchen, bei denen die Verschiebung umgekehrt proportional dem Radiusvektor $r$ ist. Die Verschiebung muß den Gleichungen (49), § 97, genügen. Nehmen wir $u_r$ und $u_\theta$ mit $\cos n\Phi$ und $u_\Phi$ mit $\sin n\Phi$ proportional an, so wird, wie sich zeigen läßt[2]),

$$\Delta = \frac{\cos n\Phi}{r^2}\left\{A(n + \cos\theta)\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2} + B(n - \cos\theta)\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right\},$$

$$2\,\varpi_r = \frac{\sin n\Phi}{r^2}\left\{C\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2} - D\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right\},$$

$$u_r = \frac{\cos n\Phi}{r}\left\{-\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{r^2\Delta}{\cos n\Phi} + C\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2} + D\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right\},$$

---

1) Schneebeli, *Rep. d. Phys.*, Bd. 22 (1886), und Hamburger, *Tageblatt d. Nat.-Vers. in Wiesbaden*, 1887.

2) J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 32 (1900), p. 23.

wo $A$, $B$, $C$, $D$ willkürliche Konstanten bedeuten; sodann läßt sich zeigen, daß

$$u_\theta = \frac{\cos n\Phi}{r\sin\theta}\left\{-\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r^2\Delta}{\cos n\Phi}\right)+\cos\theta\left(C\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2}+D\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,G\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2}+H\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right\},$$

$$u_\Phi = \frac{\sin n\Phi}{r\sin\theta}\left\{n\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\frac{r^2\Delta}{\cos n\Phi}-\cos\theta\left(C\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2}-D\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\,G\,\mathrm{tg}^n\frac{\theta}{2}+H\,\mathrm{cotg}^n\frac{\theta}{2}\right\},$$

wo $G$ und $H$ willkürliche Konstanten. In den Fällen, wo $n=0$ oder $n=1$ ist, erfordern einzelne Lösungen eine besondere Untersuchung. Diese Fälle enthalten den ersten Typus einfacher Lösungen für eine in beliebiger Richtung angreifende Kraft, den zweiten Typus einfacher Lösungen und die Lösungen, auf die wir in § 132, Bsp. d) und e), geführt wurden. Nachstehend geben wir für eine Reihe von Fällen die Ausdrücke für die Verschiebungen und die Spannungskomponenten.

$\alpha$) Der erste Typus einfacher Lösungen, entsprechend einer zur $z$-Achse parallelen Kraft $F$, drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u_r = \frac{F}{4\pi\mu}\frac{\cos\theta}{r},\qquad u_\theta = -\frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{F}{4\pi\mu}\frac{\sin\theta}{r},\qquad u_\Phi = 0;$$

die Spannungskomponenten sind gegeben durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2},\quad \widehat{\theta\theta}=\widehat{\Phi\Phi}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\widehat{\theta\Phi}=\widehat{\Phi r}=0,$$

$$\widehat{r\theta}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}.$$

Die Meridianebenen ($\Phi=$ const.) sind Hauptspannungsebenen; die in einer Meridianebene verlaufenden Spannungstrajektorien bilden in einem beliebigen Punkte mit dem Radiusvektor Winkel ($\psi$), die sich durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\,2\psi = -\{2\mu/(3\lambda+5\mu)\}\,\mathrm{tg}\,\theta$$

bestimmen. Michell hat diese Linien für den Fall, daß $\lambda=\mu$, gezeichnet, das Resultat ist in

Kraft

Fig. 16.

Fig. 16 dargestellt, wo der markierte Punkt in der Mitte den Angriffspunkt der Kraft bedeutet.

β) Wenn die Angriffslinie der Kraft $F'$ zur $x$-Achse parallel ist, so drückt sich die Verschiebung aus durch die Gleichungen

$$u_r = \frac{F'}{4\pi\mu}\frac{\sin\theta\cos\Phi}{r}, \quad u_\theta = \frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{F'}{4\pi\mu}\frac{\cos\theta\cos\Phi}{r},$$

$$u_\Phi = -\frac{\lambda+3\mu}{2(\lambda+2\mu)}\frac{F'}{4\pi\mu}\frac{\sin\Phi}{r};$$

die Spannungskomponenten sind gegeben durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F'}{4\pi}\frac{\sin\theta\cos\Phi}{r^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = \widehat{\Phi\Phi} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F'}{4\pi}\frac{\sin\theta\cos\Phi}{r^2},$$

$$\widehat{\theta\Phi} = 0, \quad \widehat{\Phi r} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F'}{4\pi}\frac{\sin\Phi}{r^2}, \quad \widehat{r\theta} = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F'}{4\pi}\frac{\cos\theta\cos\Phi}{r^2}.$$

γ) Der zweite Typus einfacher Lösungen ist ausgedrückt durch die Gleichungen

$$u_r = \frac{B}{r}, \quad u_\theta = -\frac{B}{r}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \quad u_\Phi = 0;$$

die Spannungskomponenten lauten

$$\widehat{rr} = -2\mu\frac{B}{r^2}, \quad \widehat{\theta\theta} = 2\mu\frac{B}{r^2}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}, \quad \widehat{\Phi\Phi} = 2\mu\frac{B}{r^2}\frac{1}{1+\cos\theta},$$

$$\widehat{\theta\Phi} = \widehat{\Phi r} = 0, \quad \widehat{r\theta} = 2\mu\frac{B}{r^2}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}.$$

δ) Die in § 132, d) erhaltene Lösung (28) drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u_r = 0, \quad u_\theta = -\frac{C}{r}\frac{\cos\Phi}{1+\cos\theta}, \quad u_\Phi = \frac{C}{r}\frac{\sin\Phi}{1+\cos\theta};$$

die Spannungskomponenten sind gegeben durch

$$\widehat{rr} = 0, \quad \widehat{\theta\theta} = -\widehat{\Phi\Phi} = -2\mu\frac{C}{r^2}\frac{(1-\cos\theta)\cos\Phi}{(1+\cos\theta)\sin\theta},$$

$$\widehat{\theta\Phi} = 2\mu\frac{C}{r^2}\frac{(1-\cos\theta)\sin\Phi}{(1+\cos\theta)\sin\theta}, \quad \widehat{\Phi r} = -2\mu\frac{C}{r^2}\frac{\sin\Phi}{1+\cos\theta},$$

$$\widehat{r\theta} = 2\mu\frac{C}{r^2}\frac{\cos\Phi}{1+\cos\theta}.$$

ε) Die in § 132, e) erhaltene Lösung (31) drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u_r = \frac{D}{r}\frac{\sin\theta\cos\Phi}{1+\cos\theta}, \quad u_\theta = \frac{D}{r}\cos\Phi, \quad u_\Phi = -\frac{D}{r}\sin\Phi;$$

die Spannungskomponenten lauten

$$\widehat{rr} = -\widehat{\theta\theta} = -2\mu \frac{D}{r^2} \frac{\sin\theta\cos\Phi}{1+\cos\theta}, \quad \widehat{\Phi\Phi} = 0,$$

$$\widehat{\theta\Phi} = -\mu \frac{D}{r^2} \frac{\sin\theta\sin\Phi}{1+\cos\theta}, \quad \widehat{\Phi r} = \mu \frac{D}{r^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\theta}\right)\sin\Phi,$$

$$\widehat{r\theta} = -\mu \frac{D}{r^2}\left(2 - \frac{1}{1+\cos\theta}\right)\cos\Phi.$$

## § 142. Kegelprobleme.[1])

1) Die im letzten Paragraphen unter $\alpha$) und $\gamma$) gegebenen Lösungen können wir so miteinander kombinieren, daß wir die Spannungsverteilung in einem Kegel erhalten, in dessen Spitze eine Kraft in der Richtung der Achse angreift, vorausgesetzt daß die Teile in großer Entfernung von der Spitze festgehalten werden. Ist $\theta = \alpha$ die Gleichung des Kegelmantels, so müssen die Spannungskomponenten $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{\theta\Phi}$, $\widehat{r\theta}$ für $\theta = \alpha$ verschwinden, und wir erhalten daher

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{F}{4\pi} + \frac{2\mu B}{1+\cos\alpha} = 0.$$

Die resultierende Kraft in der Spitze des Kegels finden wir, wenn wir die in die Richtung der Kegelachse fallende Spannung auf eine Kugelfläche, deren Zentrum in der Spitze liegt, betrachten; es ergibt sich, daß die Kraft gleich

$$\frac{F}{2(\lambda+2\mu)}\left\{\lambda(1-\cos^3\alpha) + \mu(1-\cos\alpha)(1+\cos^2\alpha)\right\}$$

ist; falls $F$ positiv, ist sie ins Innere des Kegels gerichtet.

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir die Lösung für das Problem des Druckes in einem Punkte einer ebenen Grenzfläche (§ 135).

2) Die im letzten Paragraphen unter $\beta$), $\delta$) und $\varepsilon$) gegebenen Lösungen können wir so miteinander kombinieren, daß wir die Spannungsverteilung in einem Kegel erhalten, in dessen Spitze eine Kraft senkrecht zur Achse angreift. Die Bedingungen dafür, daß der Kegelmantel spannungsfrei ist, lauten:

$$2C\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - D\sin\alpha = 0,$$

$$2C \qquad - D(1+2\cos\alpha) - \frac{F'}{4\pi(\lambda+2\mu)}\cos\alpha(1+\cos\alpha) = 0,$$

$$-2C\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2D\sin\alpha + \frac{F'}{4\pi(\lambda+2\mu)}\sin\alpha(1+\cos\alpha) = 0,$$

1) Michell, *loc. cit.*

woraus

$$C = -\frac{F'(1 + \cos\alpha)^2}{8\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad D = -\frac{F'(1 + \cos\alpha)}{4\pi(\lambda + 2\mu)}.$$

Die resultierende Kraft in der Kegelspitze fällt in die positive Richtung der $x$-Achse, wenn $F'$ positiv ist, und hat den Betrag

$$\frac{F'}{4}\frac{(2 + \cos\alpha)\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}(1 - \cos\alpha)^2.$$

Durch Kombination der für die Probleme 1) und 2) erhaltenen Resultate gelangen wir zur Lösung für den Fall der in gegebener Richtung in der Kegelspitze angreifenden Kraft; setzen wir $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, so ergibt sich die Lösung für das Problem der Kraft, die in einem Punkt einer ebenen Grenzfläche in gegebener Richtung angreift.

# Kapitel IX.

## Zweidimensionale elastische Systeme.

§ 143. Methoden der im letzten Kapitel behandelten Art, bei denen man von einfachen Lösungen ausgeht, die in einem Punkte unendlichen Werten zustreben, lassen sich auch im Falle zweidimensionaler elastischer Systeme anwenden. Wir hatten bereits Gelegenheit (Kap. V) zu bemerken, daß man auf mannigfache Weise von selbst auf die Betrachtung derartiger Systeme geführt wird. Dieselben spielen ferner da, wo es sich um Veranschaulichungen handelt, eine wichtige Rolle. Wie in andern zur Potentialtheorie in Beziehung stehenden Zweigen der mathematischen Physik kommt es auch hier oft vor, daß Probleme, die man im Falle dreier Dimensionen nicht lösen kann, für zwei Dimensionen eine strenge Lösung zulassen; es wird sich zeigen, daß in der Elastizitätstheorie oft eine Lösung für den Fall zweier Dimensionen sich angeben läßt, die über irgend ein weitergehendes, nicht vollständig lösbares Problem Licht verbreitet.

### § 144. Verschiebung bei ebener Verzerrung.

Bei einem Zustand ebener Verzerrung parallel zur $(x, y)$-Ebene verschwindet die Verschiebung $w$, und die Verschiebungen $u$, $v$ sind Funktionen der Koordinaten $x$, $y$ allein. Die Drehungskomponenten $\varpi_x$ und $\varpi_y$ verschwinden, und für $\varpi_z$ wollen wir $\varpi$ schreiben. Wirken keine Massenkräfte, so lassen sich, wie die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts zeigen, die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ durch eine Spannungsfunktion $\chi$, die von $x$ und $y$, aber nicht von $z$ abhängt, ausdrücken mittels der Formeln

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \tag{1}$$

Von den identischen Beziehungen zwischen den Verzerrungskomponenten (§ 17) nimmt

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

die Form an

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \lambda\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right\} + 4(\lambda + \mu)\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Wir wollen den Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ mit $\nabla_1^2$ bezeichnen; dann lautet diese Gleichung: $\nabla_1^4 \chi = 0$. Sie zeigt, daß $\nabla_1^2 \chi$ eine ebene harmonische Funktion ist.

Ausgedrückt in Dilatation und Drehung lauten die Gleichungen des Gleichgewichts folgendermaßen:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu\frac{d\varpi}{dy} = 0, \quad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Aus ihnen ergibt sich, daß $\Delta$ und $\varpi$ ebene harmonische Funktionen sind und daß $(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi$ eine Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$ ist. Die ebene harmonische Funktion $\nabla_1^2 \chi$ ist identisch mit $2(\lambda + \mu)\Delta$. Wir führen eine neue Funktion $\xi + i\eta$ von $x + iy$ ein mittels der Gleichung

$$\xi + i\eta = \int\{(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi\}\, d(x + iy), \tag{5}$$

sodaß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = (\lambda + 2\mu)\Delta = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}\nabla_1^2 \chi, \\ -\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2\mu\varpi. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir haben dann

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\nabla_1^2 \chi = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\nabla_1^2 \chi = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Ebenso ist

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - 2\mu\varpi = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + 2\mu\varpi = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Daraus folgt, daß

$$2\mu u = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \xi, \quad 2\mu v = -\frac{\partial \chi}{\partial y} + \eta. \tag{7}$$

Diese Gleichungen ermöglichen es uns, die Verschiebung auszudrücken, wenn die Spannungsfunktion $\chi$ bekannt ist.

Sind andererseits $\Delta$ und $\varpi$ bekannt, so finden wir die Ausdrücke für $u$, $v$ auf folgende Weise. Wir haben die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\varpi. \tag{8}$$

Kombiniert mit (6) liefern sie

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y\xi}{2\mu}\right) + u',$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y\eta}{2(\lambda+2\mu)}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\xi}{2\mu}\right) + v',$$

worin [§ 14, d)] $v' + iu'$ eine Funktion von $x + iy$. Wir können setzen

$$u' = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial f}{\partial y},$$

wo $f$ eine ebene harmonische Funktion; $u$ und $v$ lassen sich dann in folgender Form ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\xi}{2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}, \\ v &= \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\, y\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wir können leicht zeigen, daß die entsprechende Form von $\chi$ folgende ist:

$$\chi = -2\mu f + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, y\eta; \tag{10}$$

wir können sodann verifizieren, daß die Ausdrücke (7) und (9) für $u$, $v$ identisch sind.

## § 145. Verschiebung bei ebenem Spannungszustand.

Im Falle des ebenen Spannungszustandes, wo jede zur $(x, y)$-Ebene parallele Ebene spannungsfrei ist, haben wir $X_z = Y_z = Z_z = 0$. Wir wollen die allgemeinste mit diesen Bedingungen verträgliche Form für die übrigen Spannungskomponenten und die entsprechende Verschiebung bestimmen für den Fall, daß keine Massenkräfte wirken. Wir erinnern uns an die Ergebnisse von § 93. Dort wurde gezeigt, daß $\Theta = X_x + Y_y + Z_z$ eine harmonische Funktion ist und daß die Spannungskomponenten außer den drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

noch die sechs Gleichungen vom Typus

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \text{ bezw. } \nabla^2 Y_z + \frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\,\partial z} = 0 \tag{12}$$

befriedigen.

Da nun $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ null sind, so ist $\partial\Theta/\partial z$ konstant, etwa gleich $\beta$, und wir haben

$$\Theta = \Theta_0 + \beta z, \tag{13}$$

wo $\Theta_0$ eine Funktion von $x$ und $y$; dieselbe muß eine ebene harmonische Funktion sein, da $\Theta$ harmonisch, sodaß wir haben

$$\nabla_1^2 \Theta_0 = 0. \tag{14}$$

Die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ lassen sich, wie in Formel (1), aus einer Spannungsfunktion $\chi$ ableiten, die von $x$, $y$ und $z$ abhängt; es ist

$$\nabla_1^2 \chi = \Theta_0 + \beta z. \tag{15}$$

Die erste der Gleichungen (12) liefert uns

$$\nabla^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} = 0,$$

oder wegen (14) und (15)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \Theta_0\right) - \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \Theta_0\right) = 0.$$

In gleicher Weise liefern die übrigen der Gleichungen (12)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \Theta_0\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{1+\sigma} \Theta_0\right) = 0.$$

Daraus folgt, daß $\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\Theta_0$ eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist; wir können diese Funktion gleich null setzen, ohne dadurch die Werte von $X_x$, $Y_y$, $X_y$ zu ändern. Demnach erhalten wir für $\chi$ die folgende Form:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 z - \tfrac{1}{2} \frac{\sigma}{1+\sigma} \Theta_0 z^2, \tag{16}$$

wo $\chi_0$ und $\chi_1$ von $z$ unabhängig sind und den Gleichungen genügen

$$\nabla_1^2 \chi = \Theta_0, \quad \nabla_1^2 \chi_1 = \beta. \tag{17}$$

Wir können nun ein Paar konjugierter Funktionen $\xi$ und $\eta$ von $x$ und $y$ einführen, die so beschaffen sind, daß

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Theta_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \tag{18}$$

die allgemeinsten Ausdrücke für $\chi_0$ und $\chi_1$ lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\chi_0 = \tfrac{1}{2} x \xi + f, \quad \chi_1 = \tfrac{1}{4} \beta (x^2 + y^2) + F, \tag{19}$$

wo $f$ und $F$ ebene harmonische Funktionen. Ist somit die allgemeine

Form von $\chi$ bekannt, so lassen sich Formeln für die Spannung aufstellen und die Verschiebungen ableiten.

Die Verschiebung $(u, v, w)$ muß den Gleichungen genügen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(X_x - \sigma Y_y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(Y_y - \sigma X_x), \\
&\qquad\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\sigma}{E}(X_x + Y_y), \\
&\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Man gelangt ohne Schwierigkeit zu den Formeln[1])

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{E}\left(\xi + \beta x z + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\chi_0 + z\chi_1), \\
v &= \frac{1}{E}\left(\eta + \beta y z + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial y}(\chi_0 + z\chi_1), \\
w &= -\frac{1}{E}\left\{\tfrac{1}{2}\beta(x^2 + y^2 + \sigma z^2) + \sigma z \Theta_0\right\} + \frac{1+\sigma}{E}\chi_1.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Natürlich kann man über diese Verschiebung eine beliebige, in einem starren Körper mögliche kleine Verschiebung überlagern.

## § 146. Verallgemeinerter ebener Spannungszustand.

Wir haben in § 94 gezeigt, daß, wenn die Spannungskomponente $Z_z$ überall verschwindet und die Spannungskomponenten $Z_x$ und $Y_z$ an zwei ebenen Grenzflächen $z = \pm h$ verschwinden, die Mittelwerte der übrigen Spannungskomponenten $\bar{X}_x$, $\bar{Y}_y$, $\bar{X}_y$ sich durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{X}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}_y}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

bestimmen und daß die Mittelwerte der Verschiebungen $\bar{u}$, $\bar{v}$ mit den Mittelwerten der Spannungskomponenten durch die Gleichungen verknüpft sind:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{X}_x &= \lambda'\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \\
\bar{Y}_y &= \lambda'\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\ }}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \\
\bar{X}_y &= \mu \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wo

$$\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu). \tag{24}$$

Daraus folgt, daß $\bar{u}$, $\bar{v}$ durch dieselben Gleichungen bestimmt sind, wie wenn es sich um ein Problem ebener Verzerrung handelte, nur

1) Damit gleichwertige Formeln erhielt Clebsch, *Elastizität*, § 39.

daß $\lambda$ durch $\lambda'$ ersetzt ist. Die Größen $\overline{X}_x$, $\overline{Y}_y$, $\overline{X}_y$ leiten sich genau so aus einer Spannungsfunktion ab wie bei Problemen ebener Verzerrung.

Bei einem beliebigen Problem ebener Spannung sind die Mittelwerte der Verschiebungen unabhängig von den Größen $\beta$ und $F$ von § 145 und ebenso groß, wie wenn es sich um ein Problem verallgemeinerter ebener Spannung handelte. Aus diesem Satze folgt, daß die Untersuchung ebener Verzerrungszustände zur Beurteilung von Fällen dienen kann, wo Kraftverteilungen angreifen, die keine ebene Verzerrung hervorrufen. Die Fälle, wo diese Methode anwendbar ist, liegen vor bei Problemen des Gleichgewichts einer dünnen Platte, die durch in ihrer Ebene angreifende Kräfte deformiert wird. Man bestimmt nicht die tatsächlichen Werte der in der Platte hervorgerufenen Spannungen nnd Verschiebungen (außer wenn die Kräfte so verteilt sind, daß es sich um einen ebenen Spannungszustand handelt), sondern man ermittelt die über die Dicke der Platte genommenen Mittelwerte. Jedes derartige Problem kann man lösen, indem man es als ein Problem ebener Verzerrung behandelt und im Resultat $\lambda'$ für $\lambda$ einsetzt.

## § 147. Einführung von Verzerrungskernen.

Wir können Lösungen der Gleichungen der ebenen Verzerrung untersuchen, die in bestimmten Punkten unendlichen Werten zustreben. Derartige Punkte dürfen sich nicht in der den Körper bildenden Substanz befinden, wohl aber mögen sie in Höhlungen innerhalb des Körpers liegen. Wenn dies der Fall ist, so sind die Bedingungen für die Einwertigkeit der Verschiebung, der Drehung und der Verzerrung zu beachten. Liegen die Punkte außerhalb des Körpers oder auf dem Rande, so erfordern diese Bedingungen im allgemeinen keine besondere Untersuchung. Da die Verschiebung sich durch gewisse Funktionen von $x + iy$ bestimmt, so sind die singulären Punkte identisch mit den singulären Stellen dieser Funktionen. Ohne in eine erschöpfende Untersuchung der möglichen Singularitäten und ihrer Bedeutung für die Elastizitätstheorie einzutreten, wollen wir die Spannungszustände betrachten, die gewissen einfachen Typen singulärer Punkte entsprechen.

## § 148. In einem Punkte angreifende Kraft.

Die einfachste Singularität erhalten wir, wenn wir setzen

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi = A(x + iy)^{-1}, \tag{25}$$

so daß der Ursprungspunkt einen einfachen Pol darstellt. Gleichung (5)

geht in diesem Falle über in

$$\xi + i\eta = A \log(x + iy) = A(\log r + i\theta), \tag{26}$$

wo $r$, $\theta$ Polarkoordinaten in der $(x, y)$-Ebene. Die entsprechenden Formeln für $u$, $v$ lauten

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{A}{2\mu}\log r \quad + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} A \frac{y^2}{r^2} + u', \\ v &= \frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\theta - \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} A \frac{xy}{r^2} + v'. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Um $v$ einwertig zu machen, müssen wir setzen

$$v' = -\frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\theta, \quad u' = \frac{A}{2(\lambda+2\mu)}\log r.$$

Die Formeln für $u$, $v$ gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} A \log r + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} A \frac{y^2}{r^2}, \\ v &= -\frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} A \frac{xy}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ sind gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_x &= A\frac{x}{r^2}\left(\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{y^2}{r^2}\right), \\ Y_y &= A\frac{x}{r^2}\left(-\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{y^2}{r^2}\right), \\ X_y &= A\frac{y}{r^2}\left(\quad\frac{\mu}{\lambda+2\mu} + \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu)}\frac{x^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Der Ursprung muß im Körper in einer Höhlung liegen; die statische Resultante der Spannungen über die Oberfläche der Höhlung ist von der Form der letzteren unabhängig. Wir können die Resultante bestimmen, indem wir als Höhlung (in der Ebene) einen Kreis um den Ursprung als Mittelpunkt wählen. Die in die Richtung der $x$-Achse fallende Komponente ist ausgedrückt durch das Integral

$$\int_0^{2\pi} -\left(X_x\frac{x}{r} + X_y\frac{y}{r}\right) r\,d\theta,$$

dessen Wert gleich $-2A\pi$ ist. Die Komponente in der Richtung der $y$-Achse verschwindet, und ebenso verschwindet das Moment der Spannungen, bezogen auf den Mittelpunkt der Höhlung. Daraus folgt, daß der durch (29) ausgedrückte Spannungszustand herrührt von einer Einzelkraft von der Größe $2\pi A$, die im Ursprung in der negativen Richtung der $x$-Achse angreift.

Die Verteilung, die eine in einem Punkte einer Platte angreifende Kraft hervorruft, ergibt sich, wenn wir $\lambda'$ an Stelle von $\lambda$ schreiben und $u$, $X_x$, ... durch $\bar{u}$, $\bar{X}_x$, ... ersetzen.

## § 149. In einem Randpunkte angreifende Kraft.

Liegt der Ursprung in einem Punkte am Rande, so kann der Term von (27), der $\theta$ enthält, einwertig sein unabhängig davon, wie man $u'$, $v'$ wählt. Man hat nur die Bedeutung von $\theta$ festzusetzen. In Fig. 17 ist $OX$ die in die Platte hinein gerichtete Achse $\theta = 0$, und es ist $\sphericalangle XOT = \alpha$. Dann möge $\theta$ im Intervall

$$\alpha \geqq \theta \geqq -(\pi - \alpha)$$

liegen.

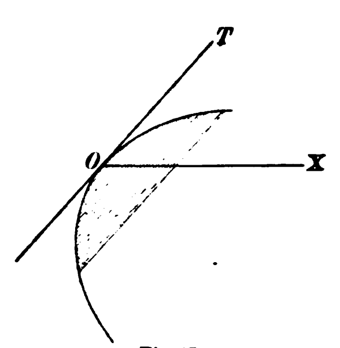



Fig. 17.

Wir wollen das Spannungssystem bestimmen, das den Gleichungen (27) entspricht, wenn $u'$ und $v'$ gleich null gesetzt werden. Wir finden

$$X_x = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} A \frac{x^3}{r^4},$$
$$Y_y = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} A \frac{xy^2}{r^4}, \quad X_y = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} A \frac{x^2 y}{r^4}. \tag{30}$$

In Polarkoordinaten drückt sich dasselbe Spannungssystem aus durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} A \frac{\cos\theta}{r}, \quad \widehat{\theta\theta} = 0, \quad \widehat{r\theta} = 0. \tag{31}$$

Diese Spannungsverteilung bezeichnet Michell[1]) als eine „einfache radiale Verteilung". Eine derartige Verteilung um einen Punkt ist nicht möglich, wenn der Punkt im Innern des Körpers liegt. Ist der Ursprung ein Randpunkt, so drücken die Formeln (31) einen Spannungszustand aus, der von einer Einzelkraft in diesem Punkte herrührt. Wir wollen die Spannung berechnen, die über einen Halbkreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt resultiert. Die $x$-Komponente der Resultante ist gleich

$$-\int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} \widehat{rr} \cdot \cos\theta \cdot r d\theta,$$

oder gleich $-A\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\pi$. Die $y$-Komponente der Resultante ist gleich

$$-\int_{-\pi+\alpha}^{\alpha} \widehat{rr} \cdot \sin\theta \cdot r d\theta,$$

oder gleich null. Die resultierende äußere Kraft wirkt somit entlang

1) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 32 (1900), p. 35.

der $x$-Achse, ihr Betrag ist $\pi A(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$; wenn $A$ positiv ist, fällt ihre Richtung in die der äußeren Verlängerung der Achse.

Dies Resultat liefert uns die Lösung des Problems einer Platte mit geradliniger Begrenzung, an der in einem Punkte eine Kraft in gegebener Richtung angreift. Wählt man diese Richtung als Achse und ist $F$ die Größe der Kraft, so drückt sich das Spannungssystem aus durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -\frac{2}{\pi} F \frac{\cos\theta}{r}, \quad \widehat{r\theta} = 0, \quad \widehat{\theta\theta} = 0; \tag{32}$$

natürlich stellen diese Größen Mittelwerte dar, genommen über die Dicke der Platte.

## § 150. Fall einer gradlinigen Begrenzung.

In dem besonderen Falle, wo die $x$-Achse die Begrenzung bildet, die $y$-Achse in die Platte fällt und die Kraft in normal nach innen wirkendem Druck $F$ besteht, sind die Mittelwerte der Spannungen und Verschiebungen ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\overline{X}_x = -\frac{2}{\pi} F \frac{x^2 y}{r^4}, \quad \overline{Y}_y = -\frac{2}{\pi} F \frac{y^3}{r^4}, \quad \overline{X}_y = -\frac{2}{\pi} F \frac{x y^2}{r^4} \tag{33}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{F}{2\pi(\lambda' + \mu)}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{F}{2\pi\mu}\frac{xy}{r^2}, \\ \bar{v} &= -\frac{F(\lambda' + \mu)}{2\pi\mu(\lambda' + \mu)}\log r - \frac{F}{2\pi\mu}\frac{x^2}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Diese Lösung[1]) bildet das zweidimensionale Analogon zur Lösung des Boussinesqschen Problems (§ 135). Da $\bar{u}$, $\bar{v}$ in unendlicher Entfernung nicht gegen Null konvergieren, so liegt, was die Anwendung des Resultats auf eine unendliche Platte anbetrifft, eine gewisse Schwierigkeit vor; immerhin kann man annehmen, daß dasselbe die lokale Wirkung einer in einem Randpunkt angreifenden Kraft richtig darstellt.

## § 151. Weitere Resultate.

1) Die zu (32), § 149, gehörige Spannungsfunktion ist $-\pi^{-1} F r \theta \sin\theta$.

2) Die Wirkung einer Drucklast, die über eine endliche Strecke einer gradlinigen Begrenzung gleichmäßig verteilt ist, kann man durch Integration ableiten. Ist $p$ der Druck pro Längeneinheit, die $x$-Achse die Begrenzung und die $y$-Achse ins Innere des Körpers gerichtet, so findet man als Spannungsfunktion: $\frac{1}{2}\pi^{-1} p \left\{(r_2^2 \theta_2 - r_1^2 \theta_1)\right\}$, wo $r_1$, $\theta_1$ und

1) Flamant, *Paris C. R.*, t. 114, 1892. Bezüglich der Verifikation mittels polarisierten Lichtes siehe Mesnager in den *Rapports présentés au congrès international de physique*, t. 1, Paris 1900, p. 348. Vgl. Carus Wilson, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32 (1891), wo ein von Boussinesq erhaltenes äquivalentes Ergebnis verzeichnet ist.

$r_2$, $\theta_2$ Polarkoordinaten, die auf die $x$-Achse als Achse und die Endpunkte der den Druck erleidenden Strecke als Ursprungspunkte bezogen sind. Es läßt sich zeigen, daß die Spannungstrajektorien von den konfokalen Kegelschnitten gebildet werden, deren Brennpunkte jene Punkte sind.[1])

3) *Kraft im Scheitel eines Winkels.*

Die in § 149 erhaltenen Resultate lassen sich verallgemeinern durch die Annahme, daß die Begrenzung von zwei im Ursprung einander kreuzenden geraden Kanten gebildet wird. Beziehen wir uns wie früher auf den Fall der ebenen Verzerrung, so haben wir bei Berechnung der Kraft die Integrationsgrenze $-\pi+\alpha$ zu ersetzen durch $-\gamma+\alpha$, wo $\gamma$ der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel. Für die $x$-Komponente der im Ursprung wirkenden Kraft finden wir den Ausdruck

$$-A\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\{\gamma+\sin\gamma\cos(2\alpha-\gamma)\},$$

für die $y$-Komponente erhalten wir

$$-A\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\{\sin\gamma\sin(2\alpha-\gamma)\}.$$

Die Richtung der maximalen Radialspannung ist in diesem Falle nicht mit der der resultierenden Kraft identisch. Erstere fällt mit der Achse $\theta=0$ zusammen, die mit den Kanten die Winkel $\alpha$ und $\alpha-\gamma$ einschließt; letztere bildet mit denselben Kanten die Winkel $\Phi$ und $\gamma-\Phi$, wo

$$\operatorname{tg}\Phi=\frac{\gamma\sin\alpha-\sin\gamma\sin(\alpha-\gamma)}{\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos(\alpha-\gamma)}.$$

Daraus folgt, daß der Winkel $\alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\gamma\sin\Phi-\sin\gamma\sin(\gamma-\Phi)}{\gamma\cos\Phi-\sin\gamma\cos(\gamma-\Phi)}$$

gegeben ist. Wenn eine gegebene Kraft $F$ in gegebener Richtung angreift, so ist $\Phi$ bekannt, und $\alpha$ kann dann aus dieser Gleichung berechnet werden; die Konstante $A$ bestimmt sich ferner aus der resultierenden Kraft $F$. Die Bedingungen dafür, daß als Radialspannung überall Druck herrscht, lauten: $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\gamma-\alpha<\frac{\pi}{2}$; im Grenzfalle $\alpha=\frac{\pi}{2}$ würden wir haben

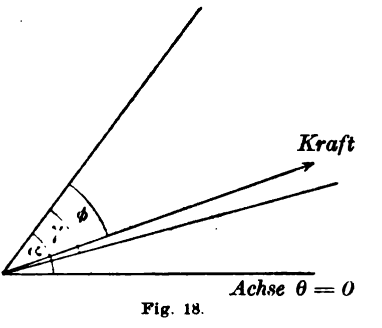


Fig. 18.

$$\operatorname{tg}\Phi=\frac{\gamma-\sin\gamma\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

Diese Lösung rührt her von Michell[2]), der daran die Bemerkung knüpft, daß letzteres Resultat, falls $\gamma$ nicht größer als $\frac{\pi}{2}$, nahezu mit der „Regel

1) Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 34 (1902), p. 134.
2) *loc. cit.* p. 249.

vom mittleren Drittel" sich deckt, wonach der Grenzwert von $\Phi$ ungefähr gleich $\frac{2}{3}\gamma$ ist. Fällt die Angriffslinie der Kraft in das mittlere Drittel des Winkels, so wechselt die Radialspannung nirgends das Vorzeichen.

Die Spannungsverteilung ist durch (32) gegeben, so daß die Gesetze der Ausbreitung der Spannung von der Spitze eines Winkels aus folgende sind: 1) die Spannung ist rein radial, 2) sie ist umgekehrt proportional dem Abstand von der Spitze, 3) sie ist proportional dem Kosinus des Winkels, den der Radiusvektor mit einem gewissen vom Scheitel ausgehenden Strahl einschließt.

## § 152. Typische Verzerrungskerne in zwei Dimensionen.

a) Die Formeln (28) drücken die Verschiebungen bei einem ebenen Verzerrungszustand aus, der aus einer Einzelkraft von der Größe $2A\pi$ entspringt, die im Ursprung in der Richtung der negativen $x$-Achse wirkt. Wir können einen neuen Typus einer singulären Stelle ableiten, wenn wir beim Ursprungspunkt folgende Kräfte angreifen lassen:

zur $x$-Achse parallel $-2A\pi$ im Ursprung selbst und $2A\pi$ in $(h, 0)$;

zur $y$-Achse parallel $-2A\pi$ im Ursprung selbst und $2A\pi$ in $(0, h)$;

wir können zur Grenze übergehen, indem wir $Ah$ konstant gleich $B$ annehmen, während $h$ unbegrenzt abnimmt. Die resultierende Verschiebung ist gegeben durch die Gleichungen

$$u = B\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial}{\partial x}(\log r) + B\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{r^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{r^2}\right),$$

$$v = B\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial}{\partial y}(\log r) + B\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2}{r^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{r^2}\right),$$

oder

$$(u, v) = \frac{B}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\log r. \tag{35}$$

Diese Verschiebung drückt sich in Polarkoordinaten durch die Formeln aus

$$u_r = \frac{B}{\lambda + 2\mu}\frac{1}{r}, \quad u_\theta = 0; \tag{36}$$

es ist weder Dilatation noch Drehung mit ihr verknüpft. Die Spannung drückt sich aus durch die Formeln

$$-\widehat{rr} = \widehat{\theta\theta} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\frac{B}{r^2}, \quad \widehat{r\theta} = 0, \tag{37}$$

sodaß der Ursprung einen Druckpunkt darstellt. Liegt der Ursprung in einer kreisförmigen Höhlung, so wirkt auf sie gleichförmiger Druck vom Betrage $2\mu B r^{-2}/(\lambda + 2\mu)$.

b) Einen anderen Typus eines singulären Punktes erhalten wir durch die Annahme, daß beim Ursprungspunkt folgende Kräfte angreifen:

zur $x$-Achse parallel $2A\pi$ im Ursprung selbst, $-2A\pi$ im Punkt $(0, h)$,

zur $y$-Achse parallel $-2A\pi$ im Ursprung selbst, $2A\pi$ im Punkt $(h, 0)$;

wir gehen wie im Falle a) zur Grenze über. Wir erhalten so folgende Verschiebung:

$$u = - B\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial}{\partial y}(\log r) - B\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{r^2}\right),$$

$$v = B\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial}{\partial x}(\log r) + B\frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{r^2}\right).$$

oder

$$(u, v) = \frac{B}{\mu}\left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\log r. \tag{38}$$

Diese Verschiebung drückt sich in Polarkoordinaten durch die Formeln aus

$$u_r = 0, \quad u_\theta = B/\mu r; \tag{39}$$

weder Dilatation noch Drehung ist mit ihr verknüpft. Die Spannung drückt sich aus durch die Formeln

$$\widehat{rr} = \widehat{\theta\theta} = 0, \quad \widehat{r\theta} = -2Br^{-2}, \tag{40}$$

sodaß es sich um den Spannungszustand handelt, der von einem im Ursprung angebrachten Kräftepaar von der Größe $4\pi B$ hervorgerufen wird.

c) Wir können $(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi = C\log(x + iy)$ setzen. Da $\varpi$ in einem den Ursprung enthaltenden Gebiet nicht einwertig ist, so wollen wir den Ursprung auf dem Rande annehmen. Gleichung (5) geht über in

$$\xi + i\eta = C(x\log r - y\theta - x) + iC(y\log r + x\theta - y),$$

und für die Verschiebung können wir die Formeln ansetzen

$$u = \frac{C}{2\mu}(x\log r - x) - \frac{(2\lambda + 3\mu)C}{2\mu(\lambda + 2\mu)}y\theta,$$

$$v = \frac{C}{2(\lambda + 2\mu)}(x\theta - y) - \frac{\lambda C}{2\mu(\lambda + 2\mu)}y\log r.$$

Die Spannung ist dann durch die Formeln

$$X_x = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}C\left(2\log r + \frac{y^2}{r^2}\right), \quad Y_y = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}C\frac{y^2}{r^2},$$

$$X_y = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}C\left(\theta + \frac{xy}{r^2}\right)$$

gegeben. Wir wollen annehmen, es sei $\pi > \theta > 0$, die $x$-Achse bilde die Begrenzung und die $y$-Achse sei ins Innere des Körpers gerichtet. Auf den Teil des Randes, für den $x$ negativ ist, wirkt dann tangentiale Spannung; ihr Betrag ist $C\pi(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$, und sie ist nach dem Ursprung hin gerichtet, falls $C$ positiv, und vom Ursprung weg, falls $C$ negativ. Von den in $v$ auftretenden Termen sind in der Nähe des Ursprungs diejenigen am wichtigsten, die $\log r$ und $\theta$ enthalten; ist $x$ negativ, so haben beide das entgegengesetzte Zeichen wie $C$, sind also positiv, wenn $C$ negativ. Das Beispiel lehrt, daß tangentiale Spannung, die an

einem Teil einer Oberfläche angreift, das Material auf der Seite niederzudrücken sucht, gegen die sie gekehrt ist.[1])

## § 153. Transformation ebener Verzerrung.

Wir haben gesehen, daß ebene Verzerrungszustände sich mit Hilfe von Funktionen einer komplexen Veränderlichen $x + iy$ ausdrücken lassen, und daß die Pole und die logarithmischen Unendlichkeitsstellen dieser Funktionen Punkten entsprechen, in denen äußere Kräfte an dem die ebene Verzerrung erleidenden Körper angreifen. Wenn wir das vom Körper erfüllte zweidimensionale Gebiet durch eine funktionale Beziehung zwischen den komplexen Variabeln $x' + iy'$ und $x + iy$ auf ein anderes zweidimensionales Gebiet abbilden, so können wir zu einem neuen ebenen Verzerrungszustand in einem Körper, der eine andere Form als der ursprünglich betrachtete Körper besitzt, dadurch gelangen, daß wir mit Hilfe derselben funktionalen Beziehung die Funktion $(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi$ in eine Funktion von $x' + iy'$ transformieren. Da Pole und logarithmische Unendlichkeiten bei konformer Abbildung erhalten bleiben, so werden die Angriffspunkte isolierter Kräfte in den beiden Systemen sich entsprechen. In § 149 erhielten wir den ebenen Verzerrungszustand, der in einem geradlinig berandeten, sonst unbegrenzten Körper von isolierten Kräften hervorgerufen wird, die in gegebenen Punkten des Randes in gegebener Richtung angreifen. Wir können demnach in einem zylindrischen Körper von beliebiger Querschnittsform, an dem in gegebenen Randpunkten Einzelkräfte angreifen, stets einen Zustand ebener Verzerrung bestimmen, wenn wir eine konforme Abbildung des Querschnitts des Körpers auf eine Halbebene herzustellen vermögen. Im allgemeinen wird sich jedoch ergeben, daß die isolierten Kräfte nicht die einzigen auf den Körper wirkenden Kräfte sind; in der Tat transformiert sich ein spannungsfreier Rand im allgemeinen nicht wieder in einen spannungsfreien Rand. Diese Lücke im wechselseitigen Entsprechen bildet die Hauptschwierigkeit für den weiteren Ausbau der Theorie zweidimensionaler elastischer Systeme.

Wir können der Sache von einer anderen Seite näher zu kommen suchen, indem wir die Spannungsfunktion als Lösung von $\nabla_1^4\chi = 0$ betrachten. Wenn wir statt $x, y$ die unabhängigen Variabeln $x', y'$ einführen, wo $x'$ und $y'$ konjugierte Funktionen von $x$ und $y$, so bleibt die Form der Gleichung nicht erhalten; sonach kann man aus der Form der Spannungsfunktion im $(x, y)$-Gebiet nicht auf die im $(x', y')$-Gebiet schließen.

1) Vgl. L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 198 (1902).

## § 154. Inversion.[1])

Die Transformation durch Inversion $x' + iy' = (x + iy)^{-1}$, bildet eine Ausnahme von dem Satz am Schlusse des § 153. Wir vermeiden in diesem Falle am besten die komplexen Variabeln und transformieren die unabhängigen Veränderlichen mittels der Gleichungen

$$x' = k^2 x/r^2, \quad y' = k^2 y/r^2,$$

wo $k$ die Inversionskonstante und $r^2 = x^2 + y^2$. Ebenso schreiben wir $r'^2 = x'^2 + y'^2$. Ausgedrückt in Polarkoordinaten lautet die Gleichung $\nabla_1^4 \chi = 0$ folgendermaßen:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}\right] = 0; \tag{41}$$

führen wir statt $r$, $\theta$ die Variabeln $r'$, $\theta$ ein, so geht diese Gleichung, wie sich zeigen läßt, über in

$$\frac{r'^6}{k^8}\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial}{\partial r'}\right) + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]\left[\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left\{r'\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2\chi)\right\} + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r'^2\chi)\right] = 0. \tag{42}$$

Daraus folgt, daß, wenn wir $\chi$ in $x'$, $y'$ ausdrücken, $r'^2\chi$ der Gleichung genügt

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2}\right)(r'^2\chi) = 0; \tag{43}$$

$r'^2\chi$ stellt daher in der $(x', y')$-Ebene eine Spannungsfunktion dar.

Die aus $r'^2\chi$ abgeleiteten Spannungskomponenten sind gegeben durch die Gleichungen[2])

$$\left.\begin{aligned} \widehat{r'r'} &= \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(r'^2\chi) + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}(r'^2\chi), \\ \widehat{\theta'\theta'} &= \frac{\partial^2}{\partial r'^2}(r'^2\chi), \quad \widehat{r'\theta'} = -\frac{\partial}{\partial r'}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial \theta}(r'^2\chi), \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

wo $\theta'$ mit $\theta$ identisch; wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \widehat{r'r'} &= r^2 \cdot \widehat{rr} + 2\left(\chi - r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right), \\ \widehat{\theta'\theta'} &= r^2 \cdot \widehat{\theta\theta} + 2\left(\chi - r\frac{\partial \chi}{\partial r}\right), \\ \widehat{r'\theta'} &= -r^2 \cdot \widehat{r\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

wo $\widehat{rr}$, $\widehat{\theta\theta}$, $\widehat{r\theta}$ die aus $\chi$ abgeleiteten Spannungskomponenten, ausgedrückt in $r$, $\theta$. Somit unterscheidet sich die Spannung im $(r', \theta')$-System von derjenigen im $(r, \theta)$-System einmal durch den Faktor $r^2$,

---

1) Michell, *loc. cit.*, p. 251.

2) Siehe § 59, Satz 2).

sodann durch die Zeichenumkehrung der Schubspannung $\widehat{r\theta}$ und schließlich durch Überlagerung einer um einen Punkt herum allseitig gleichen Normalspannung $2\{\chi - r(\partial\chi/\partial r)\}$. Daraus folgt, daß Spannungstrajektorien wieder in Spannungstrajektorien übergehen und ein spannungsfreier Rand sich in einen nur durch Normalspannung beanspruchten Rand transformiert. Diese Normalspannung ist ferner konstant. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß die Bedingungen für verschwindende Randspannung gegeben sind durch

$$\cos(x, \nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \cos(y, \nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$-\cos(x, \nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} + \cos(y, \nu)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} = 0$$

oder durch

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) = 0,$$

wo $ds$ ein Element der Berandung bezeichnet. $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\chi}{\partial y}$ sind daher längs des Randes konstant, und wir haben

$$\frac{d}{ds}\left(\chi - r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right) = \frac{d}{ds}\left(\chi - x\frac{\partial\chi}{\partial x} - y\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) = \frac{d\chi}{ds} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{dy}{ds}\frac{\partial\chi}{\partial y} = 0.$$

Daraus folgt, daß ein spannungsfreier Rand im $(r, \theta)$-System sich in einen durch normale Spannung beanspruchten Rand im $(r', \theta')$-System transformiert. Diese Spannung hat in allen Punkten des transformierten Randes den gleichen Wert, und da ihre Wirkung bekannt ist, wird man sie mit in den Kauf nehmen.

## § 155. Gleichgewicht einer Kreisplatte, die von Kräften in ihrer Ebene beansprucht wird.[1]

1) Wir wollen jetzt die Inversionsformeln auf die Probleme von § 149 und § 150 anwenden.

Sei $O'$ ein Punkt einer festen Geraden $O'A$ (Fig. 19). Ist $O'A$ der Rand des Querschnitts eines Körpers, in dem eine längs $OO'X$ gerichtete Kraft $F$ ebene Verzerrung hervorruft, so hat die Spannungsfunktion in $P$ den Wert $-\pi^{-1}Fr\theta\sin\theta$, wo $r = O'P$; hierfür können wir schreiben: $-\pi^{-1}F\theta y$, wo $y$ die Ordinate von $P$, bezogen auf $O'X$. Invertieren wir das System mit bezug auf $O$ und nehmen $k = OO'$, so geht $P$ in $P'$ über, und die neue Spannungsfunktion ist $-\pi^{-1}r_1^2F(\theta_1 + \theta_2)k^2y'/r_1^2$, wo $\theta_1$ und $\pi - \theta_2$ die Winkel $XOP'$, $XO'P'$ bedeuten und $r_1$ für

1) Die in 1) und 2) gegebenen Resultate rühren her von Hertz, *Zeitschr. Math. Phys.*, Bd. 28 (1883) = *Ges. Werke*, Bd. 1, p. 283, und von Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 32 (1900), p. 35, und vol. 34 (1902), p. 134.

$OP'$, $y'$ für die auf $OX$ bezogene Ordinate von $P'$ geschrieben ist. Ferner transformiert sich die Gerade $O'A$ in einen durch $O$, $O'$ gehenden Kreis, und der Winkel $2\alpha$, unter dem $OO'$ vom Zentrum aus erscheint, ist doppelt so groß wie der Winkel $AO'X$. Somit ist die Funktion $-\pi^{-1}F'y'(\theta_1+\theta_2)$ die Spannungsfunktion, die zwei gleichen und entgegengesetzten, in der Sehnenrichtung $OO'$ drückenden Einzelkräften von der Größe $F'$ samt einer konstanten Normalspannung längs des Kreisrandes entspricht.

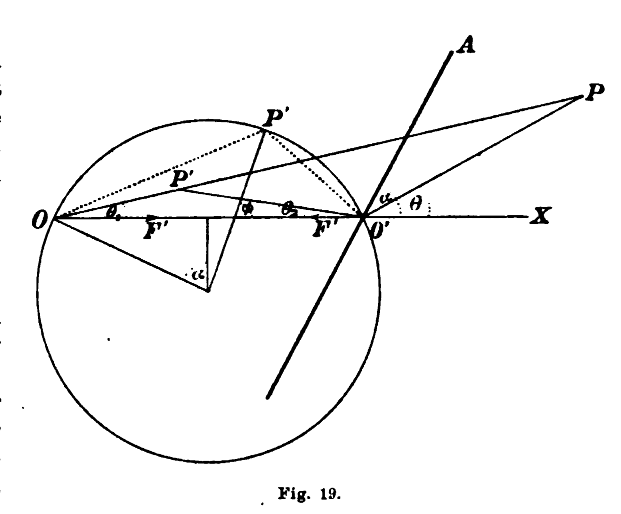



Fig. 19.

Um die Größe dieser Spannung zu finden, bemerken wir, daß wenn $P'$ auf dem Kreise liegt,

$$r_1 \operatorname{cosec} \theta_2 = r_2 \operatorname{cosec} \theta_1 = k \operatorname{cosec} (\theta_1 + \theta_2) = 2R,$$

wo $R$ der Radius des Kreises. Die Formeln (1), § 144, liefern ferner für die Spannungskomponenten die Werte

$$X_x = -\frac{2F'}{\pi}\left(\frac{\cos^3\theta_1}{r_1} + \frac{\cos^3\theta_2}{r_2}\right),$$

$$Y_y = -\frac{2F'}{\pi}\left(\frac{\cos\theta_1 \sin^2\theta_1}{r_1} + \frac{\cos\theta_2 \sin^2\theta_2}{r_2}\right),$$

$$X_y = -\frac{2F'}{\pi}\left(\frac{\cos^2\theta_1 \sin\theta_1}{r_1} - \frac{\cos^2\theta_2 \sin\theta_2}{r_2}\right).$$

Der Winkel ($\Phi$ in der Figur), den der vom Zentrum nach $P'$ laufende Radiusvektor ($R$) mit der $x$-Achse einschließt, ist, wenn $P'$ auf dem Kreise liegt, gleich $\frac{1}{2}\pi - \alpha + 2\theta_1$ oder $\frac{1}{2}\pi + \theta_1 - \theta_2$. Mithin ist die auf den Kreisumfang wirkende Normalspannung

$$X_x \sin^2(\theta_2 - \theta_1) + Y_y \cos^2(\theta_2 - \theta_1) + 2X_y \sin(\theta_2 - \theta_1)\cos(\theta_2 - \theta_1),$$

also gleich $-(F' \sin\alpha)/\pi R$.

Wenn an dem Kreise nur die beiden Kräfte $F'$ angreifen, so setzt sich der Spannungszustand zusammen aus einer in allen Punkten gleichen mittleren Spannung $(F' \sin\alpha)/\pi R$ und den beiden einfachen radialen Verteilungen um die Punkte $O$ und $O'$, bei denen die radialen Komponenten gleich

$$-(2F'\cos\theta_1)/\pi r_1 \quad \text{und} \quad -(2F'\cos\theta_2)/\pi r_2$$

sind.

2) *Kreisplatte unter der Wirkung am Rande angreifender Kräfte.* Wenn die Kraft $F'$ in $O$ in der Richtung $OO'$ (siehe Fig. 19) angreift und am übrigen Teil des Randes geeignete Kräfte angebracht sind, so kann die Spannungsfunktion aus dem einzigen Term $-\pi^{-1}F'y'\theta_1$ bestehen. Seien $r$ und $\theta$ Polarkoordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung und eine zu $OO'$ parallele Achse. Der Winkel $(r, r_1)$ zwischen den Radienvektoren, die vom Mittelpunkt und von $O$ aus nach einem beliebigen Randpunkt gezogen sind, ist gleich $\frac{1}{2}\pi - \theta_2$. Auf $(r_1, \theta_1)$ bezogen ist das Spannungssystem gegeben durch die Gleichungen

$$\widehat{r_1 r_1} = -(2F'\cos\theta_1)/(\pi r_1), \quad \widehat{\theta_1\theta_1} = 0, \quad \widehat{r_1\theta_1} = 0;$$

auf $(r, \theta)$ bezogen ist es mithin in irgend einem Randpunkt gegeben durch die Gleichungen

$$\widehat{rr} = -\frac{2F'}{\pi}\frac{\cos\theta_1 \sin^2\theta_2}{r_1}, \quad \widehat{\theta\theta} = -\frac{2F'}{\pi}\frac{\cos\theta_1\cos^2\theta_2}{r_1},$$

$$\widehat{r\theta} = \frac{2F'}{\pi}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2}{r_1};$$

wir haben also am Rande

$$\widehat{rr} = -\frac{F'}{\pi}\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{R}, \quad \widehat{r\theta} = \frac{F'}{\pi}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{R},$$

was identisch ist mit

$$\widehat{rr} = -\frac{F'\sin\alpha}{2\pi R} - \frac{F'}{2\pi R}\sin(\theta_2 - \theta_1), \quad \widehat{r\theta} = \frac{F'\cos\alpha}{2\pi R} + \frac{F'}{2\pi R}\cos(\theta_2 - \theta_1),$$

wo $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ der spitze Winkel, unter dem von einem Randpunkte aus die Sehne $OO'$ erscheint. Somit können wir sagen, daß die auf den Umfang wirkende Spannung sich zusammensetzt aus

1) gleichförmigem Zug $-\frac{1}{2}(F'\sin\alpha)/\pi R$ in der Normalenrichtung,
2) gleichförmiger Tangentialspannung $\frac{1}{2}(F'\cos\alpha)/\pi R$,
3) gleichförmiger Spannung $-\frac{1}{2}F'/\pi R$ in der Richtung $OO'$.

Nun möge eine Reihe von Kräften in verschiedenen Punkten des Randes angebracht werden. Dieselben genügen der Bedingung $\sum F'\cos\alpha = 0$, falls sie einen starren Körper im Gleichgewicht halten würden; denn $\sum F'R\cos\alpha$ stellt die Summe ihrer Momente um den Mittelpunkt dar. Ebenso würden die gleichförmigen Spannungen, die dem Bestandteil 3) in obiger Lösung entsprechen, in jedem Randpunkte die Resultante null liefern. Durch Überlagerung der zu den einzelnen Kräften gehörenden Spannungssysteme vom Typus (32) würden wir somit den Spannungszustand erhalten, der in der Platte unter der Wirkung der tatsächlich gegebenen Kräfte und einer in allen Randpunkten gleichen Normalspannung vom Betrage $-\sum(F'\sin\alpha)/2\pi R$ eintritt. Die Ausdrücke $F'\sin\alpha$ unter dem Summenzeichen sind gleich den in die (innere) Normale fallenden Komponenten der angreifenden Kräfte. Wir könnten über diese

Spannungsverteilung eine in allen Punkten gleiche mittlere Spannung vom Betrage $\sum(F' \sin\alpha)/2\pi R$ überlagern und würden dann die Lösung für die nur durch die Kräfte $F'$ beanspruchte Platte erhalten.

3) *Schwere Scheibe.*[1])

Auch der Spannungszustand in einer schweren Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene ruht, läßt sich ermitteln. Sei $w$ das Gewicht pro Flächeneinheit; seien ferner $r, \theta$ Polarkoordinaten, die auf den Berührungspunkt $A$ als Ursprung und die durch ihn nach oben gezogene Vertikale als Achse bezogen sind; siehe Fig. 20.

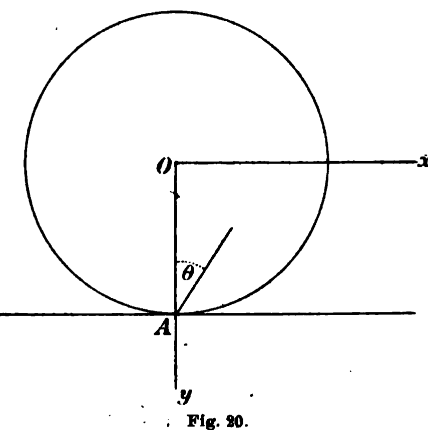


Fig. 20.

Es läßt sich zeigen, daß die Spannung aus folgenden Systemen zusammengesetzt ist

$$1)\quad X_x = \tfrac{1}{2}w(y+R),\quad Y_y = -\tfrac{1}{2}w(y-R),\quad X_y = -\tfrac{1}{2}wx;$$

$$2)\quad \widehat{rr} = -2wR^2r^{-1}\cos\theta,\quad \widehat{\theta\theta} = 0,\quad \widehat{r\theta} = 0.$$

Auf jeden Horizontalschnitt wirkt radial von $A$ aus gerichteter Druck vom Betrag $\frac{1}{2}wr^{-1}(4R^2\cos^2\theta - r^2)$; die Spannung auf irgend einen durch $A$ gelegten Schnitt besteht in horizontalem Zug vom Betrag

$$\tfrac{1}{2}w(2R\cos\theta - r).$$

## § 156. Beispiele für die Transformation ebener Verzerrungszustände.

1) Das direkte Verfahren von § 153 führt, wenn $x+iy = k^2/(x'+iy')$ in die Formel

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + 2\mu i\varpi = A(x+iy-k)^{-1} \tag{46}$$

eingesetzt wird, zu einem Spannungssystem in der $(x', y')$-Ebene, bei dem über eine einfache radiale Verteilung um den Punkt $(k, 0)$ ein konstanter einfacher Zug $(X_x)$ in der Richtung der $x'$-Achse superponiert ist. Ist der Rand in der $(x, y)$-Ebene durch die Gleichung $y = (x-k)\operatorname{tg}\alpha$ gegeben, so haben wir in der $(x', y')$-Ebene als Begrenzung einen Kreis, und es lassen sich die in § 155, 1) und 2), gegebenen Resultate ableiten.

2) Durch die Transformation $x+iy = (x'+iy')^n$ wird das keilförmige Gebiet zwischen $y'=0$ und $y'/x' = \operatorname{tg}\pi/n$ auf die Halbebene $y > 0$ konform abgebildet. Substituieren wir $x+iy$ in (46), so erhalten wir einen Spannungszustand in dem von oben genannten beiden Linien begrenzten keilförmigen Gebiet, der aus einer Einzelkraft in $(k^{1/n}, 0)$ und

1) Die Lösung rührt her von Michell, *loc. cit.* p. 249. Michell hat auch verschiedene Figuren gezeichnet, die die Spannungsverteilung im vorliegenden und in einigen anderen, z. T. in diesem Kapitel diskutierten Fällen darstellen.

gewissen über die Ränder verteilten Spannungen entspringen würde. Für $n = 2$ verschwindet die Spannung über $y' = 0$, die auf $x' = 0$ wird Zug, dessen Betrag mit

$$1/(y'^2 + k)^2$$

proportional ist.

3) Durch die Transformation $z = (e^{z'} - 1)/(e^{z'} + 1)$, wo $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$, wird der Streifen zwischen $y' = 0$, und $y' = \pi$ auf die Halbebene $y > 0$ konform abgebildet, sodaß die Ursprungspunkte in den beiden Ebenen sich entsprechen, während die Punkte $(\pm 1, 0)$ der $(x, y)$-Ebene den unendlich fernen Punkten des Streifens entsprechen. Im Ursprungspunkte der $(x, y)$-Ebene möge nun in der positiven Richtung der $y$-Achse eine Einzelkraft $F$ angreifen. Die Lösung ist dann durch die Gleichung

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + 2\mu i \varpi = -\frac{iF}{\pi}\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{1}{x + iy}$$

gegeben. Führen wir $(x', y')$ ein, so erhalten wir

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + i 2\mu\varpi = -\frac{F}{\pi}\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\frac{\sin y' + i \sinh x'}{\cosh x' - \cos y'}$$

und

$$\xi + i\eta = \frac{F}{\pi}\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\left\{\left(2 \operatorname{arctg}\frac{e^{x'}\sin y'}{e^{x'}\cos y' - 1} - y'\right)\right.$$
$$\left. - i \log(\cosh x' - \cos y')\right\} + \text{const.}$$

Diese Lösung beschreibt die Wirkung einer Einzelkraft $2F$, die im Ursprung in der positiven Richtung der $y'$-Achse angreift, eines auf die Kante $y' = \pi$ wirkenden rein normalen Drucks vom Betrag $F/(1 + \cosh x')$ pro Längeneinheit und gewisser tangentialer Spannungen auf die Kanten des Streifens. Letztere können wir zum Verschwinden bringen, indem wir über die Verschiebung

$$\left(\frac{\xi}{2\mu} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}y'\frac{\partial \xi}{\partial y'},\quad \frac{\eta}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}y'\frac{\partial \eta}{\partial y'}\right)$$

eine Verschiebung $(u', v')$ überlagern, wenn

$$v' + iu' = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}(\eta - i\xi);$$

diese Zusatzverschiebung hat auf die Normalspannungen am Rande keinen Einfluß.

# Kapitel X.

## Theorie der Integration der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen elastischen festen Körpers.

### § 157. Problemstellung.

Vom analytischen Standpunkt besteht das Hauptproblem der Elastizitätstheorie in der Auflösung der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen Körpers mit gegebener Begrenzung, wenn die Oberflächenverschiebungen oder die Oberflächenspannungen vorgeschrieben sind. Der Fall, wo Massenkräfte auf den Körper wirken, läßt sich mit Hilfe des in § 130 erhaltenen partikulären Integrals auf den Fall zurückführen, daß der Körper durch Oberflächenspannungen allein verzerrt gehalten wird. Demgemäß besteht unser Problem in der Bestimmung derjenigen Funktionen $u, v, w$, die innerhalb einer gegebenen Begrenzung samt ihren Differentialquotienten stetig sind und dem System partieller Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0,\quad(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

wo

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\tag{2}$$

genügen und überdies an der Oberfläche gewisse Bedingungen erfüllen. Wenn die Oberflächenverschiebungen gegeben sind, so sind damit die Werte von $u, v, w$ an der Begrenzung vorgeschrieben. Wir wissen, daß die Lösung des Problems eindeutig bestimmt ist, falls $\mu$ und $3\lambda+2\mu$ positiv. Wenn die Oberflächenspannungen gegeben sind, so sind damit die Werte, die die drei Ausdrücke vom Typus

$$\lambda\Delta\cos(x,\nu)+\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial\nu}+\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial v}{\partial x}\cos(y,\nu)+\frac{\partial w}{\partial x}\cos(z,\nu)\right\}\tag{3}$$

an der Oberfläche annehmen, vorgeschrieben; dabei bezeichnet $\nu$ die Normale zur Grenzfläche. Wir wissen, daß das Problem nur dann

eine Lösung zuläßt, wenn die vorgeschriebenen Oberflächenspannungen die Bedingungen des Gleichgewichts für einen starren Körper erfüllen (§ 117). Wir wissen ebenfalls, daß; wenn diese Bedingungen befriedigt sind und wenn $\mu$ und $3\lambda + 2\mu$ positiv sind, die Lösung des Problems tatsächlich eindeutig ist in dem Sinne, daß Verzerrung und Spannung eindeutig bestimmt sind, während die Verschiebung noch die Überlagerung einer beliebigen kleinen, in einem starren Körper möglichen Verschiebung zuläßt.

## § 158. Auszug aus der Potentialtheorie.

Es besteht eine hervorragende Analogie zwischen den Methoden, die zur Lösung oben genannter Probleme ersonnen worden sind, und den Methoden, die man für die Lösung entsprechender Probleme in der Potentialtheorie ausgebildet hat. In der Potentialtheorie haben wir es mit dem Problem der Bestimmung einer Funktion $U$ zu tun, die außer den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen in allen Punkten innerhalb einer gegebenen Begrenzung der Gleichung

$$\nabla^2 U = 0 \tag{4}$$

genügt[1]) und überdies die Eigenschaft besitzt, daß in jedem Punkt der Oberfläche entweder a) $U$ selbst oder b) $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Im Falle b) muß das Oberflächenintegral $\iint \frac{\partial U}{\partial \nu}\, dS$, genommen über die Begrenzung, verschwinden, und in diesem Fall ist die Funktion $U$ bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt.

Zwei Wege sind es hauptsächlich, auf denen man diese Probleme anzugreifen vermag; wir können sie als die Reihenmethode und die Singularitätenmethode bezeichnen. Um die Reihenmethode zu erläutern, betrachten wir den Fall einer Kugelfläche. Es existiert eine unendliche Reihe von Funktionen, von denen jede rational, ganz und homogen in $x$, $y$, $z$ ist und die Gleichung (4) befriedigt. Der Ursprung falle in den Mittelpunkt der Kugel, $a$ sei der Radius der Kugel und $r$ bezeichne den Abstand eines beliebigen Punktes vom Ursprung. Jede der obigen Funktionen kann in der Form $r^n S_n$ ausgedrückt werden, wo $n$ eine ganze Zahl und $S_n$, von $r$ unabhängig, eine Funktion des Ortes auf der Kugel ist. Die Funktionen $S_n$ haben dann die Eigenschaft, daß eine willkürliche Funktion des Ortes auf der Kugel sich durch eine unendliche Reihe von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} A_n S_n$ ausdrücken

1) Eine Funktion von dieser Beschaffenheit nennt man „harmonisch“ in dem Bereich innerhalb der gegebenen Begrenzung.

läßt. Die Möglichkeit der Entwicklung knüpft sich an die konjugierte Eigenschaft der Funktionen $S_n$, die durch die Gleichung

$$\iint S_n S_m dS = 0 \tag{5}$$

ausgedrückt ist. Die Funktion $U$, die im Innern einer Kugel $r = a$ der Gleichung (4) genügt und an der Oberfläche die Werte einer willkürlichen Funktion annimmt, läßt sich ausdrücken in der Form

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^n}{a^n} S_n.$$

Wenn das Oberflächenintegral der willkürlichen Funktion über die Kugel verschwindet, so fehlt in der Entwicklung das Glied vom Grade null (d. h. der konstante Term). Die Funktion $U$, die der Gleichung (4) für $r < a$ genügt und die Eigenschaft besitzt, daß $\partial U/\partial v$ auf der Kugel $r = a$ vorgeschriebene Werte annimmt, drückt sich aus durch eine Gleichung von der Form

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{n a^{n-1}} S_n.$$

Die Anwendung der Reihenmethode auf die Elastizitätstheorie werden wir im nächsten Kapitel behandeln.

Die Singularitätenmethode stützt sich wesentlich auf das als Greenscher Satz bekannte Reziprozitätstheorem:

$$\iiint (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\,dx\,dy\,dz = \iint \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) dS, \tag{6}$$

worin $U$ und $V$ zwei beliebige Funktionen, die innerhalb eines räumlichen Bereichs den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen genügen; die Raumintegration ist über jenen Bereich (oder einen Teil desselben), die Oberflächenintegration über die Begrenzung des Bereichs (oder des Teils derselben) erstreckt. Die Normale $\nu$ ist nach außen gerichtet. Die Methode stützt sich ferner auf die Existenz einer Lösung von (4), die in einem bestimmten Punkt eine einfache Unendlichkeitsstelle (Pol) hat; eine derartige Lösung ist $1/r$, wo $r$ die Entfernung von jenem Punkte bezeichnet. Führen wir für $V$ die Funktion $1/r$ und als räumlichen Bereich das Gebiet ein, das nach außen von einer gegebenen Fläche $S$ und im Innern von einer Kugel $\Sigma$ mit dem Ursprung von $r$ als Mittelpunkt begrenzt ist, und gehen zur Grenze über, indem wir den Radius von $\Sigma$ unbegrenzt abnehmen lassen, so erhalten wir aus (6) die Gleichung

$$4\pi U = \iint \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu}\right) dS, \tag{7}$$

sodaß $U$ explicite durch die Oberflächenwerte von $U$ und $\partial U/\partial \nu$ ausgedrückt erscheint. Das Glied, das $\partial U/\partial \nu$ explicite enthält, stellt das

Potential einer „einfachen Schicht“ und dasjenige, welches $U$ explicite enthält, das Potential einer „Doppelschicht“ dar. Im allgemeinen können die Oberflächenwerte von $U$ und $\partial U/\partial \nu$ nicht gleichzeitig vorgeschrieben werden; der nächste Schritt ist demgemäß die Elimination von $U$ oder von $\partial U/\partial \nu$ — derjenigen Größe, die nicht gegeben ist. Dies gelingt durch Einführung der sogenannten „Greenschen Funktionen“. Eine Funktion $G$ sei durch folgende Bedingungen definiert: 1) sie sei in allen Punkten innerhalb $S$, außer im Ursprung von $r$, harmonisch, 2) sie besitze in diesem Punkt einen einfachen Pol mit dem Residuum eins, 3) sie verschwinde in allen Punkten von $S$. Die Funktion $G$ möge schlechthin als die „Greensche Funktion für die betr. Fläche und den betr. Punkt“ bezeichnet werden. Die Funktion $G - 1/r$ ist innerhalb $S$ harmonisch und in allen Punkten von $S$ gleich $-1/r$, und wir haben die Gleichung

$$\iint\left[U\frac{\partial}{\partial \nu}\left(G-\frac{1}{r}\right)-\left(G-\frac{1}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial \nu}\right]dS=0.$$

Da $G$ in allen Punkten von $S$ verschwindet, so finden wir, daß (7) sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$4\pi U=-\iint U\frac{\partial G}{\partial \nu}\,dS. \tag{8}$$

Somit kann $U$ durch seine Oberflächenwerte ausgedrückt werden, wenn $G$ sich ermitteln läßt.

Sind an der Oberfläche die Werte von $\partial U/\partial \nu$ gegeben, so führen wir eine Funktion $\Gamma$ ein, die durch folgende Bedingungen definiert ist: 1) sie sei in allen Punkten innerhalb $S$, außer im Ursprung von $r$ und einem vorgegebenen Punkt $A$, harmonisch, 2) sie besitze in diesen Punkten einfache Pole mit den Residuen $+1$ und $-1$, 3) $\partial \Gamma/\partial \nu$ verschwinde in allen Punkten von $S$. Wir erhalten für $U$ die Gleichung

$$4\pi(U-U_A)=\iint\Gamma\frac{\partial U}{\partial \nu}\,dS. \tag{9}$$

Sonach kann $U$ tatsächlich durch die Oberflächenwerte von $\partial U/\partial \nu$ ausgedrückt werden, wenn $\Gamma$ bekannt ist. Die Funktion $\Gamma$ wird zuweilen die „zweite Greensche Funktion“ genannt.

Die Greensche Funktion $G$ für eine bestimmte Fläche und einen bestimmten Punkt kann man deuten als das elektrische Potential, das von einer punktförmigen Ladung bei Gegenwart einer nichtisolierten leitenden Fläche herrührt. Die zweite Greensche Funktion $\Gamma$ für eine bestimmte Fläche, einen Punkt $P$ und einen vorgegebenen Punkt $A$ kann man deuten als das Geschwindigkeitspotential einer inkompressiblen Flüssigkeit innerhalb starrer Wände, das von einer Quelle und Senke in $P$ und $A$ her-

rührt. Die Funktionen $G$ und $\Gamma$ sind für einige wenige Flächen, von denen Ebene und Kugel[1]) die wichtigsten sind, bekannt.

Die Existenz Greenscher Funktionen für beliebige Flächen und die Existenz von Funktionen, die innerhalb einer Begrenzung harmonisch sind und an der Oberfläche vorgeschriebene Werte annehmen bezw. vorgeschriebene Werte der Ableitung nach der Normalen haben, ist nicht ohne weiteres evident. Die Versuche, die betr. Existenztheoreme zu beweisen, haben zu einer höchst interessanten mathematischen Theorie Anlaß gegeben. Man hat Methoden ersonnen, um die Funktionen durch einen konvergenten Prozeß tatsächlich zu konstruieren[2]); diese allerdings ziemlich verwickelten Methoden haben sich bei gewissen Klassen von Flächen (z. B. bei überall konvexen Flächen) als erfolgreich erwiesen, sofern für den Grad der Willkürlichkeit der vorgeschriebenen Oberflächenwerte zweckmäßige Beschränkungen eingeführt werden.

Ähnliche Existenztheoreme kommen in der Elastizitätstheorie in Frage; doch ist man mit den Beweisen noch verhältnismäßig wenig fortgeschritten.

## § 159. Schilderung der Bettischen Integrationsmethode.

Die Übertragung der Singularitätenmethode auf die Elastizitätstheorie gab Betti[3]), der für die Dilatation $\Delta$ und die Drehung ($\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$) Formeln entwickelte, die der Gleichung (7) analog sind und explicite die Oberflächenspannungen und Oberflächenverschiebungen enthalten. In diesen Formeln treten spezielle Verschiebungssysteme auf, die in Kap. VIII erhalten wurden. Da $\Delta$ harmonisch, so lassen sich die Gleichungen (1) wie folgt schreiben:

$$\nabla^2[u + \tfrac{1}{2}(1 + \lambda/\mu)x\Delta] = 0, \text{ usw.}; \tag{10}$$

die Bestimmung von $u$, $v$, $w$ ist somit, wenn $\Delta$ bekannt ist und die Oberflächenwerte von $u$, $v$, $w$ vorgeschrieben sind, auf ein Problem der Potentialtheorie zurückgeführt. Sind die Oberflächenspannungen ($X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$) vorgeschrieben, so bemerken wir, daß die Grenzbedingungen sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{2\mu} X_\nu - \frac{\lambda}{2\mu}\Delta \cos(x,\nu) + \varpi_y \cos(z,\nu) - \varpi_z \cos(y,\nu), \text{ usw}; \tag{11}$$

wenn also $\Delta$ und $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ gefunden sind, so sind die Oberflächenwerte von $\partial u/\partial \nu$, $\partial v/\partial \nu$, $\partial w/\partial \nu$ bekannt, und das Problem ist wiederum auf ein Problem der Potentialtheorie zurückgeführt. Wesentlich an der Bettischen Integrationsmethode ist sonach die Bestimmung von $\Delta$ und von $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ aus den vorgeschriebenen Oberflächenverschiebungen oder Oberflächenspannungen mittels spezieller Hilfslösungen, die den Greenschen Funktionen analog sind.

1) Siehe z. B. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, 2. Aufl., Oxford 1881, und W. M. Hicks, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 171 (1880).

2) Siehe z. B. Poincaré, *Théorie du potentiel Newtonien*, Paris 1899.

3) Siehe *Einleitung*, Fußnote 65.



## § 160. Formel für die Dilatation.

Die zu (7) analoge Formel kann mit Hilfe des in § 121 bewiesenen Reziprozitätstheorems abgeleitet werden. Wenn keine Massenkräfte wirken, nimmt das Theorem die Form an

$$\iint (X_\nu u' + Y_\nu v' + Z_\nu w')\, dS = \iint (X_\nu' u + Y_\nu' v + Z_\nu' w)\, dS, \quad (12)$$

worin $(u, v, w)$ eine den Gleichungen (1) genügende Verschiebung und $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ die entsprechenden Oberflächenspannungen, ferner $(u', v', w')$ ein zweites Verschiebungssystem und $X_\nu'$, $Y_\nu'$, $Z_\nu'$ die entsprechenden Oberflächenspannungen. Die Integration ist über die Oberfläche eines Bereichs erstreckt, innerhalb dessen $u$, $v$, $w$ und $u'$, $v'$, $w'$ den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichungen (1) genügen. Für $u'$, $v'$, $w'$ setzen wir die in (20), § 132, gegebenen Ausdrücke. Wir bezeichnen dieselben, unter Weglassung eines Faktors, abkürzend mit $u_0$, $v_0$, $w_0$ und die entsprechenden Oberflächenspannungen mit $X_\nu^{(0)}$, $Y_\nu^{(0)}$ $Z_\nu^{(0)}$. Wir schreiben

$$(u_0, v_0, w_0) = \left(\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial r^{-1}}{\partial y}, \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right); \quad (13)$$

der fragliche Bereich muß dann im Innern durch eine geschlossene Fläche, die den Ursprung von $r$ umgibt, begrenzt sein. Wir nehmen an, diese Fläche sei eine Kugel $\Sigma$, und wollen zur Grenze übergehen, indem wir den Radius dieser Kugel unbegrenzt abnehmen lassen. Als äußere Begrenzung des Bereichs werden wir die Oberfläche $S$ des Körpers annehmen.

Da die Werte von $\cos(x, \nu), \ldots$ auf $\Sigma$ gleich $-x/r$, $-y/r$, $-z/r$ sind, so liefert $\Sigma$ zur linken Seite von (12) den Anteil

$$\begin{aligned}\iint \Big\{ &-\Big[\frac{x}{r}\Big(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{y}{r}\mu\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) \\ &\qquad + \frac{z}{r}\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big]\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \\ &-\Big[\frac{x}{r}\mu\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{y}{r}\Big(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\Big) \\ &\qquad + \frac{z}{r}\mu\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big)\Big]\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} \\ &-\Big[\frac{x}{r}\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \frac{y}{r}\mu\Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big) \\ &\qquad + \frac{z}{r}\Big(\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\Big]\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\Big\}\, d\Sigma,\end{aligned}$$

der gleich

$$\iint\left[\lambda\frac{\Delta}{r^2}+2\mu\left(\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{z^2}{r^4}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]d\Sigma$$

$$+\iint 2\mu\left[\frac{yz}{r^4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{zx}{r^4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{xy}{r^4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]d\Sigma$$

ist. Alle Integrale vom Typus $\iint yz\,d\Sigma$ verschwinden, und jedes der Integrale vom Typus $\iint x^2 d\Sigma$ ist gleich $\frac{1}{3}4\pi r^4$; somit ist der Grenzwert des obigen Ausdrucks, wenn der Radius von $\Sigma$ unbegrenzt abnimmt, gleich $4\pi(\lambda+\frac{2}{3}\mu)(\Delta)_0$, wo $(\Delta)_0$ den Wert von $\Delta$ im Ursprung von $r$ bezeichnet.

Da andererseits die Werte von $X_\nu^{(0)}$, $Y_\nu^{(0)}$, $Z_\nu^{(0)}$ durch Formeln vom Typus

$$X_\nu^{(0)}=2\mu\left[\cos(x,\nu)\frac{\partial}{\partial x}+\cos(y,\nu)\frac{\partial}{\partial y}+\cos(z,\nu)\frac{\partial}{\partial z}\right]\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}$$

ausgedrückt sind, so liefert $\Sigma$ zur rechten Seite von (12) den Anteil

$$2\mu\iint -2\,\frac{ux+vy+wz}{r^4}\,d\Sigma.$$

Nun verschwinden Integrale wie $\iint x\,d\Sigma$; wir entwickeln daher die Funktionen $u, v, w$ in der Umgebung des Ursprungs von $r$ in Reihen von der Form

$$u=(u)_0+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\cdots$$

und brechen mit den ersten Potenzen von $x, y, z$ ab. Dann geht beim Grenzübergang, wenn der Radius von $\Sigma$ unbegrenzt abnimmt, obiger Anteil über in

$$-\frac{16}{3}\pi\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right]$$

oder $-\frac{16}{3}\pi\mu(\Delta)_0$. Gleichung (12) liefert daher das Resultat

$$4\pi(\lambda+2\mu)(\Delta)_0=\iint[(X_\nu^{(0)}u+Y_\nu^{(0)}v+Z_\nu^{(0)}w)$$
$$-(X_\nu u_0+Y_\nu v_0+Z_\nu w_0)]dS. \qquad (14)$$

Die Formel (14) bildet mit bezug auf die Dilatation das Analogon zu (7).

Diese Formel wurde hier durch ein rein analytisches Verfahren abgeleitet; man kann zu ihr aber auch auf synthetischem Wege[1])

---

1) J. Dougall, *Edinburgh Math. Soc. Proc.*, vol. 16 (1898). Wie Bettis Reziprozitätstheorem zeigt, ist die Arbeit, die von den Spannungen $X_\nu, \ldots$ auf die Oberfläche $S$ längs der Verschiebung $(u_0, v_0, w_0)$ geleistet wird, gleich der Ar-

durch Deutung der Verschiebung $(u_0, v_0, w_0)$ gelangen. Diese Verschiebung würde in einem Körper (der durch geeignete Oberflächenkräfte gehalten wird) durch gewisse im Ursprung von $r$ angreifende Kräfte hervorgebracht werden können. Im Ursprung selbst mögen Kräfte je von der Größe $P$ in den positiven Richtungen der Koordinatenachsen angebracht werden, und gleiche und entgegengesetzte Kräfte mögen in den negativen Richtungen der $(x, y, z)$-Achsen bezüglich in den Punkten $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$ angreifen. Wir wollen zur Grenze übergehen, indem wir $P$ unbegrenzt wachsen und $h$ in dem Maße unbegrenzt abnehmen lassen, daß $\lim Ph = 4\pi(\lambda + 2\mu)$. Aus § 132 wissen wir, daß dann die Verschiebung $(u_0, v_0, w_0)$ eintritt, und die Arbeit, die von obigem System in und nahe bei dem Ursprung angreifender Kräfte längs der Verschiebung $(u, v, w)$ geleistet wird, ist offenbar gleich $-4\pi(\lambda + 2\mu)(\Delta)_0$.

## § 161. Berechnung der Dilatation aus Oberflächendaten.

a) Wenn die Oberflächenverschiebungen vorgeschrieben sind, so sind $u, v, w$ in allen Punkten von $S$ gegeben, aber $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ sind nicht gegeben. In diesem Falle suchen wir eine Verschiebung, die in allen Punkten innerhalb $S$ den gewöhnlichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichungen (1) genügt und in allen Punkten von $S$ gleich $(u_0, v_0, w_0)$ wird. Diese Verschiebung bezeichnen wir mit $(u_0', v_0', w_0')$ und die entsprechenden Oberflächenspannungen mit $X_\nu'^{(0)}$, $Y_\nu'^{(0)}$, $Z_\nu'^{(0)}$. Wir können dann das Reziprozitätstheorem auf die Verschiebungen $(u, v, w)$ und $(u_0', v_0', w_0')$, die innerhalb $S$ keine Singularitäten besitzen, anwenden und erhalten das Resultat

$$\iint (X_\nu'^{(0)} u + Y_\nu'^{(0)} v + Z_\nu'^{(0)} w)\, dS = \iint (X_\nu u_0' + Y_\nu v_0' + Z_\nu w_0')\, dS$$
$$= \iint (X_\nu u_0 + Y_\nu v_0 + Z_\nu w_0)\, dS.$$

Wir können daher Gleichung (14) in der Form schreiben

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\,(\Delta)_0 = \iint [(X_\nu^{(0)} - X_\nu'^{(0)})u + (Y_\nu^{(0)} - Y_\nu'^{(0)})v + (Z_\nu^{(0)} - Z_\nu'^{(0)})w]\, dS. \tag{15}$$

Die Größen $X_\nu^{(0)} - X_\nu'^{(0)}, \ldots$ sind die aus den Verschiebungen $u_0 - u_0', \ldots$ berechneten Oberflächenspannungen und bedeuten daher die Spannungen, die nötig sind, um die Oberfläche festzuhalten, wenn sich im Ursprung von $r$ ein „Kompressionszentrum" befindet. Um also die Dilatation in einem beliebigen Punkt zu finden, müssen wir

beit, die von gewissen in und nahe bei dem Ursprung angreifenden Kräften längs der Verschiebung $(u, v, w)$ geleistet wird, samt der Arbeit, die die Spannungen $X_\nu^{(0)}, \ldots$ auf die Oberfläche $S$ längs derselben Verschiebung leisten.

die Oberflächenspannungen berechnen, die nötig sind, um die Oberfläche festzuhalten, wenn sich in dem Punkte ein Kompressionszentrum befindet; und zu diesem Zweck müssen wir eine Verschiebung bestimmen, welche 1) überall, außer in jenem Punkte, den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichungen des Gleichgewichts genügt, 2) in der Nähe des Punktes dem Wert unendlich zustrebt, wie wenn sich ein Kompressionszentrum in dem Punkte befände, 3) an der Oberfläche verschwindet. Letztere Verschiebung bildet ein Analogon zur Greenschen Funktion.

b) Wenn die Oberflächenspannungen gegeben sind, so bemerken wir zunächst, daß $X_\nu^{(0)}$, $Y_\nu^{(0)}$, $Z_\nu^{(0)}$ ein System von Oberflächenspannungen bilden, das den Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers genügt. $(u_0'', v_0'', w_0'')$ sei die Verschiebung, die diese Oberflächenspannungen in dem Körper hervorrufen. Wir können auf die Verschiebungen $(u, v, w)$ und $(u_0'', v_0'', w_0'')$, die innerhalb $S$ keinerlei Singularitäten besitzen, das Reziprozitätstheorem anwenden und erhalten das Resultat

$$\iint (X_\nu^{(0)} u + Y_\nu^{(0)} v + Z_\nu^{(0)} w)\,dS = \iint (X_\nu u_0'' + Y_\nu v_0'' + Z_\nu w_0'')\,dS;$$

wir können dann die Gleichung (14) in der Form schreiben

$$4\pi(\lambda + 2\mu)(\Delta)_0 = \iint \{X_\nu(u_0'' - u_0) + Y_\nu(v_0'' - v_0) + Z_\nu(w_0'' - w_0)\}\,dS. \quad (16)$$

Um also die Dilatation in einem beliebigen Punkt zu finden, müssen wir die Verschiebung bestimmen, die in dem Körper eintritt, wenn die Oberfläche spannungsfrei ist und in jenem Punkte sich ein Dilatationszentrum befindet. Diese Verschiebung ist $(u_0'' - u_0, v_0'' - v_0, w_0'' - w_0)$; sie bildet ein Analogon zur Greenschen Funktion.

Die Dilatation läßt sich bestimmen, wenn die Verschiebung $(u_0'', v_0'' w_0'')$ gefunden werden kann. Sind die entsprechenden Oberflächenspannungen gegeben, so ist diese Verschiebung unbestimmt, insofern irgend eine kleine in einem starren Körper mögliche Verschiebung über sie überlagert werden kann. Aus Gleichung (16) ist leicht zu erkennen, daß diese Unbestimmtheit den Wert der Dilatation nicht berührt.

## § 162. Formeln für die Drehungskomponenten.

Wir wenden die Formeln (12) auf einen Bereich an, der nach außen von der Oberfläche $S$ des Körpers und nach innen von der Oberfläche $\Sigma$ einer kleinen, den Ursprung von $r$ umgebenden Kugel begrenzt ist, und führen für $(u', v', w')$ die in (22), § 132, gegebene Verschiebung ein. Wir bezeichnen diese Verschiebung, unter Weglassung eines Faktors, abkürzend

mit $(u_4, v_4, w_4)$[1]) und die entsprechenden Oberflächenspannungen mit $X_\nu^{(4)}$, $Y_\nu^{(4)}$, $Z_\nu^{(4)}$. Wir schreiben

$$(u_4, v_4, w_4) = \left(0, \ \frac{\partial r^{-1}}{\partial z}, \ -\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right). \tag{17}$$

Die Anteile, die $\Sigma$ zur linken und rechten Seite von (12) liefert, lassen sich nach dem Verfahren von § 160 berechnen. Wir finden, daß der zur linken Seite gelieferte Anteil verschwindet und daß der Anteil zur rechten Seite gleich $8\pi\mu(\varpi_x)_0$ ist, wo $(\varpi_x)_0$ den Wert von $\varpi_x$ im Ursprung von $r$ bedeutet. Wir erhalten daher die Formel

$$8\pi\mu(\varpi_x)_0$$
$$= \iint \{X_\nu u_4 + Y_\nu v_4 + Z_\nu w_4) - (X_\nu^{(4)} u + Y_\nu^{(4)} v + Z_\nu^{(4)} w)\} dS, \tag{18}$$

die zu (7) analog ist. Zu demselben Resultat gelangen wir durch die Überlegung, daß $(u_4, v_4, w_4)$ nichts anderes ist als die Verschiebung, die von den im Ursprung in der positiven $y$- und der negativen $z$-Richtung angreifenden Kräften $4\pi\mu/h$ und den gleichen und entgegengesetzten Kräften in $(0, 0, h)$ und $(0, h, 0)$ herrührt, wobei $h$ unbegrenzt abnehmend gedacht ist. Die Arbeit, die von diesen Kräften längs der Verschiebung $(u, v, w)$ geleistet wird, ist offenbar in der Grenze gleich $4\pi\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$. Für $\varpi_y$ und $\varpi_z$ lassen sich Formeln vom gleichen Typus wie (18) hinschreiben.

## § 163. Berechnung der Drehung aus Oberflächendaten.

a) Wenn die Oberflächenverschiebungen gegeben sind, führen wir eine Verschiebung $(u_4', v_4', w_4')$ ein, die den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichgewichtsgleichungen (1) genügt und an der Oberfläche den Wert $(u_4, v_4, w_4)$ annimmt; wir bezeichnen die entsprechenden Oberflächenspannungen mit $X_\nu'^{(4)}$, $Y_\nu'^{(4)}$, $Z_\nu'^{(4)}$. Gleichung (18) läßt sich dann schreiben

$$8\pi\mu(\varpi_x)_0$$
$$= \iint \{(X_\nu'^{(4)} - X_\nu^{(4)})u + (Y_\nu'^{(4)} - Y_\nu^{(4)})v + (Z_\nu'^{(4)} - Z_\nu^{(4)})w\} dS; \tag{19}$$

hierin bedeuten die Größen $X_\nu'^{(4)} - X_\nu^{(4)}$ die Oberflächenspannungen, die nötig sind, um die Oberfläche fest zu halten, wenn im Ursprung ein Kräftepaar vom Moment $8\pi\mu$ um die $x$-Achse in der Weise angebracht ist, daß dieser Punkt ein „Zentrum einer Rotation um die $x$-Achse" wird. Die entsprechende Verschiebung $(u_4' - u_4, v_4' - v_4, w_4' - w_4)$ bildet das Analogon zur Greenschen Funktion.

---

1) Diese Bezeichnung ist im Einklang mit der Bezeichnung $(u_1, v_1, w_1), \ldots$ von § 132 für die von gewissen gleich eins angenommenen Kräften herrührende Verschiebung gewählt.

b) Wenn die Oberflächenspannungen gegeben sind, so bemerken wir zunächst, daß die Spannungen $X_\nu^{(4)}$, $Y_\nu^{(4)}$, $Z_\nu^{(4)}$, weil statisch mit einem Kräftepaar gleichwertig, den Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers nicht genügen und daß daher keine Verschiebung existiert, die die üblichen Stetigkeitsbedingungen und die Gleichungen des Gleichgewichts erfüllt und überdies mit Oberflächenspannungen vom Betrage $X_\nu^{(4)}, \ldots$ verbunden ist.[1]) Wir müssen in einem bestimmten Punkt $A$ ein zweites Rotationszentrum einführen und zwar so, daß das Kräftepaar in $A$ demjenigen im Ursprung von $r$ gleich und entgegengesetzt ist. Sei $u_4^{(A)}$, $v_4^{(A)}$, $w_4^{(A)}$ die Verschiebung, die von einem Rotationszentrum in $A$ mit zur $x$-Achse paralleler Achse herrührt, sodaß

$$(u_4^{(A)},\ v_4^{(A)},\ w_4^{(A)}) = \left(0,\ \frac{\partial r_A^{-1}}{\partial z},\ -\frac{\partial r_A^{-1}}{\partial y}\right), \tag{20}$$

wo $r_A$ den Abstand von $A$ bedeutet. Wir bezeichnen mit $X_\nu''^{(4)}$, $Y_\nu''^{(4)}$, $Z_\nu''^{(4)}$ die aus der Verschiebung $(u_4 - u_4^{(A)},\ v_4 - v_4^{(A)},\ w_4 - w_4^{(A)})$ berechneten Oberflächenspannungen. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers werden von diesen Spannungen befriedigt. $(u_4'', v_4'', w_4'')$ sei die Verschiebung, die den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichgewichtsgleichungen genügt und überdies die Oberflächenspannungen $X_\nu''^{(4)}, \ldots$ veranlaßt. Bezeichnen wir dann mit $(\varpi_x)_A$ den Wert von $\varpi_x$ im Punkte $A$, so erhalten wir durch das bereits bei Ableitung von (18) benutzte Verfahren die Gleichung

$$\begin{aligned} &8\pi\mu\{(\varpi_x)_0 - (\varpi_x)_A\} \\ &= \iint [\{X_\nu(u_4 - u_4^{(A)}) + \cdots\} - \{X_\nu''^{(4)} u + \cdots\}]\, dS; \end{aligned}$$

hieraus wiederum gewinnen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 8\pi\mu\{(\varpi_x)_0 - (\varpi_x)_A\} = \iint \{ & X_\nu(u_4 - u_4^{(A)} - u_4'') \\ & + Y_\nu(v_4 - v_4^{(A)} - v_4'') + Z_\nu(w_4 - w_4^{(A)} - w_4'')\}\, dS. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Größen $u_4 - u_4^{(A)} - u_4'', \ldots$ sind die Verschiebungskomponenten, die in dem Körper von gleichen und entgegengesetzten Rotationszentren im Ursprung von $r$ und im Punkte $A$ mit zur $x$-Achse parallelen Achsen hervorgerufen werden, wenn die Oberfläche spannungsfrei ist. Diese Verschiebung bildet ein Analogon zur zweiten Greenschen Funktion.

Läßt sich eine derartige Verschiebung $(u_4'', v_4'', w_4'')$ ermitteln, so kann die Drehung bestimmt werden. Die Unbestimmtheit, die für diese Verschiebung aus dem Umstande sich ergibt, daß die Oberflächenbedingungen sich auf die Spannungen beziehen, hat auf den Wert der Drehung keinen Einfluß; dagegen ist die Unbestimmtheit, die von der additiven Konstanten $(\varpi_x)_A$ herrührt, von der bereits in § 157 besprochenen Art.

1) J. Dougall; *loc. cit.* p. 267.

## § 164. Von einer Ebene begrenzter Körper. — Formeln für die Dilatation.

Die Schwierigkeit, die Integration der Gleichungen in irgend einem speziellen Falle durchzuführen, knüpft sich an die Auffindung der Funktionen, die oben mit $u_0'$, $u_0''$, $u_4''$, ... bezeichnet wurden. Wenn die Begrenzung des Körpers von einer Ebene gebildet wird, lassen sich diese Funktionen bestimmen.[1]) Wie bereits (in § 135) bemerkt wurde, kann man die lokalen Wirkungen von Kräften, die an einem kleinen Teil der Oberfläche eines Körpers angreifen, aus der Lösung des Problems des Halbraums ableiten.

Die begrenzende Ebene sei $z = 0$, und der Körper liege auf der Seite, auf der $z > 0$. Sei $(x', y', z')$ ein beliebiger Punkt des Körpers, $(x', y', -z')$ das optische Bild dieses Punktes bezüglich der Ebene $z = 0$, und seien $r$, $R$ die Abstände eines Punktes $(x, y, z)$ von diesen beiden Punkten. Zur Bestimmung der Dilatation bei gegebenen Oberflächenverschiebungen brauchen wir eine Verschiebung $(u_0', v_0', w_0')$, die im Berich $z > 0$ den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichgewichtsgleichungen (1) genügt und außerdem auf der Ebene $z = 0$ den Wert $(u_0, v_0, w_0)$, d. h. $(\partial r^{-1}/\partial x, \partial r^{-1}/\partial y, \partial r^{-1}/\partial z)$, oder was dasselbe heißt, den Wert $(\partial R^{-1}/\partial x, \partial R^{-1}/\partial y, -\partial R^{-1}/\partial z)$ annimmt. Es läßt sich leicht zeigen[1]), daß die Funktionen $u_0'$, $v_0'$ $w_0'$ durch die Gleichungen gegeben sind

---

1) Die Anwendung der Bettischen Methode auf das Problem der Ebene wurde von Cerruti gegeben. (Siehe *Einleitung*, Fußnote 68.)

2) In der Tat, setzen wir $u_0'$, $v_0'$, $w_0'$ in der Form an

$$u_0' = \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} + z u', \quad v_0' = \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} + z v', \quad w_0' = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial z} + z w',$$

so erhalten wir für $u'$, $v'$, $w'$ die Gleichungen

$$z\left\{(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+\mu\nabla^2 u'\right\}+(\lambda+\mu)\frac{\partial w'}{\partial x}+2\mu\frac{\partial u'}{\partial z}$$
$$=2(\lambda+\mu)\frac{\partial^3 R^{-1}}{\partial x\,\partial z^2},$$

$$z\left\{(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+\mu\nabla^2 v'\right\}+(\lambda+\mu)\frac{\partial w'}{\partial y}+2\mu\frac{\partial v'}{\partial z}$$
$$=2(\lambda+\mu)\frac{\partial^3 R^{-1}}{\partial y\,\partial z^2},$$

$$z\left\{(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)+\mu\nabla^2 w'\right\}+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+2\frac{\partial w'}{\partial z}\right)$$
$$+2\mu\frac{\partial w'}{\partial z}=2(\lambda+\mu)\frac{\partial^3 R^{-1}}{\partial z^3};$$

$$\left.\begin{aligned} u_0' &= \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} + 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}, \\ v_0' &= \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} + 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z}, \\ w_0' &= -\frac{\partial R^{-1}}{\partial z} + 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die aus der Verschiebung $(u_0, v_0, w_0)$ berechneten Oberflächenspannungen $X_\nu^{(0)}$, $Y_\nu^{(0)}$, $Z_\nu^{(0)}$ auf die Ebene $z = 0$ sind, da $\cos(z, \nu) = -1$, durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} X_\nu^{(0)} &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z \partial x} = 2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z \partial x}, \\ Y_\nu^{(0)} &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z \partial y} = 2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z \partial y}, \\ Z_\nu^{(0)} &= -2\mu \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} = -2\mu \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2}; \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

die aus der Verschiebung $(u_0', v_0', w_0')$ berechneten Oberflächenspannungen $X_\nu'^{(0)}, \ldots$ auf die Ebene $z = 0$ drücken sich aus durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_\nu'^{(0)} &= -\mu\left(\frac{\partial u_0'}{\partial z} + \frac{\partial w_0'}{\partial x}\right) = -2\mu \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}, \\ Y_\nu'^{(0)} &= -\mu\left(\frac{\partial w_0'}{\partial x} + \frac{\partial v_0'}{\partial z}\right) = -2\mu \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z}, \\ Z_\nu'^{(0)} &= -\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_0'}{\partial x} + \frac{\partial v_0'}{\partial y} + \frac{\partial w_0'}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial w_0'}{\partial z}\right\} = 2\mu \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Wir bemerken, daß $X_\nu'^{(0)}$, $Y_\nu'^{(0)}$, $Z_\nu'^{(0)}$ bezüglich gleich den Produkten von $X_\nu^{(0)}$, $Y_\nu^{(0)}$, $Z_\nu^{(0)}$ und dem Zahlenfaktor $-(\lambda + \mu)/(\lambda + 3\mu)$ sind, daß mithin

$$(u_0'', v_0'', w_0'') = -\{(\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)\}(u_0', v_0', w_0').$$

Hieraus folgt, daß, wenn die Oberflächenverschiebungen gegeben sind, der Wert von $\Delta$ im Punkte $(x', y', z')$ ausgedrückt ist durch die Gleichung

---

dieselben werden sämtlich befriedigt von

$$u' = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial x \partial z}, \quad v' = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial y \partial z}, \quad w' = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \frac{\partial^2 R^{-1}}{\partial z^2};$$

denn diese Funktionen sind harmonisch und genügen der Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

$$\Delta = -\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\iint\left(\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\,\partial z}u + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y\,\partial z}v + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}w\right)dx\,dy, \tag{25}$$

wo die Integration über die $(x, y)$-Ebene ausgedehnt ist. Sind die Oberflächenspannungen gegeben, so hat $\Delta$ im Punkte $(x', y', z')$ den Wert

$$\Delta = -\frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\iint\left(X_\nu\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + Y_\nu\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + Z_\nu\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx\,dy. \tag{26}$$

## § 165. Von einer Ebene begrenzter Körper — gegeben die Oberflächenverschiebungen.

Die Formel (25) für die Dilatation in $(x', y', z')$ läßt sich schreiben

$$\Delta = -\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\frac{\partial}{\partial z'}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\iint\frac{u}{r}\,dx\,dy + \frac{\partial}{\partial y'}\iint\frac{v}{r}\,dx\,dy + \frac{\partial}{\partial z'}\iint\frac{w}{r}\,dx\,dy\right\}. \tag{27}$$

Führen wir vier Funktionen $L, M, N, \Phi$ durch die Definition

$$\left.\begin{aligned} L = \iint\frac{u}{r}\,dx\,dy, \quad M = \iint\frac{v}{r}\,dx\,dy, \quad N = \iint\frac{w}{r}\,dx\,dy,\\ \Phi = \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'} + \frac{\partial N}{\partial z'}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ein, so sind diese Funktionen von $x', y', z'$ auf jeder Seite der Ebene $z' = 0$ harmonisch, und in dieser Ebene haben $u, v, w$ die Werte $\lim\limits_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial L}{\partial z'}$, $\lim\limits_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial M}{\partial z'}$, $\lim\limits_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial N}{\partial z'}$. $\Delta$ hat in $(x', y', z')$ den Wert $-\frac{\mu}{\pi(\lambda+3\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}$, und die Gleichgewichtsgleichungen lassen sich schreiben

$$\left.\begin{aligned} \nabla'^2\left[u - \frac{\lambda+\mu}{2\pi(\lambda+3\mu)}z'\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right] = 0,\\ \nabla'^2\left[v - \frac{\lambda+\mu}{2\pi(\lambda+3\mu)}z'\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right] = 0,\\ \nabla'^2\left[w - \frac{\lambda+\mu}{2\pi(\lambda+3\mu)}z'\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

wo

$$\nabla'^2 = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2.$$

Die drei Funktionen

$$u - \{(\lambda+\mu)/2\pi(\lambda+3\mu)\}z'(\partial\Phi/\partial x') \quad \text{usw.}$$

sind im Gebiete $z' > 0$ harmonisch und nehmen auf der Ebene $z' = 0$ die Werte $-\frac{1}{2}\pi^{-1}(\partial L/\partial z'), \ldots$ an. Letztere Funktionen sind in demselben Be-

reiche selbst harmonisch. Daraus folgt, daß die Werte von $u, v, w$ in $(x', y', z')$ durch die Gleichungen gegeben sind[1])

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z' \frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \\ v &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial M}{\partial z'} + \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \\ w &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial N}{\partial z'} + \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} z' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Das einfachste Beispiel zu diesen Formeln liefert der Fall, wo $u$ und $v$ in allen Punkten der Oberfläche verschwinden, während $w$ in allen Punkten, ausgenommen einen sehr kleinen Bereich um den Ursprung, verschwindet. In diesem Falle bezieht sich die Integration nur auf die Punkte $(x, y, z)$ in unmittelbarer Nähe des Ursprungs, und $\Phi$ stellt das Potential einer im Ursprung liegenden Masse dar. Wir können die Akzente bei $x', y', z'$ unterdrücken und erhalten die Formel

$$u = A\frac{xz}{r^3}, \quad v = A\frac{yz}{r^3}, \quad w = A\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right),$$

die wir in § 131 betrachteten. Beim Problem der Ebene gibt diese Lösung die Verschiebung, die von einem im Ursprung lastenden Druck vom Betrag $-4\pi\mu\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}A$ herrührt, wenn die Ebene $z = 0$ in allen Punkten, die nicht in unmittelbarer Nähe des Ursprungs liegen, festgehalten wird.

## § 166. Von einer Ebene begrenzter Körper — gegeben die Oberflächenspannungen.[2])

Es erscheint unnötig, die Rechnung zur Bestimmung der Drehungen nach der allgemeinen Methode im einzelnen durchzugehen.

Die Formel (26) für $\Delta$ können wir auf die Form bringen

$$\Delta = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial \psi}{\partial z'}.$$

Um dies zu bewirken, führen wir eine Funktion $\chi$ ein, die die Eigenschaft hat, daß

$$\partial\chi/\partial z' = 1/r \quad \text{auf} \quad z = 0.$$

Die gewünschte Funktion drückt sich aus durch die Formel

$$\chi = \log(z + z' + R); \tag{31}$$

sie ist in dem betrachteten Raum harmonisch und besitzt die durch die Gleichungen

1) Die Resultate rühren her von Boussinesq. Siehe *Einleitung*, Fußnote 67.
2) Die Resultate verdankt man Cerruti. Siehe *Einleitung*, Fußnote 68.

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial z'} = \frac{1}{R} \tag{32}$$

ausgedrückte Eigenschaft.

Nun haben wir an der Oberfläche $z = 0$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial z' \partial x'}, \quad \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y' \partial z'},$$

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial z'^2}.$$

Schreiben wir daher

$$\left.\begin{aligned} F = \iint X_\nu \chi \, dx\, dy, \quad G = \iint Y_\nu \chi \, dx\, dy, \quad H = \iint Z_\nu \chi \, dx\, dy, \\ \psi = \frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial y'} + \frac{\partial H}{\partial z'}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

so ist der Wert von $\Delta$ in $(x', y', z')$ durch die Gleichungen gegeben

$$\Delta = \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi}{\partial z'}. \tag{34}$$

Wir bemerken ferner, daß die Funktionen $F$, $G$, $H$, $\psi$ harmonisch sind und daß die Werte von $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ auf $z' = 0$ gleich

$$\lim_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}, \quad \lim_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial z'^2}, \quad \lim_{z'=+0} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 H}{\partial z'^2}$$

sind. Nun lautet die dritte der Gleichgewichtsgleichungen

$$\nabla'^2 \left[ w + \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right] = 0$$

und die dritte der Randbedingungen

$$\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z'} = -Z_\nu$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial z'^2} - \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{\partial \psi}{\partial z'}.$$

Somit gilt für $z' = 0$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \left\{ w + \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right\} = \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial z'} + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \psi \right\}.$$

Daraus folgt, daß $w$ durch die Gleichung gegeben ist

$$w = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial z'} + \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)} \psi - \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial z'}. \tag{35}$$

Andererseits lautet die erste der Gleichgewichtsgleichungen

$$\nabla'^2 \left[ u + \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right] = 0$$

und die erste der Randbedingungen

$$-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial x'}\right) = X_\nu.$$

Somit gilt für $z' = 0$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\left[u + \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial x'}\right] = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial z'} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi}{\partial x'};$$

daraus folgt, daß $u$ durch die Gleichung gegeben ist

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial x'} - \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial x'}, \tag{36}$$

wo $\psi_1$ eine harmonische Funktion von der Eigenschaft, daß $\partial\psi_1/\partial z' = \psi$. Eine derartige Funktion können wir erhalten, indem wir eine Funktion $\Omega$ durch die Gleichung

$$\Omega = (z + z') \log (z + z' + R) - R \tag{37}$$

einführen. $\Omega$ ist dann in dem betrachteten Raum harmonisch und hat die Eigenschaft, daß

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z'} = \chi. \tag{38}$$

Schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} F_1 = \iint X_\nu \Omega\, dx\, dy, \quad G_1 = \iint Y_\nu \Omega\, dx\, dy, \quad H_1 = \iint Z_\nu \Omega\, dx\, dy, \\ \psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x'} + \frac{\partial G_1}{\partial y'} + \frac{\partial H_1}{\partial z'}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

so sind die Funktionen $F_1$, $G_1$, $H_1$, $\psi_1$ sämtlich in dem betrachteten Raum harmonisch und

$$\frac{\partial F_1}{\partial z'} = F, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z'} = G, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z'} = H, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z'} = \psi. \tag{40}$$

In derselben Weise, wie wir $u$ fanden, bestimmt sich $v$ in der Form

$$v = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial G}{\partial z'} - \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\lambda}{4\pi\mu(\lambda+\mu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial y'} - \frac{1}{4\pi\mu} z' \frac{\partial \psi}{\partial y'}. \tag{41}$$

In dem speziellen Fall eines im Ursprung wirkenden Drucks $P$ verschwinden überall die Spannungen $X_\nu$, $Y_\nu$, und $Z_\nu$ verschwindet außer in einem kleinen den Ursprung enthaltenden Bereich; es ist jedoch $\iint Z_\nu dx\, dy = P$. $F$ und $G$ verschwinden in diesem Fall, und

$$\psi = \frac{\partial H}{\partial z'} = \frac{P}{r},$$

wo $r$ den Abstand des Punktes $(x', y', z)$ vom Ursprung bedeutet. $F_1$ und $G_1$ verschwinden ebenfalls, und $\psi_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z'} = P \log (z' + r)$. Lassen wir die Akzente weg, so erhalten wir die Formeln (35), § 135.

## § 167. Historische Bemerkung.

Das Problem der Ebene — zuweilen auch „Problem von Boussinesq und Cerruti“ genannt — ist in zahlreichen Arbeiten behandelt worden. Wir ergänzen unsere in der Einleitung, p. 19, 20, gemachten Angaben durch folgende Bemerkungen: J. Boussinesq, *Paris C. R.*, t. 106 (1888), gab die Lösungen für eine allgemeinere Gattung von Randbedingungen (gegeben die Normalspannung und die tangentialen Verschiebungen oder die Normalverschiebung und die Tangentialspannungen). Diese Lösungen wurden von V. Cerruti, *Rom Acc. Lincei Rend.* (Ser. 4), t. 4 (1888) und von J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 183, nach andern Methoden abgeleitet. J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 32 (1901), p. 247, übertrug die Theorie auf äolotrope feste Körper, die Quer-Isotropie in den zur Oberfläche parallelen Ebenen besitzen. Die in § 165 und § 166 gegebenen Lösungen wurden von C. Somigliana in *Il Nuovo Cimento* (Ser. 3), t. 17—20 (1885—1886) nach einer neuen Methode gewonnen, die von G. Lauricella in *Il Nuovo Cimento* (Ser. 3), t. 36 (1894) weiter verfolgt wurde. Andere Methoden zur Ableitung dieser Lösungen sind entwickelt von H. Weber, *Part. Diff.-Gleichungen d. math. Physik,* Bd. 2, Braunschweig 1901, von H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 34 (1902), von O. Tedone, *Ann. di mat.* (Ser. 3), t. 8 (1903) und von R. Marcolongo, *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici,* Mailand 1904. Die Übertragung der Theorie auf den Fall eines von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers ist von H. Lamb, *loc. cit.*, kurz diskutiert worden, ausführlicher von J. Dougall, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.*, vol. 41 (1904) und gleichfalls von O. Tedone, *Rend. d. Circolo mat. di Palermo,* t. 18 (1904).

## § 168. Von einer Ebene begrenzter Körper. Weitere Resultate.

Bei Berechnung der Drehungskomponenten in dem Falle, wo die Oberflächenspannungen gegeben sind, können wir den in § 163, b) eingeführten Punkt $A$ in unendlicher Entfernung annehmen und $u_4^{(A)}, \ldots$ ganz weglassen. Wir erhalten dann für $u_4''$, $v_4''$, $w_4''$ die Ausdrücke

$$u_4'' = -2z\frac{\partial^3\chi}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y},$$

$$v_4'' = -2z\frac{\partial^3\chi}{\partial y^2\,\partial z} - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2},$$

$$w_4'' = -2z\frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial z^2} + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial z},$$

und wir bekommen die Formel

$$\varpi_x = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\psi}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right].$$

Ebenso können wir beweisen, daß

$$\varpi_y = \frac{1}{4\pi\mu}\left[-\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right].$$

Zur Berechnung von $\varpi_z$ brauchen wir eine Verschiebung, die zu denselben Oberflächenspannungen Anlaß gibt wie die Verschiebung $(\partial r^{-1}/\partial y, -\partial r^{-1}/\partial x, 0)$; offenbar ist diese Verschiebung gegeben durch $(-\partial R^{-1}/\partial y, \partial R^{-1}/\partial x, 0)$, und wir bekommen die Formel

$$\varpi_z = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\right).$$

b) Um ein Beispiel für gemischte Randbedingungen zu haben, betrachten wir den Fall, daß $u, v, Z_\nu$ auf $z = 0$ gegeben sind. Um $\Delta$ zu berechnen, brauchen wir eine Verschiebung $(u', v', w')$, die auf $z = 0$ den Bedingungen genügt

$$u' = u_0, \quad v' = v_0, \quad Z_\nu = Z_\nu'^{(0)},$$

wo $(X_\nu', Y_\nu', Z_\nu')$ die aus $(u', v', w')$ berechnete Oberflächenspannung. Wir können dann zeigen, daß der Wert von $\Delta$ im Ursprung von $r$ durch die Gleichung

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\Delta = \iint\{(X_\nu^{(0)} - X_\nu')u + (Y_\nu^{(0)} - Y_\nu')v - Z_\nu(w_0 - w')\}\,dx\,dy$$

gegeben ist. Ferner können wir zeigen, daß

$$u' = \frac{\partial R^{-1}}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial R^{-1}}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial R^{-1}}{\partial z},$$

und hierauf, daß

$$\Delta = \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)}\frac{\partial}{\partial z'}\left\{\frac{\partial H}{\partial z'} - 2\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\right)\right\};$$

für $(u, v, w)$ erhalten wir den Wert

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}z'\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{\partial H}{\partial z'} - 2\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\right)\right\},$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial M}{\partial z'} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}z'\frac{\partial}{\partial y'}\left\{\frac{\partial H}{\partial z'} - 2\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\right)\right\},$$

$$w = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{\partial H}{\partial z'} + \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)}\left\{\frac{\partial H}{\partial z'} - 2\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\right)\right\}$$
$$- \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}z'\frac{\partial}{\partial z'}\left\{\frac{\partial H}{\partial z'} - 2\mu\left(\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\right)\right\}.$$

c) Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, daß $X_\nu, Y_\nu, w$ auf $z = 0$ gegeben sind. Um $\Delta$ zu berechnen, brauchen wir eine Verschiebung $(u'', v'', w'')$, die auf $z = 0$ den Bedingungen genügt

$$X_\nu'' = X_\nu^{(0)}, \quad Y_\nu'' = Y_\nu^{(0)}, \quad w'' = w_0,$$

wo $X_\nu'', Y_\nu'', Z_\nu''$ die aus $(u'', v'', w'')$ berechneten Oberflächenspannungen bedeuten. Wir können beweisen, daß der Wert von $\Delta$ im Ursprung von $r$ durch die Gleichung

$$4\pi(\lambda + 2\mu)\Delta = \iint\{X_\nu(u'' - u_0) + Y_\nu(v'' - v_0) + (Z_\nu^{(0)} - Z_\nu'')w\}\,dx\,dy$$

gegeben ist und daß

$$u'' = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial x}, \quad v'' = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial y}, \quad w'' = -\frac{\partial R^{-1}}{\partial z};$$

wir finden dann für $\Delta$ die Formel

$$\Delta = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial y'} - 2\mu \frac{\partial N}{\partial z'}\right)$$

und für $(u, v, w)$ die Formeln

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial N}{\partial x'} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y'} - 2\mu N\right)$$
$$- \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} z' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial y'} - 2\mu \frac{\partial N}{\partial z'}\right),$$

$$v = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial G}{\partial z'} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial N}{\partial y'} + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x'} + \frac{\partial G_1}{\partial y'} - 2\mu N\right)$$
$$- \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} z' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial y'} - 2\mu \frac{\partial N}{\partial z'}\right),$$

$$w = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial N}{\partial z'} - \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} z' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial G}{\partial y'} - 2\mu \frac{\partial N}{\partial z'}\right).$$

## § 169. Formeln für Verschiebung und Verzerrung.

Mit Hilfe spezieller Lösungen, die die Wirkung einer Einzelkraft in einem Punkte darstellen, können wir der Formel (7) analoge Formeln für die Verschiebungen erhalten. $(u_1, v_1, w_1)$ stelle die Verschiebung dar, die von einer in $(x', y', z')$ in der Richtung der $x$-Achse wirkenden Kraft eins herrührt, so daß

$$(u_1, v_1, w_1) = -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{1}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z}\right); \quad (42)$$

$X_\nu^{(1)}$, $Y_\nu^{(1)}$, $Z_\nu^{(1)}$ seien die aus $(u_1, v_1, w_1)$ berechneten Oberflächenspannungen. Wir wenden auf die Verschiebungen $(u, v, w)$ und $(u_1, v_1, w_1)$ das Reziprozitätstheorem an und zwar für eine Begrenzung, die aus der Oberfläche $S$ des Körpers und der Oberfläche $\Sigma$ einer kleinen, $(x', y', z')$ umgebenden Kugel besteht, und gehen wie früher zur Grenze über. Den Anteil von $\Sigma$ können wir wie ehedem so bestimmen, daß wir die von der Kraft eins längs der Verschiebung $(u, v, w)$ geleistete Arbeit berechnen; zu demselben Resultat würden wir auf analytischem Wege gelangen. Wird der Körper sowohl von Massenkräften $(X, Y, Z)$ als auch von Oberflächenspannungen $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ beansprucht, so erhalten wir die Formeln[1])

$$\begin{aligned}(u)_0 = &\iiint \varrho\,(X u_1 + Y v_1 + Z w_1)\,dx\,dy\,dz \\ &+ \iint [(X_\nu u_1 + Y_\nu v_1 + Z_\nu w_1) - (X_\nu^{(1)} u + Y_\nu^{(1)} v + Z_\nu^{(1)} w)]\,dS,\end{aligned} \quad (43)$$

1) Die Formeln von diesem Typus verdankt man C. Somigliana, *Il Nuovo Cimento* (Ser. 3), t. 17—20 (1885, 1886) und *Ann. di mat.* (Ser. 2), t. 17 (1889).

wo die Raumintegration (im Sinne eines uneigentlichen Integrals) über den ganzen von $S$ eingeschlossenen Raum zu erstrecken ist. Auf dieselbe Weise würden wir finden

$$(v)_0 = \iiint \varrho (X u_2 + Y v_2 + Z w_2)\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \iint [(X_\nu u_2 + Y_\nu v_2 + Z_\nu w_2) - (X_\nu^{(2)} u + Y_\nu^{(2)} v + Z_\nu^{(2)} w)]\, dS$$

und

$$(w)_0 = \iiint \varrho (X u_3 + Y v_3 + Z w_3)\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \iint (X_\nu u_3 + Y_\nu v_3 + Z_\nu w_3) - (X_\nu^{(3)} u + Y_\nu^{(3)} v + Z_\nu^{(3)} w)]\, dS.$$

Auf diese Formeln hat man eine der Bettischen ähnliche Integrationsmethode gegründet.[1]) Bemerkenswert ist, daß keine Verschiebung existiert, die den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichgewichtsgleichungen (1) genügt und überdies die Oberflächenspannungen $X_\nu^{(1)}$, $Y_\nu^{(1)}$, $Z_\nu^{(1)}$ oder auch die Spannungen $X_\nu^{(2)}, \ldots$ bezw. $X_\nu^{(3)}, \ldots$ mit sich bringt; denn keines dieser Systeme erfüllt die Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers.[2]) Wenn die Oberflächenspannungen gegeben sind, so müssen wir außer den Kräften vom Betrage eins in $(x', y', z')$ gleiche und entgegengesetzte Kräfte eins in einem bestimmten Punkt $A$ und gewisse Kräftepaare in $A$ einführen, die zusammen mit den Kräften ein Gleichgewichtssystem liefern. Es sei $(u_1', v_1', w_1')$ die Verschiebung, die von der in der $x$-Richtung wirkenden Kraft eins in $(x', y', z')$ und der Kraft und dem Kräftepaar in $A$, die ihr das Gleichgewicht halten, herrührt; $X_\nu'^{(1)}$, $Y_\nu'^{(1)}$, $Z_\nu'^{(1)}$ seien die aus $(u_1', v_1', w_1')$ berechneten Oberflächenspannungen. Sei ferner $(u_1'', v_1'', w_1'')$ die Verschiebung, die den üblichen Stetigkeitsbedingungen und den Gleichgewichtsgleichungen (1) genügt und überdies mit Oberflächenspannungen vom Betrag $X_\nu^{(1)}$, $Y_\nu^{(1)}$, $Z_\nu^{(1)}$ verknüpft ist. Wir machen die Verschiebung völlig bestimmt durch die Annahme, daß sie und die entsprechende Drehung in $A$ verschwinden. Wir haben dann

$$(u)_0 = \iiint \varrho (X u_1' + Y v_1' + Z w_1')\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \iint \{X_\nu (u_1' - u_1'') + Y_\nu (v_1' - v_1'') + Z_\nu (w_1' - w_1'')\}\, dS. \quad (44)$$

Das Problem, $u$ zu bestimmen, ist somit auf die Ermittlung von $(u_1'', v_1'', w_1'')$ zurückgeführt. Die Verschiebung $(u_1' - u_1'', v_1' - v_1'', w_1' - w_1'')$ bildet ein Analogon zur zweiten Greenschen Funktion.

Wenn wir, statt die Verschiebung und die Drehung in $A$ verschwinden zu lassen, $A$ auf $(x', y', z')$ zurücken und in der Grenze mit diesem Punkt zusammenfallen lassen, so können wir für die Verzerrungskomponenten

1) G. Lauricella, Pisa Ann., t. 7 (1895) schreibt die Methode Volterra zu. Somigliana wendete sie auf das Problem der Ebene an in *Il Nuovo Cimento* (1885, 1886).

2) J. Dougall, *loc. cit.* p. 267.

Ausdrücke in den gegebenen Oberflächenspannungen erhalten.[1]) Wir bringen zunächst im Punkte $(x', y', z')$ und im Punkte $(x'+h, y', z')$ zwei Kräfte von der Größe $h^{-1}$ bezüglich in der positiven und in der negativen Richtung der $x$-Achse an. Nimmt $h$ unbegrenzt ab, so wird die Verschiebung, die von diesen Kräften herrührt, in der Grenze gleich $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)$. Sei $(u_{11}, v_{11}, w_{11})$ die Verschiebung, die in dem Körper von Oberflächenspannungen hervorgebracht wird, die die aus der Verschiebung $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)$ berechneten Werte haben. Dann hat $(\partial u/\partial x)$ im Punkte $(x', y', z')$ den durch folgende Formel gegebenen Wert:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\iiint \varrho \left(X\frac{\partial u_1}{\partial x} + Y\frac{\partial v_1}{\partial y} + Z\frac{\partial w_1}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$-\iint \left\{ X_\nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_{11}\right) + Y_\nu\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - v_{11}\right) + Z_\nu\left(\frac{\partial w_1}{\partial z} - w_{11}\right)\right\} dS. \quad (45)$$

In ähnlicher Weise können wir für $\partial v/\partial y$ und $\partial w/\partial z$ Formeln erhalten.

Wir bringen andererseits im Ursprung von $r$ Kräfte von der Größe $h^{-1}$ in der positiven Richtung der $y$-Achse und der $z$-Achse an, und gleiche Kräfte lassen wir in der negativen Richtung dieser Achsen bezüglich in den Punkten $(x', y', z'+h)$ und $(x', y'+h, z')$ angreifen und gehen wie vorhin zur Grenze über. Dies Kräftesystem genügt den Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Körpers, und die von ihm herrührende Verschiebung ist

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z},\ \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z},\ \frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right).$$

$(u_{23}, v_{23}, w_{23})$ sei die Verschiebung, die in dem Körper von Oberflächenspannungen hervorgebracht wird, deren Werte sich aus der Verschiebung $\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots, \ldots\right)$ berechnen. Wir verfahren wie vorhin und erhalten die Gleichung

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$$
$$= -\iiint \varrho \left\{ X\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\right\} dx\,dy\,dz$$
$$-\iint \left[ X_\nu\left\{\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) - u_{23}\right\} + Y_\nu\left\{\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) - v_{23}\right\}\right.$$
$$\left. + Z_\nu\left\{\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right) - w_{23}\right\}\right] dS. \quad (46)$$

Ebenso können wir Formeln für $\partial u/\partial z + \partial w/\partial x$ und $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y$ ableiten.

---

1) G. Lauricella, *loc cit.*

## § 170. Grundzüge verschiedener Integrationsmethoden.

Eine Methode, die zuweilen angewendet wird, geht von der Bemerkung aus, daß bei fehlenden Massenkräften sowohl $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ wie $\Delta$ innerhalb der Oberfläche des Körpers harmonische Funktionen sind und daß der Vektor $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ die solenoidale Bedingung

$$\frac{\partial \varpi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varpi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varpi_z}{\partial z} = 0$$

erfüllt. Diese Gleichung zeigt, daß $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ sich vermöge zweier unabhängiger harmonischer Funktionen ausdrücken lassen; in der Tat können wir schreiben[1])

$$\varpi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \chi}{\partial z} - z\frac{\partial \chi}{\partial y},$$
$$\varpi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \chi}{\partial x} - x\frac{\partial \chi}{\partial z},$$
$$\varpi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + x\frac{\partial \chi}{\partial y} - y\frac{\partial \chi}{\partial x},$$

wo $\Phi$ und $\chi$ harmonische Funktionen.

Die Gleichungen des Gleichgewichts bei fehlenden Massenkräften lassen sich in der Form schreiben

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu\left(\frac{\partial \varpi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varpi_y}{\partial z}\right) = 0, \quad \text{usw.}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \varpi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varpi_y}{\partial z} = -2\frac{\partial \chi}{\partial x} + x\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right) - y\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y} - z\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial z}$$
$$= -\left(2\frac{\partial \chi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi + x\frac{\partial \chi}{\partial x} + y\frac{\partial \chi}{\partial y} + z\frac{\partial \chi}{\partial z}\right);$$

daraus folgt, daß

$$\Delta = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}\left(\chi + x\frac{\partial \chi}{\partial x} + y\frac{\partial \chi}{\partial y} + z\frac{\partial \chi}{\partial z}\right).$$

Dieser Ausdruck stellt eine harmonische Funktion dar, wie es sein muß; die Größen $\Delta$, $\varpi_x$, $\varpi_y$, $\varpi_z$ lassen sich sonach durch zwei willkürliche Funktionen $\Phi$ und $\chi$ ausdrücken. Falls nun diese Funktionen sich so bestimmen lassen, daß die Randbedingungen erfüllt sind, so sind $\Delta$ und $(\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ gefunden. Diese Methode haben C. Borchardt[2]) und V. Cerruti[3]) erfolgreich auf das Problem der Kugel angewendet.

---

1) Vgl. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge 1895), p. 526—528.

2) *Berlin Monatsber.*, 1873.

3) *Comptes rendus de l'Association Française pour l'avancement de Science*, 1885, und *Rom Acc. Lincei Rend.* (Ser. 4), t. 2 (1886).

Eine andere Methode[1]) geht aus von der Bemerkung, daß (in der Bezeichnungsweise von § 132) $u_2 = v_1$, $u_3 = w_1$, $w_2 = v_3$, daß mithin die Oberflächenspannung $X_\nu^{(1)}$ sich ausdrücken läßt in der Form

$$X_\nu^{(1)} = l\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + \mu\left(l\frac{\partial u_1}{\partial x} + m\frac{\partial u_1}{\partial y} + n\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \mu\left(l\frac{\partial u_1}{\partial x} + m\frac{\partial u_2}{\partial x} + n\frac{\partial u_3}{\partial x}\right),$$

wo $l, m, n$ für $\cos(x, \nu)$, $\cos(y, \nu)$, $\cos(z, \nu)$ geschrieben ist. Die Oberflächenspannungen $X_\nu^{(2)}$, $X_\nu^{(3)}$ ergeben sich, wenn wir in dem Ausdruck für $X_\nu^{(1)}$ überall bezüglich $v$ und $w$ statt $u$ schreiben. Daraus folgt, daß ($X_\nu^{(1)}$, $X_\nu^{(2)}$, $X_\nu^{(3)}$) die *Verschiebung* ist, die von gewissen Doppelkräften hervorgerufen wird. Ebenso stellen ($Y_\nu^{(1)}$, $Y_\nu^{(2)}$, $Y_\nu^{(3)}$) und ($Z_\nu^{(1)}$, $Z_\nu^{(2)}$, $Z_\nu^{(3)}$) Verschiebungssysteme dar, die überall, außer im Ursprung von $r$, den Gleichungen (1) genügen.[2]) Auf dies Resultat gründet sich eine (der Methode von C. Neumann[3]) in der Potentialtheorie analoge) Methode zur Lösung des Problems, wo die Oberflächenverschiebungen gegeben sind, mittels Reihen.

1) G. Lauricella, *Pisa Ann.* t. 7 (1895), und *Ann. di mat.* (Ser. 2), t. 23 (1895), und *Il Nuovo Cimento* (Ser. 4), t. 9, 10 (1899).

2) Dies Resultat rührt her von C. Somigliana, *Ann. di mat.* (Ser. 2), t. 17 (1889).

3) *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential*, Leipzig, 1877. Vgl. Poincaré, *loc. cit.* p. 265.

## Kapitel XI.

### Das Gleichgewicht einer elastischen Kugel und verwandte Probleme.

§ 171. In diesem Kapitel soll in einer Reihe von Beispielen die Reihenmethode (§ 158) auf das Problem der Integration der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen elastischen festen Körpers angewendet werden. Von allen Problemen, die mittels dieser Methode gelöst worden sind, hat das der Kugel am meisten die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Wir werden bei Behandlung dieses Problems dem Verfahren von Lord Kelvin[1]) folgen, die auf cartesische Koordinaten bezogenen Gleichungen beibehalten, statt auf Polarkoordinaten zu transformieren, und die von ihm gegebene Lösung des Problems entwickeln. Die Lösung drückt sich aus mittels unendlicher Reihen, deren Glieder Kugelflächenfunktionen enthalten. Wir beginnen mit der Aufstellung einer allgemeinen Form der Lösung, in der solche Funktionen auftreten.

### § 172. Lösung in Kugelfunktionen von positivem Grade.

Es handelt sich um die Lösung der Gleichungen

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 (u, v, w) = 0, \tag{1}$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \tag{2}$$

Bedingung ist, daß $u$, $v$, $w$ in der Umgebung des Ursprungspunktes keine Singularitäten besitzen.

Da $\Delta$ eine harmonische Funktion, so können wir $\Delta$ als eine Summe von Kugelfunktionen von positivem Grad darstellen, deren Anzahl unendlich groß sein kann. Es sei $\Delta_n$ eine Kugelfunktion (sphe-

---

1) Siehe *Einleitung,* Fußnote 61. Andere Lösungen des Problems der Kugel werden in diesem Kapitel noch verschiedentlich zitiert werden, und ergänzende Nachweise gibt R. Marcolongo, *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici* (Mailand 1904), p. 280, 281.

rical solid harmonic) $n^{\text{ten}}$ Grades, d. h. eine rationale ganze homogene Funktion von $x, y, z$ vom Grade $n$, die der Laplaceschen Gleichung genügt; $\Delta$ hat dann die Form

$$\Delta = \sum \Delta_n,$$

wo die Summation auf die verschiedenen Werte von $n$ geht. Wir greifen ein Glied $\Delta_n$ aus der Reihe heraus und bemerken, daß $\partial \Delta_n / \partial x$ eine Kugelfunktion vom Grade $n-1$ ist und daß, wenn $r$ den Abstand des Punktes $(x, y, z)$ vom Ursprung bedeutet,

$$\nabla^2 \left( r^2 \frac{\partial \Delta_n}{\partial x} \right) = 2(2n+1) \frac{\partial \Delta_n}{\partial x}.$$

Wir erkennen, daß

$$u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial \Delta_n}{\partial x}, \quad \text{usw.}$$

partikuläre Integrale der Gleichungen (1) darstellen und daß wir allgemeinere Integrale erhalten, wenn wir zu diesen Ausdrücken beliebige in der Umgebung des Ursprungs der Laplaceschen Gleichung genügende Funktionen addieren, vorausgesetzt daß die Gesamtausdrücke für $u, \ldots$ den richtigen Wert für $\Delta$ liefern. Demgemäß integrieren sich die Gleichungen (1) und (2) in der Form

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \sum \Delta_n \\ (u, v, w) &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \sum \frac{r^2}{2(2n+1)} \left( \frac{\partial \Delta_n}{\partial x}, \frac{\partial \Delta_n}{\partial y}, \frac{\partial \Delta_n}{\partial z} \right) + \sum (U_n, V_n, W_n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

worin $U_n, V_n, W_n$ Kugelfunktionen vom Grade $n$, vorausgesetzt daß diese Funktionen der Gleichung genügen

$$\sum \Delta_n = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \sum \frac{n}{2n+1} \Delta_n + \sum \left( \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Führen wir die Bezeichnung

$$\psi_n = \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial W_{n+1}}{\partial z} \quad (5)$$

ein, so stellt $\psi_n$ eine Kugelfunktion $n^{\text{ten}}$ Grades dar, und Gleichung (4) verlangt, daß $\Delta_n$ und $\psi_n$ durch folgende Gleichung verknüpft sind:

$$\Delta_n = \frac{(2n+1)\mu}{n\lambda + (3n+1)\mu} \psi_n. \quad (6)$$

Die harmonische Funktion $\Delta_n$ erscheint somit ausgedrückt durch die Hilfsfunktionen $U_{n+1}, \ldots$; die Integrale (3) selbst stellen sich als Summen homogener Funktionen $n^{\text{ten}}$ Grades in der Form dar

$$(u, v, w) = -\sum M_n r^2 \left( \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} \right) + \sum (U_n, V_n, W_n), \quad (7)$$

wo $U_n$, $V_n$, $W_n$ Kugelfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades, $M_n$ die durch die Gleichung

$$M_n = \frac{1}{2} \frac{\lambda + \mu}{(n-1)\lambda + (3n-2)\mu} \tag{8}$$

ausgedrückte Konstante und $\psi_{n-1}$ eine Kugelfunktion vom Grade $n-1$, die sich durch die Gleichung bestimmt

$$\psi_{n-1} = \frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z}. \tag{9}$$

Wir bemerken, daß die Gleichungen (7) auch dann eine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen liefern, wenn $n$ negativ ist; eine derartige Lösung ist aber natürlich nur in Bereichen gültig, die den Ursprung nicht enthalten. Wir setzen z. B. $n = -1$ und

$$U_n = 0, \quad V_n = 0, \quad W_n = \frac{1}{r}.$$

Wir erhalten dann die in § 131 diskutierte Lösung.

## § 173. Die Kugel bei gegebenen Oberflächenverschiebungen.

In einem beliebigen räumlichen Bereich, der den Koordinatenanfang enthält, stellen die Gleichungen (7) ein Integralsystem der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen festen Körpers dar, der von der Wirkung von Massenkräften frei ist. Wir können dasselbe gegebenen Bedingungen an der Oberfläche einer Kugel vom Radius $a$ anpassen. Wenn die Oberflächenverschiebungen vorgeschrieben sind, so dürfen wir annehmen, daß die gegebenen Werte von $u$, $v$, $w$ auf $r = a$ sich als Summen von Kugelflächenfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades in folgender Form darstellen lassen:

$$(u, v, w)_{r=a} = \sum (A_n, B_n, C_n). \tag{10}$$

$r^n A_n$, $r^n B_n$, $r^n C_n$ sind dann gegebene Kugelfunktionen vom Grade $n$.

Wir greifen nun aus (7) die Glieder heraus, die Kugelflächenfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades enthalten. Wir erkennen, daß für $r = a$ folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r^n}{a^n} A_n &= -M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} + U_n, \\ \frac{r^n}{a^n} B_n &= -M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} + V_n, \\ \frac{r^n}{a^n} C_n &= -M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial z} + W_n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die rechten und linken Seiten dieser Gleichungen stellen nun aber Kugelfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades dar, die an der Oberfläche $r = a$ bezüglich einander gleich sind. Hieraus folgt, daß sie für alle Werte

von $x$, $y$, $z$ einander gleich sind. Demnach können wir die Gleichungen (11) benutzen, um $U_n$, $V_n$, $W_n$ in $A_n$, $B_n$, $C_n$ auszudrücken.

Zu diesem Zwecke differentiieren wir die linken und rechten Seiten der Gleichungen (11) bezüglich nach $x$, $y$, $z$ und summieren. Unter Benutzung der Gleichung (9) finden wir die Gleichung

$$\psi_{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^n}{a^n}A_n\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r^n}{a^n}B_n\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^n}{a^n}C_n\right). \tag{12}$$

Damit sind die Funktionen $\psi_n$ sämtlich in den entsprechenden $A_n$, $B_n$, $C_n$ ausgedrückt, und $U_n, \ldots$ sind dann durch die Gleichung gegeben

$$U_n = \frac{r^n}{a^n}A_n + M_{n+2}a^2\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x}, \quad \text{usw.}$$

Die Integrale (7) lassen sich nunmehr in der Form schreiben

$$(u, v, w) = \sum \frac{r^n}{a^n}(A_n, B_n, C_n)$$
$$+ \sum M_{n+2}(a^2 - r^2)\left(\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y}, \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial z}\right), \tag{13}$$

worin

$$M_{n+2} = \frac{1}{2}\frac{\lambda + \mu}{(n+1)\lambda + (3n+4)\mu}$$

und

$$\psi_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{n+2}}{a^{n+2}}A_{n+2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r^{n+2}}{a^{n+2}}B_{n+2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^{n+2}}{a^{n+2}}C_{n+2}\right).$$

Die Gleichungen (13) drücken die Verschiebung in einem beliebigen Punkt durch die vorgeschriebenen Verschiebungen an der Oberfläche der Kugel aus.

## § 174. Verallgemeinerung der vorstehenden Lösung.

1) Die Ausdrücke (7) stellen allgemeine Integrale der Gleichgewichtsgleichungen dar, die als Summen homogener Funktionen von $x$, $y$, $z$ von verschiedenem ganzzahligen Grade geordnet sind. Greifen wir einige der Glieder niederer Ordnung heraus und versehen sie mit unbestimmten Koeffizienten, so können wir für eine Anzahl spezieller Probleme Lösungen erhalten. Nach diesem Verfahren ist die Verschiebung, die in einem Ellipsoid durch Rotation um eine Achse hervorgerufen wird, gefunden worden.[1])

2) Lassen wir die Glieder von der Form $A_n(r/a)^n$ auf der rechten Seite der Gleichungen (13) weg, so gelangen wir zu einer Verschiebung,

1) C. Chree, *Quart. J. of Math.* vol. 23 (1888). Chree hat die Methode in dieser und in einer früheren Abhandlung in derselben Zeitschrift, vol. 22 (1886), noch auf eine Reihe anderer Probleme angewendet.

die durch die Gleichung ausgedrückt ist

$$(u,\ v,\ w) = (a^2 - r^2)\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_{n+1}. \tag{14}$$

Um diese Verschiebung zu erhalten, ist eine gewisse Massenkraft erforderlich; letztere läßt sich, wie wir zeigen können, aus einem Potential vom Betrage

$$\frac{2}{\varrho}\left[(n+1)\lambda + (3n+4)\mu\right]\psi_{n+1}$$

ableiten, und die entsprechende Dilatation ist $-2(n+1)\psi_{n+1}$. Wir bemerken, daß, falls $\lambda$ und $\mu$ sich durch eine Gleichung von der Form

$$(n+1)\lambda + (3n+4)\mu = 0 \tag{15}$$

verknüpfen ließen, die Kugel ohne Massenkräfte in dem durch (14) angezeigten Verschiebungszustand gehalten werden könnte; an der Oberfläche würde dann die Verschiebung null sein. Dies Ergebnis widerspricht augenscheinlich dem Theorem von § 118; bei ganzzahligem positiven $n$ ist es aber auch unmöglich, daß $\lambda$ und $\mu$ durch eine Gleichung von der Form (15) verknüpft sind, da dann die Verzerrungsenergie-Funktion nicht für alle Werte der Verzerrungen positiv sein würde.

3) Die eben erhaltenen Resultate haben folgende Verallgemeinerung nahe gelegt[1]): $(\lambda + \mu)/\mu$ werde mit $\tau$ bezeichnet. Die Gleichgewichtsgleichungen haben dann die Form

$$\tau\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \nabla^2 u = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß jeder vorgegebenen Oberfläche eine Zahlenfolge $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots$ von der Beschaffenheit entspricht, daß das System der Gleichungen vom Typus

$$\tau_k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial V_k}{\partial y} + \frac{\partial W_k}{\partial z}\right) + \nabla^2 U_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Lösungen besitzt, die an der Oberfläche verschwinden. Wir setzen $\partial U_k/\partial x + \partial V_k/\partial y + \partial W_k/\partial z = \Delta_k$. Dann ist $\Delta_k$ eine harmonische Funktion, und es läßt sich zeigen, daß für $k' \neq k$

$$\iiint \Delta_k \Delta_{k'}\, dx\, dy\, dz = 0, \tag{16}$$

wo die Integration sich auf den von der Oberfläche begrenzten Raum erstreckt. Demnach können wir annehmen, daß die harmonischen Funktionen $\Delta_k$ so beschaffen sind, daß eine willkürliche harmonische Funktion innerhalb der gegebenen Begrenzung sich in eine Reihe von Funktionen $\Delta_k$ mit konstanten Koeffizienten entwickeln läßt; genau wie dies mit den Funktionen $\psi_{n+1}$ der Fall ist, wenn die Oberfläche eine Kugel ist.

1) E. und F. Cosserat, *Paris C. R.*, t. 126 (1898), 133 (1901). Die hier angegebene Verallgemeinerung hängt zusammen mit Arbeiten über das Problem der Kugel von E. Almansi, *Rom Acc. Lincei Rend.* (Ser. 5), t. 6 (1897) und über die Grundgleichungen von G. Lauricella, *Ann. di mat.* (Ser. 2), t. 23 (1895) und *Il Nuovo Cimento* (Ser. 4), t. 9, 10 (1899).

Setzt man die Existenz der Funktionen $U_k, \ldots$ und der entsprechenden Zahlen $\tau_k$ voraus, so hat man folgende Methode zur Lösung der Gleichgewichtsgleichungen bei vorgeschriebenen Oberflächenverschiebungen: Die Funktionen $u_0$, $v_0$, $w_0$ seien so bestimmt, daß sie innerhalb der gegebenen Begrenzung harmonisch sind und an der Oberfläche die Werte der gegebenen Verschiebungskomponenten annehmen. Die Funktion $u_0$ würde z. B. das Analogon zu $\sum \frac{r^n}{a^n} A_n$ im Falle der Kugel bilden. Aus $u_0$, $v_0$, $w_0$ berechne man die durch die Gleichung

$$\Delta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

bestimmte harmonische Funktion $\Delta_0$. Man setze dann $u$, $v$, $w$ im Innern des Körpers in der Form an

$$(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0) - \tau \sum \frac{A_k}{\tau - \tau_k} (U_k, V_k, W_k), \tag{17}$$

wo die $A_k$ Konstanten bedeuten. Es läßt sich leicht zeigen, daß obige Ausdrücke die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, falls

$$\sum A_k \Delta_k = \Delta_0.$$

Die konjugierte Eigenschaft (16) der Funktionen $\Delta_k$ gibt die Möglichkeit, die Konstanten $A_k$ durch folgende Formel auszudrücken:

$$A_k \iiint (\Delta_k)^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint \Delta_0 \Delta_k \, dx\, dy\, dz, \tag{18}$$

wo die Integrationen sich auf den vom Körper erfüllten Raum erstrecken. Das Problem ist daher gelöst, wenn die Funktionen $U_k, \ldots$, die die vorausgesetzten Eigenschaften besitzen, gefunden sind.[1])

## § 175. Die Kugel bei gegebenen Oberflächenspannungen.

Wenn die Oberflächenspannungen vorgeschrieben sind, so dürfen wir annehmen, daß die Spannungen $X_r$, $Y_r$, $Z_r$ auf $r = a$ sich als Summen von Kugelflächenfunktionen verschiedenen Grades in der Form

$$(X_r, Y_r, Z_r)_{r=a} = \sum (X_n, Y_n, Z_n) \tag{19}$$

ausdrücken lassen, so daß $r^n X_n$, $r^n Y_n$, $r^n Z_n$ gegebene Kugelfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades darstellen. Nun drücken sich $X_r, \ldots$ in den Verzerrungskomponenten durch Formeln vom Typus

$$X_r = \frac{x}{r}\left(\lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{y}{r}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{z}{r}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

1) E. und F. Cosserat, *Paris C. R.*, t. 126 (1898), haben gezeigt, wie sich die fraglichen Funktionen bestimmen, wenn die Oberfläche ein Ellipsoid ist. Einzelne Lösungen für das Ellipsoid sind gegeben von C. Chree, *loc. cit.* p. 288, und von D. Edwardes, *Quart. J. of Math.* vols. 26 und 27 (1893, 1894).

aus, und diese sind gleichwertig mit den Formeln vom Typus

$$\frac{r X_r}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} x \Delta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + r \frac{\partial u}{\partial r} - u, \tag{20}$$

worin

$$\zeta = ux + vy + wz, \tag{21}$$

sodaß $\zeta / r$ die radiale Verschiebungskomponente.

Wir haben nun $X_r, \ldots$ mittels der Formeln vom Typus (20) aus der durch die Gleichungen (7) dargestellten Verschiebung zu berechnen. Wir wissen bereits, daß diese Verschiebung sich durch Formeln folgender Art ausdrücken läßt:

$$u = \sum \left[ A_n \frac{r^n}{a^n} + M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} - r^2 M_n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \right]. \tag{22}$$

Wir gehen dazu über, $X_r$, $Y_r$, $Z_r$ aus diesen Formeln zu berechnen. Wir werden schließlich finden, daß $A_n$, $B_n$, $C_n$ sich durch $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ ausdrücken lassen. Sind diese Ausdrücke gefunden, so ist das Problem gelöst.

Wir haben zunächst

$$\zeta = \sum \Big[ (x A_n + y B_n + z C_n) \frac{r^n}{a^n} + M_{n+2} a^2 (n+1) \psi_{n+1} \\ - M_n r^2 (n-1) \psi_{n-1} \Big].$$

Die Glieder von der Form $x A_n r^n / a^n$ sind Produkte von Kugelfunktionen; mit Hilfe der Identitäten vom Typus

$$x f(x, y, z) = \frac{r^2}{2n+1} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} f \right) \right] \tag{23}$$

können wir sie in Summen von Termen, die eine einzige Kugelflächenfunktion enthalten, transformieren.

Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$(x A_n + y B_n + z C_n) \frac{r^n}{a^n} = \frac{r^2}{2n+1} \left( \psi_{n-1} - \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right); \tag{24}$$

hierin ist $\psi_{n-1}$ durch Gleichung (12) gegeben, und $\Phi_{-n-2}$ ist eine Kugelfunktion vom Grade $-(n+2)$, die durch die Gleichung

$$\Phi_{-n-2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} A_n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} B_n \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} C_n \right) \tag{25}$$

definiert ist.

Somit haben wir

$$\zeta = \sum \Big[ \frac{r^2}{2n+1} \left( \psi_{n-1} - \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right) \\ + M_{n+2} a^2 (n+1) \psi_{n+1} - M_n r^2 (n-1) \psi_{n-1} \Big]; \tag{26}$$

der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck ist homogen vom Grade $n+1$, und wir erhalten

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sum \Big[ M_{n+2} a^2 (n+1) \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2n+1} - M_n (n-1) \right\} r^2 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}$$

$$+ \frac{2r^2}{2n-1} \left\{ \frac{1}{2n+1} - M_n (n-1) \right\} \left\{ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} - \frac{r^{2n-1}}{a^{2n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a^{2n-1}}{r^{2n-1}} \psi_{n-1} \right) \right\} \Big]; \quad (27)$$

dabei haben wir zur Transformation von $x\psi_{n-1}$ eine der Formel (23) ähnliche Identität benutzt.

Andererseits haben wir

$$\Delta = \sum \frac{2\mu(2n-1)}{\lambda+\mu} M_n \psi_{n-1}, \quad (28)$$

mithin

$$x\Delta = \frac{2\mu}{\lambda+\mu} r^2 \sum M_n \left\{ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} - \frac{r^{2n-1}}{a^{2n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a^{2n-1}}{r^{2n-1}} \psi_{n-1} \right) \right\}. \quad (29)$$

Ebenso haben wir

$$r\frac{\partial u}{\partial r} - u = \sum \left[ (n-1) \left\{ A_n \frac{r^n}{a^n} + a^2 M_{n+2} \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} - r^2 M_n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \right] \right\}. \quad (30)$$

Wir können nun in dem Ausdruck rechter Hand in Gleichung (20) die Glieder $n^{\text{ten}}$ Grades herausheben; es sind dies

$$(n-1) A_n \frac{r^n}{a^n} + 2n M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2n-1} - M_n (n-1) \frac{4n}{2n-1} + \frac{2\lambda}{\lambda+\mu} M_n \right\} r^2 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}$$

$$+ \left\{ -\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{2(n-1)}{2n-1} M_n - \frac{2\lambda}{\lambda+\mu} M_n \right\} r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}} \right).$$

Der Koeffizient von $r^2 \partial \psi_{n-1} / \partial x$ in diesem Ausdruck ist $-2(n-2) M_n$, der von $r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}} \right)$ ist

$$-\frac{\lambda(n+2) - \mu(n-3)}{(2n+1)\{\lambda(n-1) + \mu(3n-2)\}}.$$

Bezeichnen wir also diesen Koeffizienten mit $-E_n$, so erhalten wir für die Glieder $n^{\text{ten}}$ Grades folgenden Ausdruck:

$$(n-1) A_n \frac{r^n}{a^n} + 2n M_{n+2} a^2 \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} - 2(n-2) M_n r^2 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}$$

$$- \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right) - E_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-2}} \right), \quad (31)$$

wo

$$E_n = \frac{1}{2n+1} \frac{\lambda(n+2) - \mu(n-3)}{\lambda(n-1) + \mu(3n-2)}. \tag{32}$$

Aus der Summe aller Glieder des Ausdrucks für $rX_r/\mu$ heben wir diejenigen heraus, welche Kugelflächenfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades enthalten. Der Wert der Summe dieser Terme an der Oberfläche $r = a$ muß gleich dem Werte von $r^n X_n / a^{n-1}\mu$ an der Oberfläche sein. Demnach erhalten wir die Gleichung

$$(n-1) A_n \frac{r^n}{a^n} - E_n r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}}\right) - \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2}\right) = \frac{r^n X_n}{a^{n-1}\mu}. \tag{33}$$

Dieselbe gilt zunächst an der Oberfläche $r = a$. Da aber beide Seiten dieser Gleichung Kugelfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades sind, so gilt die Gleichung in allen Punkten. Zwei entsprechende Gleichungen ergeben sich, wenn wir in obiger Gleichung $A_n$ nacheinander durch $B_n$ und $C_n$, ebenso $X_n$ nacheinander durch $Y_n$ und $Z_n$, endlich $\partial/\partial x$ nacheinander durch $\partial/\partial y$ und $\partial/\partial z$ ersetzen.

Um die Formeln zu erhalten, welche $A_n, \ldots$ durch $X_n, \ldots$ ausdrücken, führen wir zwei Kugelfunktionen $\Psi_{n-1}$ und $\Phi_{-n-2}$ durch die Gleichungen ein

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^n}{a^n} X_n\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r^n}{a^n} Y_n\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^n}{a^n} Z_n\right), \\
\Phi_{-n-2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} X_n\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} Z_n\right).
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Wir differentiieren dann die rechten und linken Seiten der Gleichungen vom Typus (33) bezüglich nach $x, y, z$ und addieren die so erhaltenen Ausdrücke. Wir bekommen die Gleichung

$$\{(n-1) + n(2n+1) E_n\} \psi_{n-1} = \frac{a}{\mu} \Psi_{n-1}. \tag{35}$$

Andererseits multiplizieren wir die rechten und linken Seiten der Gleichungen bezüglich mit $x, y, z$ und addieren. Wir erhalten dann die Gleichung

$$2n \Phi_{-n-2} = \frac{a}{\mu} \Phi_{-n-2}. \tag{36}$$

Die Gleichungen (35) und (36) drücken $\psi_{n-1}$ und $\Phi_{-n-2}$ als Produkte von $\Psi_{n-1}$ und $\Phi_{-n-2}$ und gewissen konstanten Faktoren aus. Substituieren wir in die Gleichungen vom Typus (33), so erhalten wir $A_n, B_n, C_n$ ausgedrückt in $X_n, Y_n, Z_n$. Damit ist das Problem gelöst.

## § 176. Bedingungen, denen die vorgeschriebenen Oberflächenspannungen genügen müssen.

Die vorgeschriebenen Oberflächenspannungen müssen natürlich die Bedingungen befriedigen, die für das Gleichgewicht eines starren Körpers bestehen. Diese Bedingungen zeigen unmittelbar, daß in den Entwicklungen $\Sigma X_n$, $\Sigma Y_n$, $\Sigma Z_n$ konstante Glieder nicht auftreten können. Ferner zeigen sie, daß für Glieder wie $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ nicht willkürliche Kugelflächenfunktionen ersten Grades angesetzt werden dürfen. In der Tat müssen drei Gleichungen von folgender Form bestehen

$$\iint (y\Sigma Z_n - z\Sigma Y_n)\, dS = 0,$$

wo die Integration über die Oberfläche der Kugel erstreckt ist. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\iint \left( y \sum \frac{r^n}{a^n} Z_n - z \sum \frac{r^n}{a^n} Y_n \right) dS = 0$$

und transformieren sie mit Hilfe gewisser Identitäten vom Typus (23), so finden wir die Gleichung

$$\iint \sum \left[ \frac{\partial}{\partial y}(r^n Z_n) - \frac{\partial}{\partial z}(r^n Y_n) \right] dS$$
$$- a^{2n+1} \iint \sum \left[ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Z_n}{r^{n+1}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Y_n}{r^{n+1}}\right) \right] dS = 0.$$

Der Integrand des zweiten Integrals ist für beliebiges ganzzahliges $n$ das Produkt einer Potenz von $r\,(= a)$ und einer Kugelflächenfunktion; das Integral verschwindet daher, und dasselbe gilt für das erste Integral außer im Falle $n = 1$. In diesem Falle müssen drei Gleichungen wie

$$\frac{\partial}{\partial y}(r Z_1) = \frac{\partial}{\partial z}(r Y_1)$$

bestehen, und diese Gleichungen zeigen, daß $rX_1$, $rY_1$, $rZ_1$ die bezüglich nach $x$, $y$, $z$ genommenen partiellen Differentialquotienten einer homogenen quadratischen Funktion dieser Variabeln sind. $X_x^{(1)}, \ldots$ seien die Spannungskomponenten, die den Oberflächenspannungen $X_1, \ldots$ entsprechen. Wir haben dann drei Gleichungen vom Typus

$$r X_1 = x X_x^{(1)} + y X_y^{(1)} + z X_z^{(1)}.$$

Es ergibt sich daraus, daß $X_x^{(1)}, \ldots$ Konstanten sind; die entsprechende Lösung der Gleichgewichtsgleichungen stellt die Verschiebung in der Kugel dar, wenn das Material sich im Zustande *gleichförmiger Spannung* befindet.

## § 177. Normal zur Oberfläche wirkende Spannungen.

Wirkt in jedem Punkt der Oberfläche bloß Zug oder Druck, so können wir die Normalspannung durch eine Summe von Kugelfunktionen in der Form $\Sigma R_n$ ausdrücken und haben dann an der Oberfläche

$$rX_r = x\sum \frac{r^n}{a^n} R_n, \quad rY_r = y\sum \frac{r^n}{a^n} R_n, \quad rZ_r = z\sum \frac{r^n}{a^n} R_n.$$

Nun liefert die erste dieser Gleichungen für $rX_r$ auf $r = a$ die Formel

$$\frac{rX_r}{\mu} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{1}{2n+3}\left[a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}} R_{n+1}\right) - \frac{r^{2n+5}}{a^{2n+3}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} R_{n+1}\right)\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung muß daher gleich der linken Seite von Gleichung (33), d. h. gleich

$$\sum \left[(n+1) A_{n+2} \frac{r^{n+2}}{a^{n+2}} - E_{n+2} r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right) - \frac{1}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2}\right)\right]$$

sein. — Indem wir ähnlich wie früher verfahren, finden wir die beiden Gleichungen

$$[(n+1) + (n+2)(2n+5)E_{n+2}]\psi_{n+1} = \frac{(n+2)(2n+5)}{2n+3}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\frac{R_{n+1}}{\mu}$$

und

$$-\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+3}\Phi_{-n-2} = \frac{n+1}{2n+3}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}\frac{R_{n+1}}{\mu};$$

die $A$, $B$ und $C$ sind dann leicht zu ermitteln. Im Falle, wo $\Sigma R_n$ sich auf ein einziges Glied $R_{n+1}$ reduziert, haben die einzigen $A$, die vorkommen, die Suffixe $n$ und $n+2$, und es läßt sich zeigen, daß

$$A_n = \frac{a^2}{2\mu n(2n+3)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}} R_{n+1}\right)\right]_{r=a},$$

$$A_{n+2} = -\frac{a^2}{\mu(2n+3)[(n+1)+(n+2)(2n+5)E_{n+2}]}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^{n+2}}{r^{n+2}} R_{n+1}\right)\right]_{r=a},$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die $B$ und $C$.

## § 178. Lösung in Kugelfunktionen von negativem Grade.

Wenn der vom Körper erfüllte Raum von zwei konzentrischen Kugeln begrenzt wird[1]), so kann man genau wie in § 172 dadurch, daß man außer den Kugelfunktionen von positivem Grade solche von negativem Grade einführt, Lösungen erhalten. Um den Gebrauch von Kugelfunktionen negativen Grades zu erläutern, nehmen wir den Fall, wo eine kugelförmige Höhlung in einer unbegrenzt ausgedehnten Masse sich befindet. Benutzen wir wie früher zur Berechnung der Kugelfunktionen

1) Lord Kelvins Lösung bezieht sich auf den Fall einer von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Schale und umfaßt die Lösung dieses Paragraphen sowohl wie die von §§ 172, 173, 175.

von ganzzahligem positiven Grade $n$ die Zeichen $U_n$, $V_n$, $W_n$, so können wir eine Lösung der Gleichgewichtsgleichungen in folgender Form hinschreiben:

$$(u, v, w) = \frac{1}{r^{2n+1}}(U_n, V_n, W_n) - k_n r^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\psi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right),$$

wo

$$\psi_{n+1} = r^{2n+3}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_n}{r^{2n+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V_n}{r^{2n+1}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W_n}{r^{2n+1}}\right)\right]$$

und

$$k_n = -\frac{1}{2}\frac{\lambda + \mu}{(n+2)\lambda + (3n+5)\mu}.$$

Die Funktion $\psi_{n+1}$ ist eine Kugelfunktion vom Grade $n+1$, und die aus obigem Ausdruck für die Verschiebung berechnete Dilatation ist durch die Formel gegeben

$$\Delta = -\frac{2(2n+3)\mu}{\lambda+\mu} k_n \frac{\psi_{n+1}}{r^{2n+3}}.$$

Setzen wir eine Summe partikulärer Lösungen von obigem Typus an, so erhalten wir eine Lösung, die bestimmten Bedingungen für die Verschiebung oder Spannung an der Oberfläche einer Höhlung $r = a$ angepaßt werden kann.

Ein interessantes Beispiel liefert ein Körper, in dem Schubverzerrung herrscht.[1]) In großer Entfernung von der Höhlung sei die Verschiebung gegeben durch die Gleichung

$$(u, v, w) = (sy, 0, 0),$$

wo $s$ konstant. Ist nun die Höhlung spannungsfrei, so ist die Verschiebung, wie sich zeigen läßt, in einem beliebigen Punkte gegeben durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} u &= A\frac{y}{r^3} + B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{r^5}\right) + Cr^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{r^5}\right) + sy, \\ v &= A\frac{x}{r^3} + B\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{r^5}\right) + Cr^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{r^5}\right), \\ w &= \phantom{A\frac{x}{r^3} +{}} B\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{r^5}\right) + Cr^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{r^5}\right), \end{aligned}$$

wo $A$, $B$, $C$ Konstanten; für $A$, $B$, $C$ ergeben sich folgende Werte:

$$A = \frac{3\lambda + 8\mu}{9\lambda + 14\mu}a^3 s, \quad B = \frac{3(\lambda+\mu)}{9\lambda + 14\mu}a^5 s, \quad C = -\frac{3(\lambda+\mu)}{9\lambda+14\mu}a^3 s.$$

Wir können den Wert der Schubverzerrung $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ berechnen. Es ergibt sich, daß er im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $r = a$ gleich $\frac{15\lambda + 30\mu}{9\lambda + 14\mu}s$ ist. Das Resultat zeigt, daß der Schub in der Nähe der Höhlung fast doppelt

1) Siehe *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 33 (1892), p. 77.

so groß sein wird wie in größerer Entfernung. Das Vorhandensein einer kugelförmigen Blase kann somit die Festigkeit eines durch Schubkräfte beanspruchten Körpers ernstlich gefährden.[1])

## § 179. Kugel, auf deren Inneres Kräfte wirken. Partikuläre Lösung.

Wenn die Kugel von Massenkräften beansprucht wird, so suchen wir zunächst eine partikuläre Lösung der Geichgewichtsgleichungen vom Typus

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \varrho X = 0;$$

kombinieren wir dann diese Lösung mit der in (13) gegebenen, so erhalten wir für die Verschiebungen Ausdrücke, die hinreichend allgemein sind, um speziellen Bedingungen für die Verschiebung oder Spannung an der Oberfläche der Kugel angepaßt werden zu können. Ist die Massenkraft $(X, Y, Z)$ der Gradient eines Potentials $V$, das der Laplaceschen Gleichung genügt, so kann das partikuläre Integral in einfacher Form erhalten werden; denn $V$ läßt sich innerhalb der Kugel als Summe von Kugelfunktionen positiven Grades ausdrücken. Es sei $V = \sum V_n$, wo $V_n$ eine derartige Kugelfunktion; wir betrachten die Gleichungen vom Typus

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \varrho \frac{\partial V_n}{\partial x} = 0. \tag{37}$$

Partikuläre Integrale dieser Gleichungen gewinnen wir, wenn wir setzen

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

falls

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \Phi + \varrho V_n = 0;$$

als partikuläre Integrale der Gleichungen vom Typus (37) können wir demnach folgende Ausdrücke ansetzen

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left[-\frac{1}{2(2n+3)}\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} r^2 V_n\right]. \tag{38}$$

Haben wir die Befriedigung spezieller Randbedingungen an der Oberfläche der Kugel im Auge, so berechnen wir die der obigen Lösung entsprechende Spannung $(X_r, Y_r, Z_r)$ mit Hilfe der Formeln vom Typus (20). Für die Radialverschiebung $\zeta/r$ finden wir die Formel

$$\zeta = -\frac{n+2}{2(2n+3)}\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} r^2 V_n,$$

1) Vgl. § 84, oben.

für die Dilatation $\Delta$ die Formel

$$\Delta = -\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} V_n .$$

Hieraus erhalten wir für $X_r$ die Formel

$$\frac{r X_r}{\mu} = -\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\lambda}{\mu} x V_n + \left\{\frac{n+2}{2(2n+3)} + \frac{n}{2(2n+3)}\right\} \frac{\partial}{\partial x}(r^2 V_n)\right];$$

mittels der Identität (23) reduziert sich dieselbe auf die Form

$$\frac{r X_r}{\mu} = -\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\lambda + (n+1)\mu}{(2n+1)\mu} r^2 \frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{\lambda(2n+3) + 2\mu(n+1)}{(2n+1)(2n+3)\mu} r^{2n+3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_n}{r^{2n+1}}\right)\right]. \qquad (39)$$

Die Formeln für $Y_r$ und $Z_r$ ergeben sich, wenn man auf der rechten Seite von (39) $\partial/\partial x$ der Reihe nach durch $\partial/\partial y$ und $\partial/\partial z$ ersetzt.

## § 180. Nur durch Massenkräfte deformierte Kugel.

Wenn die Oberfläche spannungsfrei ist, so erhalten wir die Verschiebung, indem wir die rechten Seiten der Gleichungen (13) und (38) addieren, nachdem wir die in den ersteren auftretenden Funktionen $A_n, \ldots$ in der Weise durch $V_n, \ldots$ ausgedrückt haben, daß die Summe der durch (33) und (39) gegebenen Werte von $r X_r/\mu$ verschwindet. Wir lassen das Potential $\sum V_n$ aus einem einzigen Glied $V_{n+1}$, wo $n \geqq 1$, bestehen und haben dann drei Gleichungen vom Typus

$$\sum \left[(n+1) A_{n+2} \frac{r^{n+2}}{a^{n+2}} - E_{n+2} r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right) - \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2}\right)\right]$$

$$= \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\lambda + (n+2)\mu}{(2n+3)\mu} a^2 \frac{\partial V_{n+1}}{\partial x} - \frac{\lambda(2n+5) + 2\mu(n+2)}{(2n+3)(2n+5)\mu} r^{2n+5} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_{n+1}}{r^{2n+3}}\right)\right]; \qquad (40)$$

dieselben gelten an der Oberfläche der Kugel und demnach, einer schon mehrfach benutzten Schlußweise zufolge, überall.

Wir bemerken, daß für inkompressibles Material, bei dem der Bruch $\mu/\lambda = 0$, die durch (38) ausgedrückten partikulären Integrale verschwinden, die ihnen entsprechenden Oberflächenspannungen dagegen nicht. Die rechte Seite von (39) geht in der Tat über in

$$\frac{\varrho}{2n+3}\left[\frac{a^2}{\mu} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial x} - \frac{r^{2n+5}}{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_{n+1}}{r^{2n+3}}\right)\right].$$

Die Gleichungen, durch die sich $A_n, \ldots$ in diesem Fall bestimmen, sind mit den in § 177 erhaltenen identisch, nur daß in letzteren $(r/a)^{n+1} R_{n+1}$ durch $\varrho V_{n+1}$ zu ersetzen ist. Es folgt daraus, daß die Verschiebung, welche in einer inkompressiblen Kugel von Massenkräften, die sich aus einem Potential $V_{n+1}$ ableiten, hervorgerufen wird, übereinstimmt mit derjenigen, die von rein normaler Oberflächenspannung vom Betrage $\varrho V_{n+1} a^{n+1}/r^{n+1}$ herrührt.[1])

Kehren wir zu dem allgemeinen Fall zurück, so finden wir, wie in § 177, daß von den $\psi$- und $\Phi$-Funktionen nur $\psi_{n+1}$ und $\Phi_{-n-2}$ und von den $A$-Funktionen nur $A_n$ und $A_{n+2}$ vorkommen. Ähnlich wie früher erhalten wir die Gleichungen

$$[(n+1)+(n+2)(2n+5)E_{n+2}]\,\psi_{n+1} = \frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\,\frac{\lambda(2n+5)+2\mu(n+2)}{(2n+3)\mu}(n+2)\,V_{n+1}.$$

$$-\frac{2n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+3}\Phi_{-n-2} = \frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\,\frac{\lambda+(n+2)\mu}{(2n+3)\mu}(n+1)\,V_{n+1}.$$

$\zeta$ hat auf $r=a$ den Wert

$$-\frac{n+3}{2(2n+5)}\,\frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\,a^2 V_{n+1} + \frac{a^2}{2n+5}\,\psi_{n+1} - \frac{a^2}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+3}\Phi_{-n-2};$$

da $\psi_{n+1}$ und $\Phi_{-n-2}$ Vielfache von $V_{n+1}$ sind, so ist die Radialverschiebung an der Oberfläche der Kugel ein Vielfaches von $V_{n+1}/r^{n+1}$ und zwar, wie sich durch eine kleine Rechnung ergibt, gleich

$$\frac{a\varrho V_{n+1}}{\mu}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(2n+3)\lambda+(2n+2)\mu}{(2n^2+8n+9)\lambda+(2n^2+6n+6)\mu}. \tag{41}$$

Ebenso können wir zeigen, daß die Radialverschiebung im Abstand $r$ vom Mittelpunkt gleich

$$\frac{r\varrho V_{n+1}}{\mu}\,\frac{n+1}{2n}\left[\frac{(2n+3)\lambda+(2n+2)\mu}{(2n^2+8n+9)\lambda+(2n^2+6n+6)\mu} + \frac{a^2-r^2}{r^2}(n+1)\,\frac{(n+3)\lambda+(n+2)\mu}{(2n^2+8n+9)\lambda+(2n^2+6n+6)\mu}\right]. \tag{42}$$

ist. Da die Radialverschiebung stets mit $V_{n+1}$ proportional ist, so werden alle mit der Oberfläche konzentrischen Kugelflächen zu harmonischen Sphäroiden von demselben Typus verzerrt; diese Sphäroide sind aber nicht einander ähnlich. Im Falle $n=1$ nehmen die Elliptizitäten[2]) aller Hauptschnitte von außen her nach dem Mittelpunkt hin zu, und zwar ist das Verhältnis der Extremwerte gleich

$$(5\lambda+4\mu):(8\lambda+6\mu).^{3)}$$

1) Chree, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 14 (1889).

2) Die Elliptizität einer Ellipse ist das Verhältnis der Differenz zwischen der großen und kleinen Achse zur großen Achse.

3) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 433.

## § 181. Gravitierende inkompressible Kugel.

Das Hauptinteresse, das sich an die Probleme der in § 179 betrachteten Art knüpft, entspringt aus der Möglichkeit, die Lösungen auf die Untersuchung von Problemen, die sich auf die Erde beziehen, anzuwenden. Unter diese Probleme fällt die Frage nach der Abhängigkeit der Elliptizität der Erdfigur von der täglichen Umdrehung und die Frage nach dem Einfluß der störenden Anziehungskräfte von Sonne und Mond. Bei allen derartigen Anwendungen erhebt sich die Schwierigkeit, von der bereits in § 75 die Rede war: daß nämlich auch bei Außerachtlassung der Wirkungen der Umdrehung und der störenden Kräfte die Erde sich in einem Zustand der Spannung befindet und daß die innere Spannung viel zu groß ist, um die direkte Anwendung der mathematischen Theorie der dem Überlagerungsgesetz gehorchenden kleinen Verzerrungen zuzulassen.[1]) Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu vermeiden, besteht darin, daß man das Material, aus dem die Erde aufgebaut ist, als homogen und inkompressibel behandelt.

Wenn die homogene inkompressible Kugel unter der wechselseitigen Gravitation ihrer Teile sich in Ruhe befindet, so kann man annehmen, daß der in ihr bestehende Spannungszustand von der Natur des hydrostatischen Drucks ist[2]); ist $p_0$ der Betrag dieses Drucks im Abstand $r$ vom Mittelpunkt, so lautet die Bedingung des Gleichgewichts

$$\partial p_0/\partial r = -g\varrho r/a, \tag{43}$$

wo $g$ die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche $r = a$. Da $p_0$ an dieser Oberfläche verschwindet, so folgt

$$p_0 = \tfrac{1}{2} g\varrho (a^2 - r^2)/a. \tag{44}$$

Wird die Kugel durch äußere Kräfte verzerrt, so können wir den Verzerrungszustand vom Anfangszustand als „unverzerrtem" Zustand aus messen und annehmen, daß die Verzerrung in einem beliebigen Punkt mit einer zusätzlichen Spannung, die sich über die Anfangsspannung $p_0$ überlagert, verknüpft ist. Ferner können wir annehmen, daß die Komponenten der zusätzlichen Spannung mit der Verzerrung durch Gleichungen von der gewöhnlichen Form verbunden sind:

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \ldots, \quad Y_z = \mu e_{yz}, \ldots;$$

hierin gehen wir zur Grenze über, indem wir $\lambda$ im Vergleich zu $\mu$

1) Auf diese Schwierigkeit hat Chree, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32 (1891), hingewiesen.

2) Vgl. J. Larmor, „On the period of the Earth's free Eulerian precession", *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 9 (1898), insbesondere § 13.

sehr groß und $\Delta$ im Vergleich zur größten linearen Dehnung sehr klein annehmen und zwar so, daß $\lambda\Delta$ von derselben Größenordnung ist wie $\mu e_{xx}, \ldots$ Wir setzen

$$\lim \lambda\Delta = -p,$$

dann ist $p_0 + p$ der mittlere Druck an irgend einer Stelle des Körpers im verzerrten Zustand.

$V$ sei das Potential der störenden Kräfte. Die Gleichgewichtsgleichungen sind von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}(-p_0 + X_x) + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} - g\varrho\frac{x}{a} + \varrho\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Die Glieder, welche $-p_0$ und $-g\varrho$ enthalten, zerstören sich gegenseitig, und obige Gleichung nimmt die Form an

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \varrho\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichungen des Gleichgewichts der homogenen inkompressiblen Kugel, die von dem durch (44) ausgedrückten Anfangsspannungszustand aus durch äußere Kräfte deformiert wird, haben dieselbe Form wie die gewöhnlichen Gleichungen des Gleichgewichts einer Kugel, auf die störende Kräfte einwirken, nur daß in letzteren Gleichungen $\lambda\Delta$ durch $-p$ zu ersetzen und $\mu\Delta$ zu vernachlässigen ist. Das Vorhandensein der Anfangsspannung $p_0$ hat auf diese Gleichungen keinen Einfluß, wohl aber auf die speziellen Bedingungen, die an der Oberfläche gelten. Diese Bedingungen gehen dahin, daß die *deformierte* Oberfläche spannungsfrei ist. Die Gleichung der deformierten Oberfläche sei $r = a + \varepsilon S$, wo $\varepsilon$ eine kleine Konstante und $S$ eine Funktion des Orts auf der Kugel $r = a$. Die „Abweichung“ $\varepsilon S$ muß so beschaffen sein, daß das Volumen ungeändert bleibt. Wir wollen die auf die Fläche $r = a + \varepsilon S$ wirkende Spannung $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)$ berechnen. $l', m', n'$ seien die Richtungskosinus der nach außen gerichteten Normalen dieser Fläche. Dann ist

$$X_\nu = l'(X_x - p_0) + m'X_y + n'X_z.$$

In den Termen $X_x, X_y, X_z$, die in den Verzerrungskomponenten linear sind, können wir $l', m', n'$ durch $x/a, y/a, z/a$ ersetzen, denn die wahren Werte unterscheiden sich von diesen Werten um Größen von der Ordnung $\varepsilon$; dagegen müssen wir den Wert des Gliedes $-l'p_0$ an der Oberfläche $r = a + \varepsilon S$ bis auf die Ordnung $\varepsilon$ genau berechnen. Das ist leicht geschehen, da $p_0$ auf $r = a$ verschwindet und deshalb auf $r = a + \varepsilon S$ gleich $\varepsilon S\left(\frac{\partial p_0}{\partial r}\right)_{r=a}$ bezw. $= -g\varrho\varepsilon S$ gesetzt werden kann. Vernachlässigen wir $\varepsilon^2$, so können wir schreiben

$$-l'p_0 = \frac{x}{a}g\varrho\varepsilon S.$$

Somit läßt sich die Bedingung, daß $X_\nu$ an der Oberfläche $r = a + \varepsilon S$ verschwindet, folgendermaßen schreiben

$$(X_r)_{r=a} + \frac{x}{a} g \varrho \varepsilon S = 0. \tag{45}$$

Die Bedingungen dafür, daß $Y_\nu$, $Z_\nu$ an der Oberfläche verschwinden, lassen sich in ähnlicher Form ausdrücken, und das Resultat läßt sich in dem Satz aussprechen: Man kann die Anfangsspannung durch die Annahme in Rechnung ziehen, daß die „mittlere" Kugel, statt spannungsfrei zu sein, mit einem Druck belastet ist, der gleich dem Gewicht (pro Flächeneinheit) der Materialmenge ist, die man auf ihr anhäufen muß, um die „Abweichung" hervorzubringen.[1])

## § 182. Deformation einer gravitierenden inkompressiblen Kugel durch äußere Kräfte.

Die störenden äußeren Kräfte mögen ein Potential besitzen, das der Laplaceschen Gleichung genügt; innerhalb der Kugel sei dies Potential als Summe von Kugelfunktionen positiven Grades in der Form $\sum W_n$ ausgedrückt. Die Oberfläche der Kugel werde deformiert, und die Höhe der Abweichung drücke sich als Summe von Kugelflächenfunktionen in der Form $\sum \varepsilon_n S_n$ aus, wo $\varepsilon_n$ eine kleine Größe, die höchstens von der Größenordnung der Abweichung ist. Die von der Abweichung ausgehende Anziehungskraft stellt eine auf die Teilchen innerhalb der Kugel wirkende Massenkraft dar; in den Punkten im Innern der Kugel besitzt diese Kraft ein Potential vom Betrage

$$4\pi\gamma\varrho a \sum (2n+1)^{-1} \varepsilon_n (r/a)^n S_n,$$

wo $\gamma$ die Gravitationskonstante. Drücken wir, wie in § 179, das Potential aller störenden Kräfte in der Form $\sum V_n$ aus, so haben wir

$$V_n = W_n + \frac{3g}{2n+1} \varepsilon_n \frac{r^n}{a^n} S_n, \tag{46}$$

worin $4\pi\gamma\varrho a$ durch den gleichwertigen Ausdruck $3g$ ersetzt ist.

Die Verschiebung im Innern der Kugel drückt sich aus durch Formeln vom Typus

$$u = -\frac{1}{2(2n+3)} \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} \sum \frac{\partial}{\partial x}(r^2 V_n) + \sum \left[ A_n \frac{r^n}{a^n} + M_n (a^2 - r^2) \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \right], \tag{47}$$

1) Dies Resultat wird oft beweislos angenommen. Augenscheinlich findet sich in ihm implicite jedenfalls irgend ein derartiges Argument, wie es im Text benutzt wurde.

wo $A_n, \ldots$ unbekannte Kugelflächenfunktionen bedeuten und $M_n$ und $\psi_{n-1}$ sich mittels der Gleichungen (9) und (12) ausdrücken. Um die vollständige Lösung zu erhalten, müssen wir die Funktionen $A_n$, $B_n$, $C_n$, $S_n$ in den bekannten Funktionen $W_n, \ldots$ ausdrücken. Im Laufe der Rechnung können wir gewisse Vereinfachungen anbringen, die aus der Annahme folgen, daß das Material inkompressibel ist. An der Oberfläche $r = a$ haben wir zweierlei Randbedingungen. In erster Linie besteht die kinematische Bedingung, daß die radiale Verschiebung an der Oberfläche übereinstimmt mit dem Ausdruck, den wir mit $\sum \varepsilon_n S_n$ bezeichneten, und zweitens die Bedingung, daß die aus den Verschiebungen vom Typus (47) berechnete Oberflächenspannung gleichwertig ist mit einem Druck, der dem Gewicht der Abweichung gleichkommt.

Die kinematische Bedingung drückt sich aus durch die Gleichung

$$-\frac{n+2}{2(2n+3)} \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} a \sum \left[ W_n + \frac{3g}{2n+1} \varepsilon_n \frac{r^n}{a^n} S_n \right]$$
$$+ \sum \frac{1}{2n+1} \left( a\psi_{n-1} - \frac{r^{2n+3}}{a^{2n+2}} \Phi_{-n-2} \right) = \sum \varepsilon_n S_n \frac{r^n}{a^n}.$$

Greifen wir aus dieser Gleichung die Glieder heraus, welche Kugelflächenfunktionen von der Ordnung $n+1$ enthalten, und führen die aus der Inkompressibilitätsbedingung folgende Vereinfachung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\varepsilon_{n+1} S_{n+1} \frac{r^{n+1}}{a^{n+2}} = \frac{a}{2n+5} \psi_{n+1} - \frac{r^{2n+3}}{(2n+1)a^{2n+2}} \Phi_{-n-2}. \qquad (48)$$

Die Spannung an der Oberfläche drückt sich durch Gleichungen von folgendem Typus aus:

$$\frac{r X_r}{\mu} = -\frac{\varrho}{\mu} \sum \left[ \frac{r^2}{2n+1} \left\{ \frac{\partial V_n}{\partial x} - r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{V_n}{r^{2n+1}} \right\} \right]$$
$$+ \sum \left[ (n-1) A_n \frac{r^n}{a^n} - \frac{n+2}{(n-1)(2n+1)} r^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}} \Phi_{-n-2} \right) \right]; \qquad (49)$$

dieselben ergeben sich, wenn wir die Ausdrücke in (33) und (39) mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung vereinfachen. Die zu (48) hinzutretenden Oberflächenbedingungen erhalten wir, wenn wir die rechte Seite von (49) gleich $-\mu^{-1} g \varrho x \sum \varepsilon_n S_n$ setzen. Wir finden so die Gleichung

$$\frac{g\varrho}{\mu}\sum\left[\varepsilon_n\frac{r^2}{2n+1}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^n}{a^n}S_n\right)-\frac{r^{2n+1}}{a^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_n}{r^{n+1}}\right)\right\}\right]$$

$$-\frac{3g\varrho}{\mu}\sum\left[\varepsilon_n\frac{r^2}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^n}{a^n}S_n\right)-\frac{r^{2n+1}}{a^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_n}{r^{n+1}}\right)\right\}\right]$$

$$-\frac{\varrho}{\mu}\sum\frac{r^2}{2n+1}\left\{\frac{\partial W_n}{\partial x}-r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W_n}{r^{2n+1}}\right)\right\}$$

$$+\sum\left[(n-1)A_n\frac{r^n}{a^n}-\frac{n-2}{(n-1)(2n+1)}r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}}\Phi_{-n-2}\right)\right]=0, \qquad (50)$$

die an der Oberfläche $r = a$ besteht. Greifen wir aus dieser Gleichung die Glieder heraus, welche Kugelflächenfunktionen $n$ten Grades enthalten, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{g\varrho a^2}{(2n+3)\mu}\frac{2n}{2n+3}\varepsilon_{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}}S_{n+1}\right)$$

$$-\frac{g\varrho}{(2n-1)\mu}\frac{2(n-2)}{2n-1}\varepsilon_{n-1}\frac{r^{2n+1}}{a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_{n-1}}{r^n}\right)$$

$$-\frac{\varrho a^2}{\mu}\frac{1}{2n+3}\frac{\partial W_{n+1}}{\partial x}+\frac{\varrho}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{2n-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)$$

$$+(n-1)A_n\frac{r^n}{a^n}-\frac{n+2}{(n-1)(2n+1)}r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-1}}\right)$$

$$-\frac{1}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}}\Phi_{-n-2}\right)=0. \qquad (51)$$

Hierin ist die linke Seite eine Kugelfunktion $n$ten Grades. Da diese harmonische Funktion an der Oberfläche $r = a$ verschwindet, so verschwindet sie für alle Werte von $x, y, z$. Zwei entsprechende Gleichungen ergeben sich aus der Betrachtung der Spannungen in der $y$- und in der $z$-Richtung.

Wir differentiieren die linken Seiten der drei Gleichungen vom Typus (51) bezüglich nach $x, y, z$ und addieren die entstehenden Ausdrücke. Wir erhalten so die Gleichung

$$\frac{g\varrho}{\mu}\frac{2(n-2)n(2n+1)}{(2n-1)^2}\varepsilon_{n-1}\frac{r^{n-1}}{a^{n-1}}S_{n-1}-\frac{\varrho}{\mu}\frac{n(2n+1)}{2n-1}W_{n-1}$$

$$+(n-1)\psi_{n-1}+\frac{n(n+2)}{n-1}\psi_{n-1}=0.$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von $n$. Ersetzen wir $n$ durch $n+2$, so geht sie über in

$$\frac{g\varrho}{\mu}\frac{2n(n+2)(2n+5)}{(2n+3)^2}\varepsilon_{n+1}\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}}S_{n+1}-\frac{\varrho}{\mu}\frac{(n+2)(2n+5)}{2n+3}W_{n+1}$$
$$+\frac{2(n+2)^2+1}{n+1}\psi_{n+1}=0. \qquad (52)$$

Multiplizieren wir andererseits die linken Seiten der drei Gleichungen vom Typus (51) bezüglich mit $x$, $y$, $z$ und addieren, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{g\varrho a^2}{\mu}\frac{2n(n+1)}{(2n+3)^2}\varepsilon_{n+1}\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}}S_{n+1}-\frac{\varrho a^2}{\mu}\frac{n+1}{2n+3}W_{n+1}$$
$$-\frac{2n}{2n+1}\frac{r^{2n+3}}{a^{2n+1}}\Phi_{-n-2}=0. \qquad (53)$$

Aus den Gleichungen (48), (52), (53) bestimmen sich $S_{n+1}$, $\psi_{n+1}$, $\Phi_{-n-2}$, ausgedrückt durch $W_{n+1}$. Somit sind alle Funktionen $S$, $\psi$, $\Phi$ mit verschiedenen Suffixen bestimmt, und die Gleichungen vom Typus (51) liefern die Funktionen $A_n, \ldots$ Wenn das Potential der äußeren Kräfte sich auf ein einziges Glied, $W_{n+1}$, reduziert, so kommen von den $\psi$- und $\Phi$-Funktionen nur $\psi_{n+1}$ und $\Phi_{-n-2}$ und von den $S$-Funktionen nur $S_{n+1}$ vor. Die Gleichungen vom Typus (51) zeigen dann, daß von den Funktionen $A_n, \ldots$, diejenigen vorkommen, die den Index $n$ oder $n+2$ haben. Das Resultat, daß $S_{n+1}$ ein Vielfaches von $W_{n+1}$ ist, kann man in derselben Weise deuten, wie das entsprechende in § 180 vermerkte Resultat.

## § 183. Nahezu kugelförmiger gravitierender Körper.

Der Fall eines nahezu kugelförmigen Körpers läßt sich durch vorstehende Entwicklung miterledigen. Die die Spannung betreffenden Oberflächenbedingungen drücken sich auch hier durch Gleichungen vom Typus (50) aus, dagegen ist die durch (48) ausgedrückte kinematische Bedingung nicht mehr gültig. Hat die Gleichung der Oberfläche die Form $r = a + \varepsilon_{n+1}S_{n+1}$, so ergeben sich die Werte von $\psi_{n+1}$ und $\Phi_{-n-2}$, wenn wir in den Gleichungen (52) und (53) null statt $W_{n+1}$ einsetzen; die harmonischen Funktionen $A_n$ und $A_{n+2}$ usw. bestimmen sich aus den Gleichungen vom Typus (41), wenn darin die $W$ gestrichen werden.

G. H. Darwin hat derartige Entwicklungen, ohne die Beschränkung auf inkompressibles Material, angewendet auf das Problem der Bestimmung der Spannungen, die im Innern der Erde durch das Gewicht der Kontinente hervorgerufen werden.[1]) Abgesehen von der Schwierigkeit betr. die Anfangsspannung in einem gravitierenden Körper von der Größe der Erde — einer Schwierigkeit, die wir anscheinend nicht umgehen

1) *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 173 (1882). Eine kritische Untersuchung der Darwinschen Resultate gab Chree, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 14 (1889) und *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32 (1891).

können, ohne das Material als inkompressibel zu behandeln — liegt bei der Anwendung unserer Entwicklungen auf kompressible gravitierende Körper noch eine andere Schwierigkeit vor. Bei diesen Entwicklungen wird die Anziehungskraft, die von der Abweichung an der Oberfläche herrührt, in Rechnung gezogen, die Ungleichheiten der inneren Anziehungskräfte dagegen, die aus den Änderungen der Dichte im Erdinnern entspringen, vernachlässigen wir; diese Ungleichheiten der Anziehungskraft sind jedoch von derselben Größenordnung wie die von der Oberflächenabweichung herrührende Anziehung. Um dies zu erläutern, genügt es, den Fall zu betrachten, wo im Anfangszustand gleichmäßige Dichte $\varrho_0$ herrscht. Im verzerrten Zustand drückt sich die Dichte in den Verzerrungen bis zur ersten Ordnung genau durch $\varrho_0(1-\Delta)$ aus. Die Massenkraft hat, wenn von der Anziehung der Oberflächenabweichung und anderen störenden Kräften abgesehen wird, pro Masseneinheit die Komponenten $gx/a$, $gy/a$, $gz/a$. Somit müßten die Ausdrücke für $\varrho X, \ldots$ in den Gleichgewichtsgleichungen Glieder wie $-g\varrho_0 x a^{-1}(1-\Delta)$ enthalten; die Glieder vom Typus $-g\varrho_0 x\Delta/a$ sind aber von derselben Ordnung wie die von den Oberflächenabweichungen ausgehenden Anziehungskräfte.[1])

## § 184. Rotierende Kugel.

Von den Erdproblemen sind am interessantesten das Problem der Elliptizität der Erdfigur infolge der täglichen Umdrehung und das der Gezeitendeformation, die von der Anziehungskraft der Sonne und des Mondes herrührt. Der Einfluß der Rotation läßt sich darstellen als Wirkung einer Massenkraft von der Größe $\omega^2(x, y, 0)$, wo $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit; diese Kraft besitzt ein Potential vom Betrage $\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$. Dasselbe kann als Summe zweier Glieder geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{3}\omega^2(x^2+y^2+z^2)-\tfrac{1}{6}\omega^2(2z^2-x^2-y^2);$$

das erste Glied, das gleich $\frac{1}{3}\omega^2 r^2$ ist, gibt Anlaß zu einer Radialkraft $\frac{2}{3}\omega^2 r$. Dies Glied läßt sich in den Term $-g\varrho r/a$ von Gleichung (43) einbegreifen, wenn $g\left(1-\frac{2}{3}\frac{\omega^2 a}{g}\right)$ für $g$ gesetzt wird. Da im Falle der Erde $\omega^2 a/g$ ein kleiner Bruch, nämlich ungefähr gleich $\frac{1}{289}$ ist, so können wir für den gegenwärtigen Zweck diese Änderung von $g$ außer acht lasssen. Das Glied $-\frac{1}{6}\omega^2(2z^2-x^2-y^2)$ ist, in Polarkoordinaten ausgedrückt, gleich $-\frac{1}{3}\omega^2 r^2(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2})$, sodaß es $r^2$ und eine Kugelflächenfunktion zweiten Grades als Faktoren enthält. Wir können die Wirkung der Rotation aus den Resultaten von § 182 dadurch bestimmen, daß wir $n=1$ setzen und obigen Ausdruck $-\frac{1}{3}\omega^2 r^2(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2})$ für $W_2$ einführen.

---

1) Siehe eine Abhandlung von J. H. Jeans, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 201 (1903).

Für $n = 1$ lauten die Gleichungen (52) und (53)

$$\tfrac{19}{2}\psi_2 = \tfrac{21}{5}\frac{\varrho}{\mu}\Big[W_2 - \tfrac{4}{5} g \varepsilon_2 \frac{r^2}{a^2} S_2\Big],$$

$$\frac{r^5}{a^5}\Phi_{-3} = -\tfrac{3}{5}\frac{\varrho}{\mu}\Big[W_2 - \tfrac{4}{5} g \varepsilon_2 \frac{r^2}{a^2} S_2\Big],$$

und Gleichung (48) lautet

$$\varepsilon_2 \frac{r^2}{a^2} S_2 = a\Big[\tfrac{1}{7}\psi_2 - \tfrac{1}{3}\frac{r^5}{a^5}\Phi_{-3}\Big],$$

Die Höhe der Abweichung ergibt sich daraus in der Form

$$\varepsilon_2 S_2 = \tfrac{5}{2}\frac{W_2 a^2}{g r^2} \Big/ \Big(1 + \tfrac{19}{2}\frac{\mu}{g\varrho a}\Big). \tag{54}$$

Hieraus folgt, daß die Abweichung für eine feste inkompressible Kugel von der Steifigkeit $\mu$ kleiner ist als für eine Kugel, die von einer inkompressiblen Flüssigkeit gebildet wird, und zwar im Verhältnis $1 : 1 + \tfrac{19}{2}\frac{\mu}{g\varrho a}$. Falls die Kugel dieselbe Größe und Masse besitzt wie die Erde, so ist dies Verhältnis nahezu gleich $\tfrac{1}{3}$, wenn die Steifigkeit gleich der des Stahls ist, und nahezu gleich $\tfrac{3}{5}$, wenn die Steifigkeit gleich der des Glases ist.

Die Elliptizität der Erdfigur ist etwa gleich $\tfrac{1}{297}$. Die Elliptizität[1]) eines nahezu kugelförmigen Sphäroids von der Größe und Masse der Erde, das aus einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit besteht und sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in 24 Stunden einmal um sich selbst dreht, ist ungefähr gleich $\tfrac{1}{230}$. Die Elliptizität, die sich ergeben würde, wenn die homogene inkompressible Flüssigkeit durch inkompressibles festes Material von der Steifigkeit des Glases oder gar des Stahls ersetzt wird, fällt zu klein aus; im Falle des Glases würde sie etwa $\tfrac{1}{383}$ betragen. Das Ergebnis, daß ein fester Körper von beträchtlicher Steifigkeit unter der vereinten Wirkung der Rotation und der eigenen Gravitation eine der Umdrehungsgeschwindigkeit entsprechende platt-sphäroidische Gestalt annimmt, ist nicht ohne Bedeutung. Es ist jedoch schwierig, auf obige Zahlenergebnisse eine Schätzung der Steifigkeit der Erde zu stützen, weil die Deformation einer Kugel durch Rotation in hohem Grade von der Heterogenität des Materials beeinflußt wird. Bei der Erde ist die durchschnittliche Dichte der Oberflächenkruste halb so groß wie die mittlere Erddichte. Bei einem inkompressiblen festen Körper, der etwa in Kugelschalen von gleicher Dichte geschichtet ist, hat, wie leicht zu

1) Eine Gleichung von der Form

$$r = a\{1 - \tfrac{2}{3}\varepsilon(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2})\}$$

stellt, wenn $\varepsilon$ klein ist, ein nahezu kugelförmiges Sphäroid von der Elliptizität $\varepsilon$ dar.

erkennen ist, verminderte Dichte in den äußeren Schichten eine Steigerung der von der Rotation herrührenden Elliptizität der Figur zur Folge.[1]) In unseren Gleichungen haben wir die Dichte als gleichmäßig angenommen; wir können jedoch durch ein grobes Näherungsverfahren auch veränderliche Dichte in Rechnung ziehen, indem wir bemerken, daß das Gewicht der Oberflächenabweichung und ihr Potential auf innere Punkte der mittleren Dichte der Oberflächenschicht proportional sein muß. Diese Dichte sei $\varrho'$. Nach unserem Näherungsverfahren würden wir in den ersten beiden Reihen von (50) $\varrho'$ für $\varrho$ schreiben. Das Resultat würde sein, daß wir im Nenner der rechten Seite von (54) statt $1 + \frac{19}{2}\frac{\mu}{g\varrho a}$ den Ausdruck $\frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{19}{2}\frac{\mu}{g\varrho a}$ hätten. Wäre $\varrho' = \frac{1}{2}\varrho$, so würden die vorhin erhaltenen Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{5}$ für Stahl und Glas bezüglich gleich $\frac{2}{5}$ und gleich $\frac{6}{7}$ werden; demnach würde, falls wir uns auf die benutzte grobe Annäherung verlassen können, die Elliptizität der Figur gesteigert sein.

## § 185. Gezeitendeformation. Gezeitenwirksame Steifigkeit der Erde.

Die die Gezeiten hervorbringenden störenden Kräfte besitzen gleichfalls ein Potential, das durch eine Kugelfunktion zweiten Grades dargestellt ist. Das Potential des Mondes auf einen Punkt im Innern der Erde läßt sich in eine Reihe von Kugelfunktionen positiven Grades entwickeln. Den Gliedern erster Ordnung entsprechen die Kräfte, die die relative Bahnbewegung der beiden Körper bestimmen, und den Gliedern höherer Ordnung entsprechen die Kräfte, die relative Verrückungen im Innern der Erde hervorbringen. In Analogie zu der Gezeitenbewegung des Meeres relativ zum Land können wir diese Verschiebungen „Gezeiten" nennen. Das wichtigste Glied im Störungspotential ist das Glied zweiten Grades; dasselbe läßt sich schreiben: $(M\gamma r^2/D^3)\,(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2})$, wo $M$ die Mondmasse, $D$ die Entfernung zwischen den Mittelpunkten von Erde und Mond, $\gamma$ die Gravitationskonstante bezeichnet und die Achse $\theta = 0$ in die Verbindungslinie der Mittelpunkte fällt.[2]) Dies ist das auf die Zentrallinie bezogene „Gezeitenpotential". Beziehen wir es auf Achsen, die mit der Erde fest verbunden sind, so stellt

---

1) Dies Resultat fand Chree, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32 (1891), p. 249. Bei einer *Flüssigkeit* kann verminderte Dichte in den äußeren Schichten *Verringerung* der von der Rotation herrührenden Elliptizität der Figur zur Folge haben. Beim Laplaceschen „Gesetz der Dichte im Erdinnern" werden Druck und Dichte als durch ein bestimmtes Gesetz verknüpft angenommen und die Dichte der heterogenen Flüssigkeit so gewählt, daß dieselbe Elliptizität wie bei der Erde heraus kommt. Siehe Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II. p. 403.

2) Siehe G. H. Darwins Artikel „Tides" in *Ency. Brit.*, 9. Aufl.

es sich als eine Summe von Kugelfunktionen zweiten Grades dar wobei die Koeffizienten periodische Funktionen der Zeit sind. Entsprechende Sätze gelten bezüglich der Anziehung der Sonne. Jedem Gliede des „Gezeitenpotentials" entspricht eine Deformation der mittleren Meeresoberfläche zu einem harmonischen Sphäroid zweiter Ordnung, und jede dieser Deformationen heißt eine „Gezeit". Es gibt tägliche und halbtägliche Gezeiten, die von der Umdrehung der Erde abhängen, halbmonatliche und monatliche Gezeiten, die von der Bewegung des Mondes in seiner Bahn abhängen, jährliche und halbjährliche Gezeiten, die von der Bewegung der Erde in ihrer Bahn abhängen und eine neunzehnjährliche Gezeit, die von periodischen Schwankungen in der Mondbahn, wie sie durch den Umlauf der Knotenpunkte in der Ekliptik gekennzeichnet sind, abhängen.

Die Abweichung, die ein Glied des Gezeitenpotentials an der Oberfläche einer homogenen inkompressiblen flüssigen Kugel von der Größe und Masse der Erde oder an der Oberfläche eines Ozeans, der einen vollkommen starren kugelförmigen Kern bedeckt, hervorrufen würde, heißt die „wahre Gleichgewichtshöhe" der entsprechenden Gezeit. Aus den in § 184 gegebenen Resultaten erkennen wir, daß die von den gleichen Kräften herrührenden Abweichungen an der Oberfläche einer homogenen inkompressiblen festen Kugel von der Größe und Masse der Erde und der Steifigkeit des Stahls etwa $\frac{1}{3}$ der wahren Gleichgewichtshöhe der Gezeiten betragen würden. Sie würden etwa $\frac{3}{5}$ dieser Höhe betragen, wenn die Steifigkeit gleich der des Glases wäre. Daraus folgt, daß die Höhe der Meeresgezeiten, wie sie durch das Steigen und Fallen des Meeres im Verhältnis zum Land gemessen wird, infolge der elastischen Nachgiebigkeit des festen Kerns sich auf etwa $\frac{2}{3}$ bezw. $\frac{2}{5}$ der wahren Gleichgewichtshöhe reduzieren würde, je nachdem die Steifigkeit gleich der des Stahls oder der des Glases ist.

Mit dem Namen „gezeitenwirksame Steifigkeit der Erde" hat Lord Kelvin[1]) die Steifigkeit bezeichnet, die einer homogenen inkompressiblen Kugel von der Größe und Masse der Erde beigelegt werden müßte, damit die Gezeiten in einem sie bedeckenden, mit dem wirklich vorhandenen Ozean kongruenten Meere dieselbe Höhe besäßen wie die beobachteten Meeresgezeiten. Wenn die Gezeiten dem Gleichgewichtsgesetz folgten, so könnte die fragliche Steifigkeit durch Beobachtung der tatsächlichen Gezeiten und Berechnung der wahren Gleichgewichtshöhe bestimmt werden. Nun lehrt die dynamische Theorie der ozeanischen Gezeiten auf einem starren Kern[2]), daß bei

1) Sir W. Thomson, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 153 (1863) und *Math. and Phys. Papers*, vol. 3, p. 317.

2) G. H. Darwin, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 41 (1886), p. 337. Vgl. Lamb, *Hydrodynamics*, Kap. VIII.

verschwindender Reibung keine Gezeit dem Gleichgewichtsgesetz folgen würde; selbst im Falle sehr langer Perioden würde die Höhe der Gezeiten auf Meeren von einer Tiefe, wie sie tatsächlich vorkommt, kleiner sein als die halbe Gleichgewichtshöhe. Die vom Meeresbett herrührende Reibung würde eine Gezeit dem Gleichgewichtsgesetz umso inniger anzupassen suchen, je länger die Periode. Wir müssen uns daher auf die Betrachtung von Gezeiten von langer Periode beschränken. Von diesen sind die jährlichen und halbjährlichen gänzlich verdeckt durch die Schwankungen des Meeresspiegels, die vom Schmelzen des Eises in den Polargegenden herrühren. Die neunzehnjährliche Gezeit ist zu unbedeutend, um mit Sicherheit festgestellt werden zu können. Aus Beobachtungen der halbmonatlichen Gezeiten, die im Indischen Ozean[1]) angestellt wurden, ging hervor, daß die Höhe dieser Gezeiten fast zwei Drittel der wahren Gleichgewichtshöhe beträgt. Wenn die halbmonatliche Gezeit dem Gleichgewichtsgesetze folgte, so würden wir daraus schließen können, daß die gezeitenwirksame Steifigkeit der Erde ungefähr gleich der Steifigkeit des Stahls ist. Wahrscheinlich ist aber die Reibung des Meeresbettes nicht groß genug, um die Anwendung der Gleichgewichtstheorie auf die halbmonatlichen Gezeiten zu gestatten.

Die Tatsache, daß es überhaupt beobachtbare Gezeiten gibt, und die oben erwähnten Ergebnisse bezüglich der halbmonatlichen Gezeiten im Indischen Ozean betrachtet Lord Kelvin als Widerlegung der geologischen Hypothese, daß die Erde aus einem flüssigen Kern und einer verhältnismäßig dünnen festen Kruste besteht; aus dem genannten und anderen davon unabhängigen Gründen verficht er die Auffassung, daß die Erde hauptsächlich aus festem Material von hohem Steifigkeitsgrade besteht. Aus den Gezeitenerscheinungen ergibt sich allerdings kein völlig zwingender Beweis für die Richtigkeit dieser Anschauung.[2])

## § 186. Ebene Verzerrung in einem Kreiszylinder.[3])

Ähnliche Methoden, wie sie in § 173 und § 175 benutzt wurden, lassen sich auf Probleme ebener Verzerrung in einem Kreiszylinder anwenden. Führen wir in der $(x, y)$-Ebene die Polarkoordinaten $r, \theta$ ein, so besitzen wir in den Ausdrücken vom Typus $r^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$, wo $\alpha_n$ und $\beta_n$ Konstanten, ebene ganze harmonische Funktionen, und

---

1) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 442—460 (Beitrag von G. H. Darwin).

2) Von einem anderen Standpunkt hat J. Larmor, *loc. cit.* p. 300, die Frage erörtert.

3) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 298—300. Das Problem des ebenen Spannungszustandes wurde gelöst von Clebsch, *Elastizität*, § 42.

die hierin auftretenden Koeffizienten von $r^n$ sind das Analogon zu den Kugelflächenfunktionen. Das Analogon zur Lösung (13), § 173, ist, wie sich zeigen läßt,

$$(u, v) = \sum \left( A_n \frac{r^n}{a^n},\ B_n \frac{r^n}{a^n} \right) + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 3\mu)} \sum \frac{a^2 - r^2}{n+1} \left( \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x},\ \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \right), \quad (55)$$

worin $A_n$ und $B_n$ Funktionen vom Typus $\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$ und die Funktionen $\psi$ ebene harmonische Funktionen bedeuten, die durch Gleichungen von der Form

$$\psi_{n-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A_n \frac{r^n}{a^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B_n \frac{r^n}{a^n} \right) \quad (56)$$

ausgedrückt sind.

Die Gleichungen (55) würden die Verschiebung in einem Kreiszylinder liefern, die von gegebenen Verschiebungen der Mantelfläche herrühren, wenn die Spannungen, die diese Verschiebungen aufrecht halten, so gewählt sind, daß keine longitudinale Verschiebung eintritt.

Wenn die an der Oberfläche angreifenden Spannungen gegeben sind, so können wir die zur $x$- und $y$-Achse parallelen Komponenten der auf die Fläche $r = a$ wirkenden Spannungen in der Form $\sum X_n$ und $\sum Y_n$ ansetzen, wo die Funktionen $X_n$, $Y_n$ wiederum vom Typus $\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$ sind. In Analogie zu (25) schreiben wir

$$\Phi_{-n-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A_n \frac{a^n}{r^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( B_n \frac{a^n}{r^n} \right) \quad (57)$$

und führen die Funktionen $\Psi_{n-1}$ und $\Phi_{-n-1}$ durch folgende Gleichungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( X_n \frac{r^n}{a^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Y_n \frac{r^n}{a^n} \right), \\ \Phi_{-n-1} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( X_n \frac{a^n}{r^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Y_n \frac{a^n}{r^n} \right), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Diese Funktionen sind sämtlich ebene harmonische Funktionen von dem durch den Index angezeigten Grad. Die Oberflächenspannungen lassen sich aus den Gleichungen (55) berechnen. Wir erhalten zwei Gleichungen vom Typus

$$(n-1) A_n \frac{r^n}{a^n} - \frac{1}{2(n-1)} \left( \frac{1}{n} + \frac{\lambda - \mu}{\lambda + 3\mu} \right) r^{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi_{n-1}}{r^{2n-2}} \right)$$
$$- \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r^{2n+2}}{a^{2n}} \Phi_{-n-1} \right) = \frac{r^n}{\mu a^{n-1}} X_n, \quad (59)$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \psi_{n-1} &= \frac{\lambda + 3\mu}{2n(\lambda + \mu)} \frac{a}{\mu} \Psi_{n-1}, \\ \Phi_{-n-1} &= \frac{a}{2n\mu} \Phi_{-n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

und somit lassen sich $A_n$, $B_n$ durch $X_n$, $Y_n$ ausdrücken.

Wir betrachten folgende Beispiele[1]):

1) $X_n = \alpha \cos 2\theta$, $Y_n = 0$. In diesem Falle finden wir

$$u = \frac{\alpha}{4\mu a} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2) \right\}, \quad v = \frac{\alpha x y}{2(\lambda + \mu) a}.$$

2) $X_n = \alpha \cos 2\theta$, $Y_n = \alpha \sin 2\theta$. In diesem Falle finden wir

$$u = \frac{\alpha}{4\mu a} \left\{ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} (x^2 - y^2) - 2(x^2 + y^2) \right\}, \quad v = \frac{\alpha}{2\mu a} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} x y.$$

3) $X_n = \alpha \cos 4\theta$, $Y_n = 0$. In diesem Falle finden wir

$$u = \frac{\alpha}{4\mu a^3} \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) - (x^4 - y^4) + a^2(x^2 - y^2) \right\},$$

$$v = \frac{\alpha x y}{2\mu a^3} \left\{ \frac{\mu}{\lambda + \mu} (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2 - a^2) \right\}.$$

## § 187. Anwendungen krummliniger Koordinaten.

Es soll hier noch über einige Untersuchungen, die an die in krummlinigen Koordinaten ausgedrückten Gleichgewichtsgleichungen anknüpfen, kurz berichtet werden.

a) *Polarkoordinaten.* Die älteste, von Lamé gegebene Lösung des Problems der Kugel und der Kugelschale war durch Anwendung der in Polarkoordinaten ausgedrückten Gleichungen mittels Reihenentwicklungen erhalten.[2]) Dieselben Gleichungen benutzte später C. W. Borchardt[3]), der eine in bestimmten Integralen ausgedrückte Lösung des Kugelproblems lieferte, und gleichfalls C. Chree[4]), der die Methode auch auf Probleme annähernd kugelförmiger Körper ausdehnte[5]), wobei er die Lösungen in Form von Reihenentwicklungen erhielt. Die Lösungen in Reihenentwicklungen setzen sich zusammen aus Kugelfunktionen ($V_n$), die in Polarkoordinaten ausgedrückt sind, und verwandten Funktionen ($U$), die den Gleichungen von der Form $\nabla^2 U = V_n$ genügen.

b) *Zylindrische Koordinaten.* Lösungen in Form von Reihenentwicklungen[6]) ergeben sich aus der Bemerkung, daß, wenn $J_n$ der Besselschen

---

1) Von den Lösungen in diesen speziellen Fällen werden wir später Gebrauch machen (Kap. XVI).

2) *J. de Math. (Liouville),* t. 19 (1854). Siehe auch *Leçons sur les coordonées curvilignes,* Paris 1859.

3) *Berliner Monatsberichte,* 1878.

4) *Cambridge Phil. Soc. Trans.,* vol. 14 (1889).

5) *Amer. J. of Math.,* vol. 16 (1894).

6) L. Pochhammer, *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 81 (1876), p. 33, und C. Chree, *Cambridge Phil. Soc. Trans.,* vol. 14 (1889).

Funktion von der Ordnung $n$, $e^{kz+in\theta} J_n(kr)$ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung ist. Man kann leicht geeignete Darstellungen für die Verschiebungen $u_r$, $u_\theta$, $u_z$ ableiten. Der Fall, daß $u_\theta$ verschwindet und $u_r$ und $u_z$ von $\theta$ unabhängig sind, wird uns sogleich beschäftigen (§ 188). Im Falle der ebenen Verzerrung, wo $u_z$ verschwindet und $u_r$ und $u_\theta$ von $z$ unabhängig sind, kann man von der Spannungsfunktion (vgl. § 144 oben) Gebrauch machen. Die allgemeine Form dieser Funktion, ausgedrückt als eine nach dem Sinus und Kosinus der Vielfachen von $\theta$ fortschreitende Reihe, ist von J. H. Michell[1]) aufgestellt worden.

c) *Ebene Verzerrung in nicht-kreisförmigen Zylindern.* Werden die Ränder von Kurven der Schar $\alpha = \text{const.}$ gebildet und ist $\alpha$ der reelle Teil einer Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$, so wissen wir aus § 144, daß die Dilatation $\Delta$ und die Drehung $\varpi$ in der Weise von $x$ und $y$ abhängen, daß $(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi$ eine Funktion von $x + iy$ und mithin auch von $\alpha + i\beta$ ist, wo $\beta$ die zu $\alpha$ konjugierte Funktion. Das elastische feste Medium sei z. B. nach innen von einem elliptischen Zylinder begrenzt. Wir setzen

$$x - iy = c\cosh(\alpha + i\beta),$$

sodaß die Kurven $\alpha = \text{const.}$ konfokale Ellipsen sind und $2c$ der Abstand der beiden Brennpunkte ist. Die geeignete Darstellung für $\Delta$ und $\varpi$ ist dann durch die Gleichung gegeben

$$(\lambda + 2\mu)\Delta + i2\mu\varpi = \sum e^{-n\alpha}(A_n \cos n\beta + B_n \sin n\beta).$$

Bezeichnen wir mit $h$ den absoluten Betrag der komplexen Größe $d(\alpha + i\beta)/d(x + iy)$, so sind die Verschiebungen $u_\alpha$ und $u_\beta$ mit $\Delta$ und $\varpi$ durch die Gleichungen verknüpft

$$\frac{\Delta}{h^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\alpha}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\beta}{h}\right), \quad \frac{2\varpi}{h^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h}\right).$$

Im Falle elliptischer Zylinder lassen sich $u_\alpha/h$ und $u_\beta/h$ ziemlich leicht durch Reihenentwicklungen nach $\cos n\beta$ und $\sin n\beta$ ausdrücken.

Beispielsweise nehmen wir den Fall, daß ein elliptischer Zylinder mit den Halbachsen $a$ und $b$ um die Linie der Mittelpunkte seiner Normalschnitte durch einen kleinen Winkel $\Phi$ gedreht wird.[2]) In diesem Falle läßt sich zeigen, daß die außerhalb des Zylinders hervorgerufene Verschiebung sich durch die Gleichungen ausdrückt

$$\frac{u_\alpha}{h} = \tfrac{1}{2}(a+b)^2\Phi\frac{\mu}{\lambda+3\mu}\left(e^{-2\alpha} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{a-b}{a+b}\right)\sin 2\beta,$$

$$\frac{u_\beta}{h} = ab\Phi + \tfrac{1}{2}(a+b)^2\Phi\left(\frac{a-b}{a+b} - e^{-2\alpha}\right)\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}\frac{a-b}{a+b} + \frac{\mu}{\lambda+3\mu}\cos 2\beta\right\}.$$

---

1) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 100. [Vgl. A. Timpe, *Zeitschr. Math. Phys.*, Bd. 52 (1905).]

2) Das Problem wurde von R. R. Webb gestellt. Ein anderes Verfahren zur Gewinnung der Lösung gibt D. Edwardes, *Quart. J. of Math.*, vol. 26 (1893), p. 270.

d) *Umdrehungskörper.* Bedeuten $r$, $\theta$, $z$ zylindrische Koordinaten und können wir $\alpha$ und $\beta$ als konjugierte Funktionen von $z$ und $r$ so bestimmen, daß eine Gleichung von der Form $\alpha = \text{const.}$ die Meridiankurve der Oberfläche eines gegebenen Körpers darstellt, so transformieren wir die Laplacesche Gleichung $\nabla^2 V = 0$ auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(r\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(r\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) + \frac{J^2}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0,$$

wo $J$ den absoluten Betrag von $d(z+ir)/d(\alpha+i\beta)$ bedeutet. Können wir dann Lösungen dieser Gleichung finden für den Fall, daß $V$ von $\theta$ unabhängig oder mit $\sin n\theta$ oder $\cos n\theta$ proportional ist, so können wir die Dilatation und die Drehung durch Reihenentwicklungen ausdrücken. Wangerin[1]) hat gezeigt, wie sich aus diesen Lösungen Ausdrücke für die Verschiebungen ableiten lassen. Für zahlreiche Umdrehungskörper, u. a. für Ellipsoid, Kegel und Ring, sind die geeigneten Lösungen der obigen Gleichung bekannt.

## § 188. Achsensymmetrische Verzerrung in einem Umdrehungskörper.

Wenn ein Umdrehungskörper eine symmetrische Verzerrung erleidet, sodaß in allen durch die Umdrehungsachse gelegten Ebenen dieselbe Verschiebung herrscht, so können wir alle Größen, die vorkommen, durch eine einzige Funktion ausdrücken und die Gleichungen des Gleichgewichts des nur durch Oberflächenspannungen verzerrten Körpers auf eine einzige partielle Differentialgleichung zurückführen. Bedeuten $r$, $\theta$, $z$ Zylinderkoordinaten, so haben die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts die Form

$$\frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \widehat{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \widehat{zz}}{\partial z} + \frac{\widehat{rz}}{r} = 0. \tag{61}$$

Bezeichnen wir die Verschiebungen in den Richtungen von $r$ und $z$ mit $U$, $w$ und nehmen an, daß senkrecht zur Achsenebene keine Verschiebung eintritt, so lauten die Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten

$$e_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{U}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = e_{z\theta} = 0. \tag{62}$$

Wir setzen zunächst, ähnlich wie in der Theorie der ebenen Verzerrung,

$$\widehat{rz} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z}.$$

1) *Archiv f. Math. (Grunert),* vol. 55 (1873). Die Theorie ist von P. Jaerisch, *J. f. Math. (Crelle),* Bd. 104 (1889), weiter entwickelt worden. Für das Umdrehungsellipsoid mit gegebenen Oberflächenverschiebungen hat O. Tedone, *Rom Acc. Lincei Rend.* (Ser. 5), t. 14 (1905) die Lösung mittels sphäroidischer harmonischer Funktionen gegeben.

Die zweite der Gleichungen (61) liefert dann

$$\widehat{zz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r};$$

eine willkürliche Funktion von $r$ braucht nicht hinzugefügt zu werden, da sie in $\Phi$ hineingezogen werden kann. Wir bemerken, daß $e_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}(r e_{\theta\theta})$, und schreiben die entsprechende Gleichung, ausgedrückt in Spannungskomponenten, hin, nämlich:

$$\widehat{rr} - \sigma\widehat{\theta\theta} - \sigma\widehat{zz} = \frac{\partial}{\partial r}\{(\widehat{\theta\theta} - \sigma\widehat{rr} - \sigma\widehat{zz})\, r\};$$

hieraus erhalten wir die Gleichung

$$(1+\sigma)(\widehat{rr} - \widehat{\theta\theta}) = r\frac{\partial}{\partial r}(\widehat{\theta\theta} - \sigma\widehat{rr} - \sigma\widehat{zz}).$$

Wir führen eine neue Funktion $R$ durch die Gleichung

$$\widehat{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + R$$

ein; die erste der Gleichungen (61) läßt sich dann schreiben

$$(1+\sigma)\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(\widehat{\theta\theta} - \sigma\widehat{rr} - \sigma\widehat{zz}) = 0,$$

und wir können setzen

$$\widehat{\theta\theta} = \sigma\nabla^2\Phi - R,$$

wo $\nabla^2$ die Operation $\partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ bezeichnet, da Abhängigkeit von $\theta$ nicht besteht. Eine willkürliche Funktion von $z$ braucht nicht hinzugefügt zu werden, weil jede derartige Funktion in $\Phi$ hineingezogen werden kann. Alle Spannungskomponenten sind nunmehr durch zwei Funktionen $\Phi$ und $R$ ausgedrückt. Die Summe $\Theta$ der Hauptspannungen drückt sich durch $\Phi$ mittels der Gleichung

$$\Theta = \widehat{rr} + \widehat{\theta\theta} + \widehat{zz} = (1+\sigma)\nabla^2\Phi$$

aus, und da $\Theta$ eine harmonische Funktion, so haben wir $\nabla^4\Phi = 0$.

Die Funktionen $\Phi$ und $R$ sind nicht unabhängig voneinander. Um die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen zu erhalten, können wir folgendermaßen verfahren: Die Gleichung $U/r = e_{\theta\theta}$ läßt sich schreiben

$$U = r(\widehat{\theta\theta} - \sigma\widehat{rr} - \sigma\widehat{zz})/E,$$

oder

$$U = -(1+\sigma)\, rR/E;$$

die Gleichung $\widehat{rz} = \mu e_{rz}$ läßt sich dann schreiben

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z} + \frac{1+\sigma}{E}\, r\,\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ferner läßt sich die Gleichung $e_{zz} = (\widehat{zz} - \sigma \widehat{rr} - \sigma \widehat{\theta\theta})/E$ folgendermaßen schreiben

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \sigma \nabla^2 \Phi\right).$$

Die Gleichungen für $\partial w/\partial r$ und $\partial w/\partial z$ sind miteinander verträglich, falls

$$(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r\, \partial z^2} = r\frac{\partial^2 R}{\partial z^2};$$

führen wir eine neue Funktion $\Omega$ mittels der Gleichung

$$rR = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

ein, so haben wir

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = (1-\sigma)\nabla^2\Phi,$$

wo wie vorhin eine willkürliche Funktion von $z$ nicht hinzugefügt zu werden braucht.

Die Spannungskomponenten sind nunmehr durch die Funktionen $\Phi$ und $\Omega$, die durch die zuletzt hingeschriebene Gleichung verknüpft sind, ausgedrückt. Die Gleichungen für $\partial w/\partial r$ und $\partial w/\partial z$ gehen bei Einführung von $\Omega$ über in

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right).$$

Wir können daher $U$ und $w$ durch $\Omega$ und $\Phi$ mittels folgender Formeln ausdrücken:

$$U = -\frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right), \quad w = \frac{1+\sigma}{E}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right].$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß $\Omega$ eine harmonische Funktion ist, denn wir haben gleichzeitig

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1+\sigma}{E}\left[\nabla^2\Phi + \nabla^2\Omega - 2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right]$$
$$= \frac{1+\sigma}{E}[(1-2\sigma)\nabla^2\Phi - \nabla^2\Omega]$$

und

$$\Delta = \frac{1-2\sigma}{E}\Theta = \frac{1-2\sigma}{E}(1+\sigma)\nabla^2\Phi.$$

Hieraus folgt, daß die Funktion $\Omega$ außer der Gleichung $\partial^2\Omega/\partial z^2 = (1-\sigma)\nabla^2\Phi$ auch der Gleichung $\nabla^2\Omega = 0$ genügt.

Statt die beiden Funktionen $\Phi$ und $\Omega$ zu benutzen, können wir die Spannungskomponenten durch eine einzige Funktion ausdrücken. Zu diesem Zweck führen wir eine neue Funktion $\psi$ durch die Gleichung $\psi = \Phi + \Omega$ ein. Wir haben dann

$$\widehat{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \nabla^2\psi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \sigma\nabla^2\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2},$$

ebenso

$$\widehat{\theta\theta} = \sigma \nabla^2 \psi - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \widehat{zz} = (2-\sigma)\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Die erste der Gleichungen (61) gestattet uns, ohne weiteres $\widehat{rz}$ durch eine Funktion $\chi$ auszudrücken, wobei $\psi = \frac{\partial \chi}{\partial z}$. Wir lassen daher alle Hilfsfunktionen beiseite und behalten nur $\chi$ bei.

In Übereinstimmung mit den obigen Ausführungen nehmen wir an

$$\widehat{rr} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}\right\}, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma \nabla^2 \chi - \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r}\right\},$$

$$\widehat{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\sigma)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}\right\}. \tag{63}$$

Die erste der Gleichungen (61) liefert dann

$$r \cdot \widehat{rz} = -r\sigma \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 \chi + r\frac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r}, \tag{64}$$

und die zweite wird durch diesen Wert von $\widehat{rz}$ befriedigt, falls

$$\nabla^4 \chi = 0. \tag{65}$$

Die Spannungskomponenten sind nunmehr durch eine einzige Funktion $\chi$ ausgedrückt, die der Gleichung (65) genügt.[1]

Die entsprechenden Verschiebungen ergeben sich leicht aus den Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung in der Form

$$U = -\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 \chi}{\partial r\, \partial z}, \quad w = \frac{1+\sigma}{E}\left\{(1-2\sigma)\nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r}\right\}. \tag{66}$$

## § 189. Achsensymmetrische Verzerrung in einem Zylinder.

Handelt es sich um einen Kreiszylinder, dessen Endflächen zur Achse senkrecht sind, so hat die Funktion $\chi$ auf dem Zylindermantel $r = a$ und auf den beiden ebenen Grundflächen $z =$ const. gewissen Bedingungen zu genügen. Außerdem muß sie die Gleichung (65) befriedigen. Lösungen dieser Gleichung, die von $r$ und $z$ abhängen, können nach verschiedenen Methoden gefunden werden.

Die Gleichung wird befriedigt von jeder einfachen Kugelfunktion, d. h. von jeder Funktion von der Form $(r^2 + z^2)^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial^n}{\partial z^n}(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, und ebenfalls von dem Produkt aus einer derartigen Funktion und

1) Eine Methode, alle Größen durch eine einzige Funktion auszudrücken, die einer von (65) verschiedenen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung genügt, ist entwickelt von J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 144—146.

$(r^2 + z^2)$. Alle diese Funktionen sind rationale ganze Funktionen von $r$ und $z$ und enthalten nur gerade Potenzen von $r$. Multipliziert man diese Funktionen je mit einer beliebigen Konstanten, so stellt die Summe der so erhaltenen Ausdrücke eine mögliche Form für $\chi$ dar.

Der Gleichung (65) genügt auch jede harmonische Funktion von der Form $e^{\pm kz} J_0(kr)$, wo $k$ irgend eine reelle oder imaginäre Konstante; $J_0(x)$ bezeichnet die Besselsche Funktion von der Ordnung null. Ferner genügt ihr irgend eine Funktion von der Form $e^{\pm kz} r \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr)$, denn wir haben

$$\nabla^2 \left\{ e^{\pm kz} r \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr) \right\} = -2k^2 e^{\pm kz} J_0(kr).$$

Ist $k$ imaginär, so können wir diese Lösung in der Form schreiben

$$J_0(i\varkappa r)(A \cos \varkappa z + B \sin \varkappa z) + ir \frac{\partial}{\partial r} J_0(i\varkappa r)(C \cos \varkappa z + D \sin \varkappa z), \tag{67}$$

worin $\varkappa$ reell und $A, B, C, D$ reelle Konstanten. Irgend eine Summe von derartigen Ausdrücken mit verschiedenen Werten von $\varkappa$ und verschiedenen Konstanten $A, B, C, D$ stellt eine mögliche Form für $\chi$ dar.

Die Formeln für die Verschiebungen $U$, $w$, die sich nach einem dieser Verfahren ergeben würden, sind von C. Chree[1]) auf anderem Wege erhalten worden. Von L. N. G. Filon[2]) sind sie auf das Problem eines Zylinders angewendet worden, der zwischen zwei seine Grundflächen berührenden Ebenen gepreßt ist. Von den Lösungen, die rational und ganz in $z$ und $r$ sind, nimmt er diejenigen, die nach obigem Verfahren sich ergeben würden, wenn für $\chi$ eine Summe angesetzt wird, die keine Glieder von höherem als dem siebenten Grade und nur ungerade Potenzen von $z$ enthält. Von den Lösungen, die sich ergeben würden, wenn $\chi$ als Reihe von Termen vom Typus (67) angesetzt wird, nimmt er diejenigen, die für $\varkappa = n\pi/c$ resultieren, wo $n$ eine ganze Zahl und $2c$ die Länge des Zylinders, und läßt die Kosinusglieder weg. Er findet, daß diese Lösungen hinreichend allgemein sind, um folgenden Bedingungen genügen zu können:

1) der Zylindermantel $r = a$ ist spannungsfrei;
2) die Endflächen bleiben eben, d. h. $w = \text{const.}$ für $z = \pm c$;
3) der Umfang der Endflächen erweitert sich nicht, d. h. $U = 0$ für $r = a$, $z = \pm c$;
4) die Endflächen erfahren einen gegebenen resultierenden Druck.

1) *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 14 (1889), p. 250.

2) *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 198 (1902). Filon gibt in derselben Abhandlung Lösungen für andere Probleme der achsensymmetrischen Verzerrung in einem Zylinder.

Er zeigt auch, wie sich eine Korrektion anbringen läßt, wenn an Stelle der Bedingung 3) angenommen wird, daß die Endflächen sich um einen gegebenen Betrag erweitern. Die Resultate werden zur Erklärung gewisser Unstimmigkeiten bei der Berechnung der Festigkeit von kurzen, auf Zerquetschung beanspruchten Zylindern herangezogen; die Widersprüche rühren von der Verwendung verschiedener Arten von Probeblöcken her; ebenso wird erklärt, warum bei Zylindern (oder Kugeln), die zwischen parallele Ebenen gepreßt werden, zuweilen annähernd kegelförmige Stücke an den vom Druck beanspruchten Stellen herausgequetscht werden.

---

## Kapitel XII.

### Schwingungen von Kugeln und Zylindern.

§ 190. In diesem Kapitel werden wir die in § 126 auseinandergesetzte Methode zur Lösung des Problems der freien Schwingungen eines festen Körpers an Beispielen erläutern. Die freien Schwingungen einer isotropen elastischen Kugel sind von verschiedenen Autoren im einzelnen untersucht worden.[1]) Wir werden bei der Behandlung dieses Problems der Methode von Lamb folgen und über einige seiner Resultate berichten.

Führt jedes Teilchen eines Körpers eine einfache harmonische Bewegung von der Periode $2\pi/p$ aus, so drückt sich die Verschiebung durch Formeln von folgendem Typus aus:

$$u = Au' \cos(pt + \varepsilon), \quad v = Av' \cos(pt + \varepsilon), \quad w = Aw' \cos(pt + \varepsilon), \tag{1}$$

wo $u'$, $v'$, $w'$ Funktionen von $x$, $y$, $z$ und $A$ eine willkürliche kleine Konstante, die die Amplitude der Schwingung darstellt. Wenn der Körper frei schwingt, so lassen sich die Bewegungsgleichungen und Randbedingungen nur befriedigen, wenn $p$ eine Wurzel der „Frequenzengleichung" ist und $u'$, $v'$, $w'$ „Normalfunktionen" sind. Im allgemeinen werden wir die Akzente an $u'$, $v'$, $w'$ weglassen und diese Größen als Verschiebungskomponenten behandeln. Wir können dann jederzeit den Amplitudenfaktor $A$ und den Zeitfaktor $\cos(pt + \varepsilon)$ wieder einsetzen, um die vollständigen Ausdrücke für die Verschiebungen zu erhalten.

Die Gleichungen der kleinen Bewegung des Körpers lauten

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 (u, v, w) = \varrho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right), \tag{2}$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

---

1) Es sei verwiesen auf P. Jaerisch, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 88 (1880); H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 13 (1882); C. Chree, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 14 (1889).

Wenn $u, v, w$ mit $\cos(pt+\varepsilon)$ proportional sind, so erhalten wir die Gleichungen

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}, \frac{\partial\Delta}{\partial y}, \frac{\partial\Delta}{\partial z}\right) + \mu\nabla^2(u, v, w) + \varrho p^2(u, v, w) = 0. \quad (4)$$

Differentiieren wir die linken Seiten dieser Gleichungen bezüglich nach $x, y, z$ und addieren, so erhalten wir eine Gleichung, die sich schreiben läßt

$$(\nabla^2 + h^2)\Delta = 0, \quad (5)$$

wo

$$h^2 = p^2\varrho/(\lambda + 2\mu). \quad (6)$$

Schreiben wir andererseits

$$\varkappa^2 = p^2\varrho/\mu, \quad (7)$$

so nehmen die Gleichungen (4) die Form an

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)(u, v, w) = \left(1 - \frac{\varkappa^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}, \frac{\partial\Delta}{\partial y}, \frac{\partial\Delta}{\partial z}\right).$$

Wir wollen annehmen, daß $\Delta$ als Lösung der Gleichung (5) bestimmt ist, dann ist eine Lösung $(u_1, v_1, w_1)$ der zuletzt hingeschriebenen Gleichungen gegeben durch

$$(u_1, v_1, w_1) = -\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}, \frac{\partial\Delta}{\partial y}, \frac{\partial\Delta}{\partial z}\right),$$

und eine vollständigere Lösung erhalten wir, wenn wir zu diesen Werten von $u_1, v_1, w_1$ die ergänzenden Lösungen $(u_2, v_2, w_2)$ des Gleichungssystemes

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)u_2 = 0, \quad (\nabla^2 + \varkappa^2)v_2 = 0, \quad (\nabla^2 + \varkappa^2)w_2 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

hinzufügen. Wenn diese Funktionen bestimmt sind, läßt sich die Verschiebung in folgender Form schreiben:

$$(u, v, w) = A(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2)\cos(pt + \varepsilon). \quad (10)$$

## § 191. Lösung mittels Kugelfunktionen.

Eine Lösung der Gleichung $(\nabla^2 + h^2)\Delta = 0$ erhalten wir, wenn wir annehmen, daß $\Delta$ von der Form $f(r)S_n$ ist, wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $S_n$ eine Kugelflächenfunktion $n$ten Grades. Wir wollen $R_n$ statt $f(r)$ schreiben. Dann ist $rR_n$ eine Lösung der Riccatischen Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + h^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)(rR_n) = 0,$$

deren vollständige Lösung sich in folgender Form ausdrücken läßt

$$rR_n = r^{n+1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n \frac{A_n \sin hr + B_n \cos hr}{r},$$

unter $A_n$ und $B_n$ willkürliche Konstanten verstanden. Die Funktion $r^n S_n$ ist eine Kugelfunktion $n^{\text{ten}}$ Grades. Wenn der Bereich, innerhalb dessen $\Delta$ zu bestimmen ist, den Ursprungspunkt enthält, sodaß die Funktion $\Delta$ in der Umgebung des Ursprungs keine Singularitäten besitzt, setzen wir für $\Delta$ die Formel an

$$\Delta = \sum \omega_n \psi_n(hr), \tag{11}$$

wo $\omega_n$ eine Kugelfunktion von positivem Grade $n$ und $\psi_n$ die durch folgende Gleichung bestimmte Funktion:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right). \tag{12}$$

Die Summation geht auf die verschiedenen Werte von $n$.

Die Funktion $\psi_n(x)$ läßt sich als Potenzreihe darstellen

$$\psi_n(x) = \frac{(-)^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+3)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} - \cdots\right\}; \tag{13}$$

dieselbe konvergiert für alle endlichen Werte von $x$, ist also eine „ganze Funktion". Sie läßt sich durch eine Besselsche Funktion mittels folgender Formel ausdrücken:

$$\psi_n(x) = (-)^n \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\, x^{-(n+\frac{1}{2})} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \tag{14}$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{d}{dx} + 1\right)\psi_n(x) = 0. \tag{15}$$

Die Funktionen $\psi_n$ mit aufeinander folgenden Werten des Index $n$ sind durch die Gleichungen verknüpft

$$x\frac{d\psi_{n-1}(x)}{dx} = x^2\psi_n(x) = -\psi_{n-2}(x) - (2n-1)\psi_{n-1}(x). \tag{16}$$

Die durch die Gleichung

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

bestimmte Funktion $\Psi_n(x)$, die im Ursprung einen Pol von der Ordnung $2n+1$ besitzt und durch eine Besselsche Funktion von der Ordnung $-(n+\frac{1}{2})$ ausgedrückt werden kann, genügt den Gleichungen (15) und (16).

In gleicher Weise lassen sich Lösungen der Gleichungen (8) und (9), die in der Umgebung des Ursprungs singularitätenfrei sind, in folgender Form ausdrücken:

$$u_2 = U_n\psi_n(\varkappa r),\quad v_2 = V_n\psi_n(\varkappa r),\quad w_2 = W_n\psi_n(\varkappa r), \tag{17}$$

wo $U_n$, $V_n$, $W_n$ Kugelfunktionen $n^{\text{ten}}$ Grades; vorausgesetzt ist, daß diese Funktionen so miteinander verknüpft sind, daß

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \tag{9'}$$

Eine Möglichkeit, dieser Gleichung zu genügen, besteht darin, $U_n$, $V_n$, $W_n$ in folgender Form anzunehmen:

$$U_n = y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}, \quad V_n = z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z}, \quad W_n = x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}, \quad (18)$$

wo $\chi_n$ eine Kugelfunktion $n^{\text{ten}}$ Grades; denn für diese Ausdrücke gilt

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} + \frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{\partial W_n}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad x U_n + y V_n + z W_n = 0.$$

Eine zweite Möglichkeit, der Gleichung (9') zu genügen, ergibt sich aus der Bemerkung, daß curl$(u_2, v_2, w_2)$ denselben Gleichungen (8) und (9) genügt wie $(u_2, v_2, w_2)$ selbst. Nehmen wir an, $u_2'$, $v_2'$, $w_2'$ seien durch die Gleichungen

$$(u_2', v_2', w_2') = \psi_n(\varkappa r)\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y},\; z\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial \chi_n}{\partial z},\; x\frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right)$$

gegeben, so erhalten wir Formeln folgender Art:

$$\frac{\partial w_2'}{\partial y} - \frac{\partial v_2'}{\partial z} = \varkappa\psi_n'(\varkappa r)\left(n\frac{x}{r}\chi_n - r\frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right) - (n+1)\psi_n(\varkappa r)\frac{\partial \chi_n}{\partial x},$$

wo $\psi_n'(\varkappa r)$ die Ableitung $d\psi_n(\varkappa r)/d(\varkappa r)$ bedeutet. Mittels der Identität

$$x\chi_n = \frac{r^2}{2n+1}\left\{\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right)\right\} \quad (19)$$

und der Relationen zwischen den Funktionen $\psi$ mit aufeinander folgenden Indexwerten geht obige Formel in folgende über:

$$\frac{\partial w_2'}{\partial y} - \frac{\partial v_2'}{\partial z} = \frac{n+1}{2n+1}\psi_{n-1}(\varkappa r)\frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \frac{n}{2n+1}\psi_{n+1}(\varkappa r)\varkappa^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi_n}{r^{2n+1}}\right),$$

in der jedes Glied von der Form $U_n\psi_n(\varkappa r)$ ist. Genau so lassen sich die anderen Komponenten von curl $(u_2', v_2', w_2')$ bilden.

Bezeichnen also $\chi_n$ und $\Phi_{n+1}$ zwei beliebige Kugelfunktionen von der durch den Index angezeigten Ordnung, so erhalten wir Lösungen der Gleichungen (8) und (9) in folgender Form:

$$u_2 = \sum \psi_n(\varkappa r)\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x}\right)$$
$$- \frac{n+1}{n+2}\psi_{n+2}(\varkappa r)\varkappa^2 r^{2n+5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right). \quad (20)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für $v_2$ und $w_2$ ergeben sich hieraus durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $x, y, z$.

## § 192. Aufstellung der Randbedingungen für eine schwingende Kugel.

Wir haben diese Entwicklungen nunmehr auf das Problem der freien Schwingungen einer festen Kugel anzuwenden. Zu diesem Zweck müssen wir die Spannung berechnen, die auf die Oberfläche einer Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt wirkt. Die Komponenten $X_r$, $Y_r$, $Z_r$ dieser Spannung drücken sich wie in § 175 durch Formeln vom Typus

$$\frac{r X_r}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} x \Delta + \frac{\partial}{\partial x}(ux + vy + wz) + r\frac{\partial u}{\partial r} - u. \tag{21}$$

aus. In dieser Formel hat $\Delta$ die in (11) angegebene Form, d. h. $\sum \omega_n \psi_n(hr)$, und $u, v, w$ haben folgende Form

$$u = -\frac{1}{h^2}\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \sum\left[\psi_n(\varkappa r)\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{n+1}{n+2}\psi_{n+2}(\varkappa r)\,\varkappa^2 r^{2n+5}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_{n+1}}{r^{2n+3}}\right)\right], \text{ usw.} \tag{22}$$

Wir finden

$$ux + vy + wz = -\frac{r}{h^2}\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \sum (n+1)\{\psi_n(\varkappa r) + \varkappa^2 r^2 \psi_{n+2}(\varkappa r)\}\Phi_{n+1}$$

oder

$$ux + vy + wz = \sum\left[-\frac{1}{h^2}\{n\psi_n(hr) + hr\psi_n'(hr)\}\,\omega_n\right.$$
$$\left. - (n+1)(2n+3)\,\psi_{n+1}(\varkappa r)\,\Phi_{n+1}\right]. \tag{23}$$

Diese Formel liefert uns die Radialverschiebung

$$(ux + vy + wz)/r.$$

Um die typischen Ausdrücke, aus denen $x\Delta$, $\frac{\partial}{\partial x}(ux + vy + wz)$, $r\frac{\partial u}{\partial r} - u$ sich zusammensetzen, zu bilden, werden wir ständigen Gebrauch von Identitäten wie (19) und von den durch die $\psi$-Funktionen befriedigten Gleichungen machen. Wir werden nacheinander die Anteile, die die verschiedenen harmonischen Funktionen $\omega_n, \Phi_n, \chi_n$ zu jedem der obigen Ausdrücke liefern, erhalten.

Die Funktion $\omega_n$ liefert zu $x\Delta$ die Terme

$$\frac{1}{2n+1}\psi_n(hr)\left\{r^2\frac{\partial \omega}{\partial x} - r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)\right\}, \tag{24}$$

und die Funktionen $\Phi_n$, $\chi_n$ tragen nichts zu $x\Delta$ bei.

Die Funktion $\omega_n$ liefert zu $\partial(ux + vy + wz)/\partial x$ den Anteil

$$-\frac{1}{h^2}\{(n\psi_n(hr)+hr\psi_n'(hr)\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{h^2}\{(n+1)hr\psi_n'(hr)+h^2r^2\psi_n''(hr)\}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\partial\omega_n}{\partial x}-r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)\right\};$$

derselbe reduziert sich auf

$$-\frac{1}{h^2}\left\{\left(n-\frac{h^2r^2}{2n+1}\right)\psi_n(hr)+\frac{n}{2n+1}hr\psi_n'(hr)\right\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}$$
$$-\left\{\psi_n(hr)+\frac{n+1}{hr}\psi_n'(hr)\right\}\frac{r^{2n+3}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right). \tag{25}$$

Die Funktion $\Phi_n$ liefert zu $\partial(ux+vy+wz)/\partial x$ die Glieder

$$-n\{(2n+1)\psi_n(\varkappa r)+\varkappa r\psi_n'(\varkappa r)\}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}$$
$$+n\varkappa\psi_n'(\varkappa r)r^{2n+2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_n}{r^{2n+1}}\right). \tag{26}$$

Die Funktion $\chi_n$ trägt nichts zu diesem Ausdruck bei.

Die Funktion $\omega_n$ liefert zu $u$ den Anteil

$$-\frac{1}{h^2}\left[\left\{\psi_n(hr)+\frac{1}{2n+1}hr\psi_n'(hr)\right\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2n+1}hr\psi_n'(hr)r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)\right]\ ; \tag{27}$$

zu $r\frac{\partial u}{\partial r}-u$ liefert sie die Glieder.

$$-\frac{n-2}{h^2}\left[\left\{\psi_n(hr)+\frac{1}{2n+1}hr\psi_n'(hr)\right\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2n+1}hr\psi_n'(hr)r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{h^2}\left\{\frac{2(n+1)}{2n+1}hr\psi_n'(hr)+\frac{h^2r^2}{2n+1}\psi_n''(hr)\right\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}$$
$$+\frac{1}{(2n+1)h^2}\{hr\psi_n'(hr)+h^2r^2\psi_n''(hr)\}r^{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right),$$

die sich reduzieren auf

$$-\frac{1}{h^2}\left[\left\{(n-2)-\frac{h^2r^2}{2n+1}\right\}\psi_n(hr)+\frac{n-2}{2n+1}hr\psi_n'(hr)\right]\frac{\partial\omega_n}{\partial x}$$
$$-\left\{\psi_n(hr)+\frac{n+3}{hr}\psi_n'(hr)\right\}\frac{r^{2n+3}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right). \tag{28}$$

Die Funktion $\Phi_n$ liefert zu $r\partial u/\partial r-u$ die Glieder

$$\{(n-2)\psi_{n-1}(\varkappa r)+\varkappa r\psi_{n-1}'(\varkappa r)\}\frac{\partial\Phi_n}{\partial x}$$
$$-\frac{n}{n+1}\varkappa^2\{n\psi_{n+1}(\varkappa r)+\varkappa r\psi_{n+1}'(\varkappa r)\}r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi}{r^{2n+1}}\right). \tag{29}$$

Zu demselben Ausdruck trägt die Funktion $\chi_n$ die Glieder bei

$$\{(n-1)\psi_n(\varkappa r) + \varkappa r\psi_n'(\varkappa r)\}\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right). \tag{30}$$

Die vollständigen Ausdrücke für die Spannungen $X_r, Y_r, Z_r$ lassen sich nunmehr gemäß (21) hinschreiben, und wir können die Bedingungen dafür aufstellen, daß diese Spannungen an der Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = a$ verschwinden; sie lauten

$$\sum\Big[p_n\left(y\frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial \chi_n}{\partial y}\right) + a_n\frac{\partial \omega_n}{\partial x} + b_n r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right)$$
$$+ c_n\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + d_n r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_n}{r^{2n+1}}\right)\Big] = 0, \text{ usw.,} \tag{31}$$

wo $p_n, a_n, b_n, c_n, d_n$ Konstanten bedeuten. Die Werte dieser Konstanten gehen aus den obigen Entwicklungen hervor. Schreiben wir $\varkappa^2/h^2 - 2$ für $\lambda/\mu$ und benutzen die von den $\psi$-Funktionen befriedigten Gleichungen, so erhalten wir für die Konstanten folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
p_n &= (n-1)\psi_n(\varkappa a) + \varkappa a\psi_n'(\varkappa a),\\
a_n &= \frac{1}{(2n+1)h^2}\left\{\varkappa^2 a^2\psi_n(ha) + 2(n-1)\psi_{n-1}(ha)\right\},\\
b_n &= -\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{k^2}{h^2}\psi_n(ha) + \frac{2(n+2)}{ha}\psi_n'(ha)\right\},\\
c_n &= \varkappa^2 a^2\psi_n(\varkappa a) + 2(n-1)\psi_{n-1}(\varkappa a)\\
d_n &= \varkappa^2\frac{n}{n+1}\left\{\psi_n(\varkappa a) + \frac{2(n+2)}{\varkappa a}\psi_n'(\varkappa a)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Es treten noch zwei Gleichungen vom Typus (31) hinzu, die aus der hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $x, y, z$ erhalten werden. Diese Gleichungen gelten an der Oberfläche $r = a$.

## § 193. Inkompressibles Material.

Im Falle inkompressiblen Materials haben wir $\Delta = 0$ zu nehmen und $\lambda\Delta$ durch $-\Pi$ zu ersetzen, wo $\Pi$ einen endlichen Druck bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen haben die Gestalt

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

wobei $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$. Wir erkennen ohne weiteres, daß $\Pi$ eine harmonische Funktion sein muß, und wir können setzen

$$\Pi = -\mu\sum\omega_n,$$

wo $\omega_n$ eine Kugelfunktion $n^{\text{ten}}$ Grades. Sind $u, v, w$ einfache harmonische Funktionen von $t$ mit der Periode $2\Pi/p$, so haben die Bewegungsgleichungen die Gestalt

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)u - \mu^{-1}\partial\Pi/\partial x = 0;$$

ihre Integrale lassen sich in folgender Form schreiben

$$u = -\frac{1}{\varkappa^2}\sum\frac{\partial\omega_n}{\partial x} + u_2,$$

wo $u_2$ durch (20) gegeben ist. Die Formel für $rX_r/\mu$ geht über in

$$\frac{rX_r}{\mu} = -\frac{x\Pi}{\mu} + \frac{\partial}{\partial x}(ux + vy + wz) + r\frac{\partial u}{\partial r} - u;$$

$\omega_n$ liefert zur rechten Seite den Anteil

$$\left(\frac{r^2}{2n+1} - \frac{2(n-1)}{\varkappa^2}\right)\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \frac{r^{2n+3}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right),$$

während $\Phi_n$ und $\chi_n$ dieselben Glieder wie früher beitragen. Die Annahme der Inkompressibilität des Materials läuft also darauf hinaus, $a_n$ mit $\frac{a^2}{2n+1} - \frac{2(n-1)}{\varkappa^2}$ und $b_n$ mit $-\frac{1}{2n+1}$ zu vertauschen, während die übrigen Koeffizienten auf der linken Seite von (31) ungeändert bleiben.

## § 194. Frequenzengleichungen für die schwingende Kugel.

Die linken Seiten der Gleichungen vom Typus (31) sind Summen von Kugelfunktionen positiven Grades, und sie verschwinden an der Oberfläche $r = a$. Es folgt hieraus, daß sie überall verschwinden. Differentiieren wir die linken Seiten dieser Gleichungen bezüglich nach $x, y, z$ und addieren, so erhalten wir die Gleichung

$$b_n\omega_n + d_n\Phi_n = 0. \tag{33}$$

Multiplizieren wir die linken Seiten der Gleichungen vom Typus (31) bezüglich mit $x, y, z$ und addieren die entstehenden Ausdrücke, so erhalten wir, wenn wir noch mittels (33) vereinfachen,

$$a_n\omega_n + c_n\Phi_n = 0. \tag{34}$$

Die Gleichungen vom Typus (31) zeigen dann, daß wir haben

$$p_n\left(y\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\right) = 0,\quad p_n\left(z\frac{\partial\chi_n}{\partial x} - x\frac{\partial\chi_n}{\partial z}\right) = 0,\quad p_n\left(x\frac{\partial\chi_n}{\partial y} - y\frac{\partial\chi_n}{\partial x}\right) = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Schwingungen in zwei Klassen zerfallen. Bei der ersten Klasse verschwinden $\omega_n$ und $\Phi_n$, und die Schwingungszahl bestimmt sich durch die Gleichung

$$p_n = 0, \tag{35}$$

wo $p_n$ durch die erste der Gleichungen (32) gegeben ist. Bei der zweiten Klasse verschwindet $\chi_n$, und die Frequenz berechnet sich aus der Gleichung

$$a_n d_n - b_n c_n = 0, \tag{36}$$

wo $a_n, b_n, c_n, d_n$ durch (32) gegeben sind. Bei den Schwingungen dieser Klasse sind $\omega_n$ und $\Phi_n$ miteinander durch die kompatiblen Gleichungen (33) und (34) verknüpft.

## § 195. Schwingungen der ersten Klasse.[1])

Handelt es sich um eine Schwingung der ersten Klasse, so ist die Verschiebung von der Form

$$(u, v, w) = A \cos(pt + \varepsilon)\, \psi_n(\varkappa r) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y},\; z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial z},\; x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial x}\right), \quad (37)$$

wo $\varkappa^2 = p^2 \varrho/\mu$; die möglichen Werte von $p$ bestimmen sich durch die Gleichung

$$(n-1)\, \psi_n(\varkappa a) + \varkappa a \psi_n'(\varkappa a) = 0. \quad (38)$$

Die Dilatation verschwindet. Die radiale Verschiebung verschwindet ebenfalls, sodaß die Verschiebung in jedem Punkte senkrecht zu dem vom Kugelmittelpunkt aus gezogenen Radius gerichtet ist. Auch ist sie senkrecht zur Normalen der durch den Punkt gehenden Fläche aus der Schar $\chi_n = \text{const.}$ Die Kugelflächen, die durch die Gleichung $\psi_n(\varkappa r) = 0$ bestimmt sind, stellen „Knotenflächen" dar, d. h. die Verschiebung verschwindet auf ihnen. Die Kugelflächen, die durch die Gleichung bestimmt sind

$$(n-1)\, \psi_n(\varkappa r) + \varkappa r \psi_n'(\varkappa r) = 0,$$

wo $\varkappa$ eine Wurzel von (38), stellen „Gegenknotenflächen" dar, d. h. es wirkt auf sie keine Spannung. Sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ die der Gleichung (38) genügenden Werte von $\varkappa$ in steigender Folge, so haben die Gegenknotenflächen, die der Schwingung von der Frequenz $(2\pi)^{-1}\sqrt{\mu/\varrho}\; \varkappa_s$ entsprechen, die Radien $\varkappa_1 a/\varkappa_s,\; \varkappa_2 a/\varkappa_s, \ldots, \varkappa_{s-1} a/\varkappa_s$.

Ist $n = 1$, so haben wir *Drehschwingungen.*[2]) Wählen wir als $z$-Achse die Achse der Kugelfunktion $\chi_1$, so ist die Verschiebung

$$(u, v, w) = A \cos(pt + \varepsilon)\, \psi_1(\varkappa r)\, (y, -x, 0),$$

sodaß jede mit der Oberfläche konzentrische Kugel sich um die $z$-Achse durch einen kleinen Winkel dreht, der mit $\psi_1(\varkappa r)$, d. h. mit $(\varkappa r)^{-2} \cos \varkappa r - (\varkappa r)^{-3} \sin \varkappa r$ proportional ist. Die möglichen Werte von $\varkappa$ sind die Wurzeln der Gleichung $\psi_1'(\varkappa a) = 0$ oder

$$\operatorname{tg} \varkappa a = 3 \varkappa a / (3 - \varkappa^2 a^2).$$

Die kleinsten Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\frac{\varkappa a}{\pi} = 1{,}8346;\; 2{,}8950;\; 3{,}9225;\; 4{,}9385;\; 5{,}9489;\; 6{,}9563;\ldots$$

Die Zahl $\pi/\varkappa a$ ist das Verhältnis der Schwingungsperiode zu der Zeit, die eine Schiebungswelle braucht[3]), um eine Strecke von der Länge des

1) Die in diesem und in den folgenden Paragraphen gegebenen Resultate verdankt man H. Lamb, *loc. cit.* p. 320.

2) Schwingungsarten, die den Drehschwingungen der Kugel analog sind, gibt es bei jedem Umdrehungskörper, wie P. Jaerisch, *J. f. Math.* (Crelle), Bd. 104 (1899), gezeigt hat.

3) Die Geschwindigkeit der Schiebungswellen ist $(\mu/\varrho)^{\frac{1}{2}}$. Siehe Kap. XIII.

Kugeldurchmessers zu durcheilen. Die Knotenflächen sind durch die Gleichung $\operatorname{tg} kr = kr$ gegeben, deren Wurzeln sind

$$\frac{\varkappa r}{\pi} = 1{,}4303;\ 2{,}4590;\ 3{,}4709;\ 4{,}4774;\ 5{,}4818;\ 6{,}4844;\ldots$$

## § 196. Schwingungen der zweiten Klasse.

Wenn es sich um eine Schwingung der zweiten Klasse handelt, so drücken sich die Verschiebungskomponenten durch Gleichungen von folgendem Typus aus

$$\begin{aligned} u = A\cos(pt+\varepsilon)\Big[&-\frac{1}{h^2}\left\{\psi_n(hr) + \frac{hr}{2n+1}\psi_n'(hr)\right\}\frac{\partial\omega_n}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{(2n+1)h}\psi_n'(hr)r^{2n+2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\omega_n}{r^{2n+1}}\right) + \psi_{n-1}(\varkappa r)\frac{\partial\Phi_n}{\partial x} \\ &- \frac{n}{n+1}\psi_{n+1}(\varkappa r)\varkappa^2 r^{2n+3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_n}{r^{2n+1}}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{39}$$

Die Frequenzgleichung (36) kann numerisch nur gelöst werden, wenn das Verhältnis $\varkappa/h$ bekannt ist. Wir wollen in erster Linie inkompressibles Material, für welches $h/\varkappa = 0$, und der Poissonschen Bedingung $(\lambda = \mu)$ genügendes Material, für welches $\varkappa/h = \sqrt{3}$, betrachten.

*Radiale Schwingungen.*

Wenn $n = 0$ ist, haben wir radiale Schwingungen. Die Normalfunktionen haben die Form

$$u = \frac{x}{r}\psi_0'(hr),\quad v = \frac{y}{r}\psi_0'(hr),\quad w = \frac{z}{r}\psi_0'(hr), \tag{40}$$

und die Frequenzengleichung ist $b_0 = 0$ oder

$$\psi_0(ha) + \frac{4}{\varkappa^2 a^2}\, ha\,\psi_0'(ha) = 0, \tag{41}$$

d. h.

$$\frac{\operatorname{tg} ha}{ha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(\varkappa^2/h^2)h^2a^2}.$$

Natürlich gibt es keine Radialschwingungen, wenn das Material inkompressibel ist. Wenn $\varkappa^2/h^2 = 3$, so sind die sechs kleinsten Wurzeln der Frequenzengleichung gegeben durch

$$\frac{ha}{\pi} = 0{,}8160;\ 1{,}9285;\ 2{,}9359;\ 3{,}9658;\ 4{,}9728;\ 5{,}9774.$$

Die Zahl $\pi/ha$ ist das Verhältnis der Schwingungsperiode zu der Zeit, die eine Dilatationswelle braucht[1]), um eine Strecke von der Länge des Kugeldurchmessers zu durchlaufen.

1) Die Geschwindigkeit der Dilatationswellen ist $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\varrho}$. Siehe Kap. XIII.

*Sphäroidale Schwingungen.*

Ist $n = 2$ und sind $\omega_2$ und $\Phi_2$ einfache Kugelfunktionen, so erhalten wir Schwingungen, die wir als *sphäroidale Schwingungen* bezeichnen können: die Kugel deformiert sich zu einem Umdrehungsellipsoid, das, je nach der Schwingungsphase, abwechselnd abgeplattete und verlängerte Form hat. Schwingungen dieser Art würden etwa von Kräften herrühren können, die eine geeignete Periode und denselben Typus besitzen wie die bei Gezeiten wirkenden störenden Kräfte. Es ergibt sich, daß die kleinste Wurzel der Frequenzengleichung für freie Schwingungen dieser Art durch $\varkappa a/\pi = 0{,}848$ gegeben ist, falls das Material inkompressibel ist, und durch $\varkappa a/\pi = 0{,}840$, falls das Material der Poissonschen Bedingung genügt. Bei einer Kugel von der Größe und Masse der Erde, die als inkompressibel und so steif wie Stahl angenommen wird, beträgt die Periode der langsamsten freien Schwingung von der hier beschriebenen Art ungefähr 66 Minuten.

## § 197. Weitere Untersuchungen über die Schwingungen von Kugeln.

Die Schwingungen einer Kugel, an welcher Oberflächenspannungen angreifen, die mit einfachen harmonischen Funktionen der Zeit proportional sind, sind von Chree[1]) untersucht worden. Die freien Schwingungen einer von konzentrischen Kugeln begrenzten Schale hat Lamb[2]) behandelt und zwar mit besonderer Berücksichtigung des Falles, daß die Schale dünn ist. Den Einfluß der Schwere auf die freien Schwingungen einer inkompressiblen Kugel hat Bromwich[3]) betrachtet. Er fand insbesondere daß die Periode der „sphäroidalen" Schwingungen einer Kugel von der Größe und Masse der Erde und der Steifigkeit des Stahls durch die gegenseitige Anziehung der Kugelteilchen von 66 auf 55 Minuten vermindert wird. Eine allgemeinere Untersuchung über den Einfluß der Gravitation in einer Kugel, die nicht aus inkompressiblem Material besteht, rührt her von Jeans.[4])

## § 198. Radiale Schwingungen einer Hohlkugel.[5])

Die radialen Schwingungen einer Kugel oder Kugelschale lassen sich sehr einfach untersuchen, wenn Polarkoordinaten eingeführt werden, In der Bezeichnung von § 98 würden wir finden, daß die Radialverschiebung $U$ die Gleichung erfüllt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U + h^2 U = 0$$

und daß die Radialspannung $\widehat{rr}$ auf eine Kugel vom Radius $r$ gleich

1) *Loc. cit.* p. 320.

2) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 14 (1883).

3) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 30 (1899).

4) *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 201 (1903).

5) Das Problem der radialen Schwingungen einer festen Kugel gehört zu denjenigen, die Poisson in seiner Abhandlung vom Jahre 1828 behandelte. Siehe *Einleitung*, Fußnote 36.



$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda\frac{U}{r}$$

ist. Das Integral der Differentialgleichung für $U$ läßt sich schreiben

$$U = \frac{d}{d(hr)}\left(\frac{A\sin hr + B\cos hr}{hr}\right),$$

die Bedingung dafür, daß die Spannung $\widehat{rr}$ an der Oberfläche der Kugel vom Radius $r$ verschwindet, lautet

$$[(\lambda + 2\mu)\{(2 - h^2r^2)\sin hr - 2hr\cos hr\} + 2\lambda(hr\cos hr - \sin hr)]A$$
$$+ [(\lambda + 2\mu)\{(2 - h^2r^2)\cos hr + 2hr\sin hr\} - 2\lambda(hr\sin hr + \cos hr)]B = 0.$$

Handelt es sich um eine Vollkugel, so haben wir $B = 0$ zu setzen, und die Bedingung für das Verschwinden der Spannung auf $r = a$ ist die früher gefundene Frequenzengleichung. Im Falle einer Kugelschale ergibt sich die Frequenzengleichung durch Elimination des Verhältnisses $A : B$ aus den Bedingungen, die das Verschwinden von $\widehat{rr}$ auf $r = a$ und $r = b$ ausdrücken. Wir schreiben

$$4h^2/\varkappa^2 = \nu,$$

sodaß $2\lambda/(\lambda + 2\mu) = 2 - \nu$, dann lautet die Gleichung

$$\frac{\nu ha + (h^2a^2 - \nu)\operatorname{tg} ha}{(h^2a^2 - \nu) - \nu ha\operatorname{tg} ha} = \frac{\nu hb + (h^2b^2 - \nu)\operatorname{tg} hb}{(h^2b^2 - \nu) - \nu hb\operatorname{tg} hb}.$$

In dem besonderen Fall, daß die Kugelschale sehr dünn ist, läßt sich diese Gleichung ersetzen durch

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\nu ha + (h^2a^2 - \nu)\operatorname{tg} ha}{(h^2a^2 - \nu) - \nu ha\operatorname{tg} ha} = 0,$$

oder

$$h^2a^2\sec^2 ha\,\{h^2a^2 - \nu(3 - \nu)\} = 0.$$

Wir haben daher

$$ha = \sqrt{\nu(3 - \nu)}.$$

Ausgedrückt durch die Poissonsche Konstante $\sigma$ ist die Periode gleich

$$\pi a\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}}.$$

## § 199. Schwingungen eines Kreiszylinders.[1]

Wir wollen gewisse Schwingungsarten eines isotropen Kreiszylinders, dessen Mantel spannungsfrei ist, untersuchen, unter der Voraussetzung, daß die Verschiebung eine einfache harmonische Funktion von $z$ sowohl wie von $t$ ist, wenn die $z$-Achse mit der Achse

1) Man verdankt die Theorie in Wirklichkeit L. Pochhammer, *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 81 (1876), p. 324. Sie ist aber auch behandelt von C. Chree, *loc. cit.* p. 320.

des Zylinders zusammenfällt. Schwingungen dieser Art würden in einem unbegrenzten Zylinder durch Überlagerung zweier Wellenzüge, die in entgegengesetzter Richtung den Zylinder entlang laufen, zustande kommen. Besitzt der Zylinder endliche Länge, so würde sich die Frequenz der freien Schwingung aus der Bedingung bestimmen, daß die ebenen Endflächen spannungsfrei sind. Wir werden finden, daß diese Bedingungen von Schwingungsarten der bezeichneten Art im allgemeinen nicht streng befriedigt werden, daß sie jedoch, wenn der Zylinderradius klein ist im Vergleich zur Länge, annähernd erfüllt sind.

Wir bedienen uns der auf Zylinderkoordinaten $r$, $\theta$, $z$ bezogenen Schwingungsgleichungen. Dieselben lauten

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varpi_z}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \varpi_\theta}{\partial z},\\
\varrho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \varpi_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \varpi_z}{\partial r},\\
\varrho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varpi_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varpi_r}{\partial \theta},
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

worin

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{43}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
2\varpi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad 2\varpi_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r},\\
2\varpi_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

sodaß $\varpi_r$, $\varpi_\theta$, $\varpi_z$ der identischen Beziehung genügen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varpi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \varpi_z}{\partial z} = 0. \tag{45}$$

Die Spannungskomponenten $\widehat{rr}$, $\widehat{r\theta}$, $\widehat{rz}$ verschwinden auf dem Zylindermantel $r = a$. Sie drücken sich aus durch

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \widehat{r\theta} = \mu \left\{\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\right\},\\
\widehat{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

In Übereinstimmung mit dem oben Gesagten nehmen wir $u_r$, $u_\theta$, $u_z$ in der Form an

$$u_r = U e^{i(\gamma z + pt)}, \quad u_\theta = V e^{i(\gamma z + pt)}, \quad u_z = W e^{i(\gamma z + pt)}, \tag{47}$$

worin $U$, $V$, $W$ Funktionen von $r$, $\theta$ bedeuten.

## § 200. Drillungsschwingungen.

Wir können eine Lösung erhalten, bei der $U$ und $W$ verschwinden und $V$ von $\theta$ unabhängig ist. Die erste und die dritte der Gleichungen (42) werden identisch befriedigt, und die zweite von diesen Gleichungen geht über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r^2} V + \varkappa'^2 V = 0, \tag{48}$$

wo $\varkappa'^2 = p^2 \varrho/\mu - \gamma^2$. $V$ ist somit von der Form $BJ_1(\varkappa' r)$, wo $B$ eine Konstante und $J_1$ die Besselsche Funktion von der Ordnung eins bedeutet. Die Bedingungen auf der Fläche $r = a$ sind befriedigt, falls $\varkappa$ eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{J_1(\varkappa' a)}{a}\right\} = 0.$$

Eine Lösung der Gleichung ist $\varkappa' = 0$, und die durch (48) gegebene entsprechende Form von $V$ ist $V = Br$, wo $B$ eine Konstante.

Wir haben somit eine einfache harmonische Wellenbewegung vom Typus

$$u_r = 0, \quad u_\theta = Bre^{i(\gamma z + pt)}, \quad u_z = 0 \tag{49}$$

gefunden, wo $\gamma^2 = p^2 \varrho/\mu$. Es handelt sich offenbar um Torsionswellen; dieselben pflanzen sich längs des Zylinders mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\mu/\varrho}$ fort.[1])

Die Spannung auf einen Normalschnitt $z = \text{const.}$ verschwindet, falls $\partial u_\theta/\partial z$ verschwindet; demnach können in einem Kreiszylinder von der Länge $l$ freie Drillungsschwingungen auftreten, und zwar drückt sich die Verschiebung durch folgende Formel aus

$$\frac{u_\theta}{r} = \cos\frac{n\pi z}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} + \varepsilon\right); \tag{50}$$

wobei $n$ eine ganze Zahl bedeutet und der Ursprung in der einen Endfläche angenommen ist.

## § 201. Längsschwingungen.

Wir können eine Lösung erhalten, bei der $V$ verschwindet und $U$ und $W$ von $\theta$ unabhängig sind. Die zweite der Gleichungen (42) ist dann identisch befriedigt, und aus den beiden anderen finden wir

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Delta}{\partial r} + h'^2 \Delta = 0, \\ &\frac{\partial^2 \varpi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varpi_\theta}{\partial r} - \frac{\varpi_\theta}{r^2} + \varkappa'^2 \varpi_\theta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Kap. VII.

wo

$$h'^2 = p^2\varrho/(\lambda + 2\mu) - \gamma^2, \quad \varkappa'^2 = p^2\varrho/\mu - \gamma^2. \tag{52}$$

Demnach müssen wir $\Delta$ und $\varpi_\theta$, als Funktionen von $r$, proportional mit $J_0(h'r)$ und $J_1(\varkappa'r)$ annehmen. Um nun die Gleichungen

$$\Delta = \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + i\gamma W\right) e^{i(\gamma z + pt)}, \quad 2\varpi_\theta = \left(i\gamma U - \frac{\partial W}{\partial r}\right) e^{i(\gamma z + pt)}$$

zu befriedigen, müssen wir $U$ und $W$ in der Form ansetzen

$$\left.\begin{aligned} U &= A\frac{\partial}{\partial r} J_0(h'r) + C\gamma J_1(\varkappa'r), \\ W &= Ai\gamma J_0(h'r) + \frac{iC}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{rJ_1(\varkappa'r)\}, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

wo $A$ und $C$ Konstanten.

Die Spannung auf den Zylindermantel $r = a$ verschwindet, wenn $A$ und $C$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\left.\begin{aligned} A\left[2\mu\frac{\partial J_0(h'a)}{\partial a^2} - \frac{p^2\varrho\lambda}{\lambda + 2\mu} J_0(h'a)\right] + 2\mu C\gamma\frac{\partial J_1(\varkappa'a)}{\partial a} = 0, \\ 2A\gamma\frac{\partial J_0(h'a)}{\partial a} + C\left(2\gamma^2 - \frac{p^2\varrho}{\mu}\right) J_1(\varkappa'a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Eliminieren wir das Verhältnis $A : C$, so erhalten wir die Frequenzengleichung.

Wenn der Radius des Zylinders klein ist, so erhalten wir einen angenäherten Wert der Frequenz, indem wir die Besselschen Funktionen in Reihen entwickeln. Setzen wir

$$J_0(h'a) = 1 - \tfrac{1}{4}h'^2a^2 + \tfrac{1}{64}h'^4a^4, \quad J_1(\varkappa'a) = \varkappa'a - \tfrac{1}{8}\varkappa'^3a^3,$$

so lautet die Frequenzengleichung

$$\left(\frac{p^2\varrho}{\mu} - 2\gamma^2\right)\varkappa'a\left(1 - \frac{\varkappa'^2a^2}{8}\right)\left[h'^2\left(1 - \tfrac{3}{8}a^2h'^2\right) + \frac{\lambda}{\mu}\frac{p^2\varrho}{\lambda + 2\mu}\left(1 - \tfrac{1}{4}a^2h'^2\right)\right]$$
$$+ 2\gamma^2\varkappa'\left(1 - \tfrac{3}{8}a^2\varkappa'^2\right) ah'^2\left(1 - \tfrac{1}{8}a^2h'^2\right) = 0.$$

Wir erkennen leicht, daß wir keine Wellenbewegung von dem in Rede stehenden Typus erhalten, wenn wir $\varkappa' = 0$ setzen. Lassen wir den Faktor $\varkappa'a$ und die Glieder von der Ordnung $a^2$ weg, so ergibt sich der Wert von $p$, ausgedrückt durch $\gamma$, in erster Annäherung zu

$$p = \gamma\sqrt{E/\varrho}, \tag{55}$$

wo $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ der Youngsche Modul. Die so bestimmten Wellen sind „longitudinal“, und die Geschwindigkeit, mit der sie sich längs des Zylinders fortpflanzen, beträgt angenähert $\sqrt{E/\varrho}$.[1])

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Kap. VII.

Behalten wir Glieder von der Ordnung $a^2$ bei, so erhalten wir für die Geschwindigkeit eine zweite Annäherung[1]) in der Form

$$p = \gamma \sqrt{E/\varrho}\,(1 - \tfrac{1}{4}\,\sigma^2\gamma^2a^2), \tag{56}$$

wo $\sigma = \frac{1}{2}\lambda/(\lambda+\mu)$ die Poissonsche Konstante.

Wenn der Zylinder von zwei ebenen Querschnitten $z = 0$ und $z = l$ begrenzt wird und diese Querschnitte spannungsfrei sind, so verschwinden $\widehat{zz}$ und $\widehat{zr}$ auf $z = 0$ und $z = l$. Als Werte von $\widehat{zz}$ und $\widehat{zr}$ für einen beliebigen Querschnitt ergeben sich die Ausdrücke

$$\widehat{zz} = -\Big[A\Big(p^2\varrho\,\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} + 2\mu\gamma^2\Big) J_0(h'r) + 2\mu\gamma C\Big\{\frac{\partial J_1(\varkappa' r)}{\partial r} + \frac{J_1(\varkappa' r)}{r}\Big\}\Big] e^{i(\gamma z + pt)},$$

$$\widehat{zr} = \mu i\Big[2A\gamma\,\frac{\partial J_0(h'r)}{\partial r} + C\Big(2\gamma^2 - \frac{p^2\varrho}{\mu}\Big) J_1(\varkappa' r)\Big] e^{i(\gamma z + pt)}.$$

Wir können nun eine Lösung von folgender Form bekommen

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \Big[A_n\frac{\partial J_0(h'r)}{\partial r} + \frac{n\pi}{l}\,C_n J_1(\varkappa' r)\Big]\sin\frac{n\pi z}{l}\cos(p_n t + \varepsilon),\\ u_z &= \Big[\frac{n\pi}{l}A_n J_0(h'r) + C_n\Big\{\frac{\partial J_1(\varkappa' r)}{\partial r} + \frac{J_1(\varkappa' r)}{r}\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi z}{l}\cos(p_n t + \varepsilon);\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

hierin ist die Zahl $A_n : C_n$ aus den Bedingungen, die auf $r = a$ gelten, bekannt, $\gamma$ ist durch $(n\pi/l)$ ersetzt, und $p_n$ ist angenähert gleich $(n\pi/l)\sqrt{E/\varrho}$, wenn $a$ klein ist im Vergleich zu $l$. Diese Lösung befriedigt die Bedingung $\widehat{zz} = 0$ auf $z = 0$ und auf $z = l$, sie genügt aber nicht der Bedingung $\widehat{zr} = 0$ auf diesen beiden Flächen. Da jedoch auf dem Mantel $r = a$ für alle Werte von $z$ $\widehat{zr} = 0$ ist, so ist die Spannung $\widehat{zr}$ in allen Punkten der Endflächen $z = 0$ und $z = l$ sehr klein, wenn $a$ klein ist im Vergleich zu $l$.

Lassen wir $u_r$ den Faktor $\cos(n\pi z/l)$ und $u_z$ den Faktor $-\sin(n\pi z/l)$ enthalten, während die übrigen Faktoren dieselben sind wie früher, so bekommen wir eine Lösung des Problems der Längsschwingungen in einem Zylinder, an dem die Mittelpunkte beider Endflächen festgehalten werden.

---

1) Das Resultat rührt her von L. Pochhammer, *loc. cit.* p. 331. Unabhängig von ihm fand es C. Chree, *Quart. J. of Math.*, vol. 21 (1886), der auch die Verallgemeinerung auf Fälle gab, wo der Normalschnitt des Zylinders nicht kreisförmig und das Material nicht isotrop ist, *Quart. J. of Math.*, vol. 24 (1890); in diesen Fällen ist in obigem Ausdruck (56) das Glied $\frac{1}{4}\sigma^2\gamma^2a^2$ durch $\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\varkappa^2$ zu ersetzen, wo $\varkappa$ der Trägheitsradius des Zylinders, bezogen auf die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Normalschnitte.

### § 202. Querschwingungen.

Eine andere interessante Lösung der Gleichungen (42) erhalten wir, wenn wir $u_r$ und $u_z$ mit $\cos\theta$ und $u_\theta$ mit $\sin\theta$ proportional annehmen. Die Bezeichnung von (47), § 199, abändernd wollen wir schreiben

$$u_r = U\cos\theta e^{i(\gamma z+pt)}, \qquad u_\theta = V\sin\theta e^{i(\gamma z+pt)},$$
$$u_z = W\cos\theta e^{i(\gamma z+pt)}, \tag{58}$$

wo $U$, $V$, $W$ Funktionen von $r$. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \cos\theta e^{i(\gamma z+pt)}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{V}{r}+i\gamma W\right),\\
2\varpi_r &= -\sin\theta e^{i(\gamma z+pt)}\left(\frac{W}{r}+i\gamma V\right),\\
2\varpi_\theta &= \cos\theta e^{i(\gamma z+pt)}\left(i\gamma U-\frac{\partial W}{\partial r}\right),\\
2\varpi_z &= \sin\theta e^{i(\gamma z+pt)}\left(\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}+\frac{U}{r}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Aus den Gleichungen (42) können wir die Gleichung bilden

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\frac{\Delta}{r^2}+h'^2\Delta=0, \tag{60}$$

wo $h'^2$ durch die erste der Gleichungen (52) gegeben ist; es folgt daraus, daß $\Delta$ sich in folgender Form schreiben läßt

$$\Delta=-\frac{p^2\varrho}{\lambda+2\mu}AJ_1(h'r)\cos\theta e^{i(\gamma z+pt)}, \tag{61}$$

wo $A$ eine Konstante.

Andererseits können wir die Gleichung aufstellen

$$-\frac{p^2\varrho}{\mu}\varpi_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}\right)-\frac{\varpi_z}{r^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial\theta}\right\},$$

die wegen (45) übergeht in

$$\frac{\partial^2\varpi_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial r}-\frac{\varpi_z}{r^2}+\varkappa'^2\varpi_z=0, \tag{62}$$

wo $\varkappa'^2$ durch die zweite der Gleichungen (52) gegeben ist. Es folgt daraus, daß $2\varpi_z$ sich in folgender Form schreiben läßt

$$2\varpi_z=\varkappa'^2CJ_1(\varkappa'r)\sin\theta e^{i(\gamma z+pt)}, \tag{63}$$

wo $C$ eine Konstante.

Ebenso können wir die Gleichung aufstellen

$$-\frac{p^2\varrho}{\mu}\varpi_r=-\frac{\varpi_r}{r^2}-\gamma^2\varpi_r-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varpi_\theta}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varpi_z}{\partial z},$$

die wegen (45) übergeht in

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}(r\varpi_r)\right\} - \frac{\varpi_r}{r^2} + \varkappa'^2\varpi_r + \frac{2}{r}\,i\gamma\varpi_z = 0. \tag{64}$$

In dieser Gleichung hat $2\varpi_z$ den in (63) gegebenen Wert, und es folgt daraus, daß $2\varpi_r$ sich in folgender Form schreiben läßt:

$$2\varpi_r = \left\{i\gamma C\frac{\partial J_1(\varkappa' r)}{\partial r} + iB\frac{p^2\varrho}{\mu}\frac{J_1(\varkappa' r)}{r}\right\}\sin\theta\, e^{i(\gamma z + pt)}, \tag{65}$$

wo $B$ eine Konstante. Die Gleichungen, die die Größen $U, V, W$ mit $\Delta$, $\varpi_r$, $\varpi_z$ verknüpfen, lassen sich dann befriedigen, wenn wir setzen

$$\left.\begin{aligned} U &= A\frac{\partial J_1(h'r)}{\partial r} + B\gamma\frac{\partial J_1(\varkappa' r)}{\partial r} + C\frac{J_1(\varkappa' r)}{r},\\ V &= -A\frac{J_1(h'r)}{r} - B\gamma\frac{J_1(\varkappa' r)}{r} - C\frac{\partial J_1(\varkappa' r)}{\partial r},\\ W &= iA\gamma J_1(h'r) - iB\varkappa'^2 J_1(\varkappa' r). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Werden diese Ausdrücke für $U, V, W$ in (58) eingesetzt, so erhalten wir eine Lösung der Gleichungen (42). Da $u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta$ für $r = 0$ verschwindet, so findet die Bewegung der auf der Zylinderachse liegenden Punkte in derjenigen Ebene statt, die die unverzerrte Lage jener Achse und die Gerade, von der aus $\theta$ gemessen wird, enthält; da ferner $u_z$ für $r = 0$ verschwindet, so geht die Bewegung dieser Punkte senkrecht zur Zylinderachse vor sich. Somit handelt es sich um „Transversal-“ oder „Biegungsschwingungen“.

Wir könnten die Bedingungen dafür aufstellen, daß die Mantelfläche spannungsfrei ist. Diese Bedingungen sind sehr verwickelt; entwickeln wir jedoch die Besselschen Funktionen in Reihen, so läßt sich zeigen, daß, wenn der Radius $a$ des Zylinders sehr klein ist, die Größen $p$ und $\gamma$ durch folgende Näherungsgleichung verknüpft sind[1]):

$$p^2 = \tfrac{1}{4}a^2\gamma^4(E/\varrho), \tag{67}$$

wo $E$ der Youngsche Modul. Dies ist die wohlbekannte Gleichung für die Frequenz $p/2\pi$ der Biegungswellen von der Länge $2\pi/\gamma$, die sich längs eines zylindrischen Stabes fortpflanzen. Die Verhältnisse der Konstanten $A, B, C$, die einem bestimmten Werte von $\gamma$ entsprechen, bestimmen sich durch die Bedingungen an der zylindrischen Oberfläche.

Wird der Zylinder von zwei Normalschnitten $z = 0$ und $z = l$ begrenzt, so bezeichnen wir die reelle positive vierte Wurzel aus $4p^2\varrho/a^2E$ mit $m/l$. Wir können vier Lösungsformen erhalten, indem wir für $i\gamma$ in (52), (58), (66) nach einander die vier Größen $\pm m/l$ und

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Kap. VIII.

$\pm im/l$ einsetzen. Demselben Wert von $p$ würden vier Systeme von Konstanten $A$, $B$, $C$ entsprechen, die Verhältnisse $A:B:C$ würden jedoch bei jedem System bekannt sein. Die Bedingung, daß die Spannungskomponenten $\widehat{zz}$, $\widehat{z\theta}$ an den Enden des Zylinders verschwinden, würde eine genügende Zahl von Gleichungen liefern, um die Konstanten vom Typus $A$, $B$, $C$ eliminieren und eine Gleichung für $p$ erhalten zu können. Die Bedingung, daß die Spannungskomponente $\widehat{zr}$ verschwindet, läßt sich nicht streng befriedigen; aber wie beim Problem der Längsschwingungen wird sie annähernd erfüllt, wenn der Zylinder dünn ist.

---

## Kapitel XIII.

## Die Ausbreitung von Wellen in elastischen festen Medien.

§ 203. Die Lösung der Gleichungen der freien Schwingung eines Körpers von gegebener Form läßt sich beliebig gegebenen Anfangsbedingungen anpassen, wenn die Frequenzengleichung gelöst ist und die Normalfunktionen bestimmt sind; auf diese Weise würde man jedoch schwerlich ein deutliches Bild von der Bewegung erhalten, die auf eine im Innern eines Körpers entstandene örtliche Störung folgt, wenn die Punkte der Oberfläche sämtlich oder zum Teil sich in beträchtlicher Entfernung von der anfänglich gestörten Stelle befinden. Zu Beginn der Bewegung erfahren die Teile des Körpers in der Nähe der Oberfläche keine Störung, und die Bewegung vollzieht sich ebenso wie in einem unbegrenzt ausgedehnten Körper. Wir betrachten demgemäß in einem nach allen (oder einigen) Richtungen unbegrenzten elastischen festen Medium Zustände kleiner Bewegung, die zu einer gewissen Zeit auf einen begrenzten Teil des Mediums beschränkt sind, so zwar, daß der übrige Teil des Mediums sich ruhig im spannungslosen Zustand befindet. Wir beginnen mit dem Fall eines isotropen Mediums.

### § 204. Dilatationswellen und Schiebungswellen.

Die Gleichungen der Bewegung des Mediums lassen sich schreiben

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}\right) + \mu \nabla^2 (u, v, w) = \varrho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{dt^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right). \quad (1)$$

Differentiieren wir die linken und rechten Seiten dieser drei Gleichungen bezüglich nach $x$, $y$, $z$ und addieren, so erhalten wir die Gleichung

$$(\lambda + 2\mu)\, \nabla^2 \Delta = \varrho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Eliminieren wir $\Delta$ aus den Gleichungen (1), indem wir auf die linken und rechten Seiten die *curl*-Operation anwenden, so erhalten wir die Gleichungen

$$\mu \nabla^2 (\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z) = \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z). \tag{3}$$

Falls $\Delta$ verschwindet, gehen die Bewegungsgleichungen über in

$$\mu \nabla^2 (u, v, w) = \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w). \tag{4}$$

Falls $\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z$ verschwinden, sodaß $(u, v, w)$ gleich dem Gradienten eines Potentials $\Phi$ ist, können wir $\nabla^2 \Phi$ für $\Delta$ setzen und haben dann

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \frac{\partial \Delta}{\partial y}, \frac{\partial \Delta}{\partial z}\right) = \nabla^2 (u, v, w).$$

In diesem Falle gehen die Bewegungsgleichungen über in

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 (u, v, w) = \varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w). \tag{5}$$

Die Gleichungen (2), (3), (4), (5) sind von der Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Phi; \tag{6}$$

für $\Phi = \Delta$ hat $c^2$ den Wert $(\lambda + 2\mu)/\varrho$; für $\Phi = \varpi_x, \ldots$ hat $c^2$ den Wert $\mu/\varrho$. Die Gleichung (6) nennen wir die „charakteristische Gleichung".

Ist $\Phi$ eine Funktion von $t$ und nur einer Koordinate, etwa $x$, so lautet die Gleichung (6)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2};$$

diese Gleichung läßt sich integrieren in der Form

$$\Phi = f(x - ct) + F(x + ct),$$

wo $f$ und $F$ willkürliche Funktionen bedeuten. Die Lösung stellt ebene Wellen dar, die sich mit der Geschwindigkeit $c$ fortpflanzen. Ist $\Phi$ eine Funktion von $t$ und $r$ allein, unter $r$ den von einem festen Punkt aus gezogenen Radiusvektor verstanden, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi);$$

sie läßt sich integrieren in der Form

$$\Phi = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{F(r + ct)}{r}$$

Wiederum stellt die Lösung Wellen dar, die sich mit der Geschwindigkeit $c$ fortpflanzen. Eine Funktion von der Form $r^{-1} f(r - ct)$ stellt Kugelwellen dar, die von einer Quelle im Punkte $r = 0$ auslaufen.

Wir erkennen, daß Dilatationswellen, die nicht mit Drehung verbunden sind, sich mit der Geschwindigkeit $\{(\lambda + 2\mu)/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$ in dem Medium ausbreiten und daß Schiebungswellen, die mit Drehung und nicht mit Dilatation verbunden sind, sich mit der Geschwindigkeit $\{\mu/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$ fortpflanzen. Man bezeichnet diese beiden Wellengattungen

zuweilen als „wirbelfrei“ (engl. „irrotational“) bzw. „dilatationsfrei“ (engl. „equivoluminal“).[1])

Wenn ebene Wellen von beliebigem Typus sich durch das Medium mit einer beliebigen Geschwindigkeit $c$ fortpflanzen, so können wir $u, v, w$ als Funktionen von

$$lx + my + nz + ct$$

ansetzen, wo $l, m, n$ die Richtungskosinus der Normalen der Wellenebene bedeuten. Die Bewegungsgleichungen ergeben dann drei Gleichungen vom Typus

$$\varrho c^2 u'' = (\lambda + \mu)\, l\, (lu'' + mv'' + nw'') + \mu\, (l^2 + m^2 + n^2)\, u'',$$

wo die Akzente Differentiation der Funktionen nach ihrem Argumente bezeichnen. Eliminieren wir $u'', v'', w''$, so erhalten wir eine Gleichung für $c$, nämlich

$$(\lambda + 2\mu - \varrho c^2)\,(\mu - \varrho c^2)^2 = 0; \tag{7}$$

dieselbe zeigt, daß alle ebenen Wellen mit einer der oben ermittelten Geschwindigkeiten sich fortpflanzen.

## § 205. Bewegung einer Unstetigkeitsfläche. Kinematische Bedingungen.

Wird in einem beschränkten Teil eines elastischen Mediums eine beliebige kleine Störung hervorgerufen, so werden nach einiger Zeit die benachbarten Teile in Bewegung gesetzt und in Verzerrungszustand geraten. Der Teil des Mediums, der zu einer späteren Zeit gestört ist, wird mit dem anfänglich gestörten nicht übereinstimmen. Wir können annehmen, daß der gestörte Teil in jedem Augenblick von einer Fläche $S$ begrenzt ist. Wenn das Medium isotrop ist und die sich ausbreitende Störung mit Dilatation und nicht mit Drehung verknüpft ist, so bewegt sich die Oberfläche $S$, wie wir vermuten werden, normal zu sich selbst mit der Geschwindigkeit $\{(\lambda + 2\mu)/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$; ist sie mit Drehung und nicht mit Dilatation verknüpft, so wird die Geschwindigkeit der Oberfläche gleich $\{\mu/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$ sein. Wir nehmen an, daß die Oberfläche normal zu sich selbst mit der Geschwindigkeit $c$ sich bewegt, und suchen die Bedingungen, die auf der sich bewegenden Fläche erfüllt sein müssen.

Auf der einen Seite der Fläche $S$ ist zur Zeit $t$ das Medium gestört, sodaß dort eine Verschiebung $(u, v, w)$ statt hat; auf der anderen

1) Lord Kelvin, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 47 (1899). Das Resultat, daß es in einem isotropen festen Körper zwei Gattungen von Wellen gibt, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, verdankt man Poisson. Daß es sich um wirbelfreie und dilatationslose Wellen handelt, erkannte zuerst Stokes. Siehe Einleitung.

Seite besteht keine Verschiebung. Die Geschwindigkeit $c$ habe die Richtung von der erstgenannten nach der anderen Seite, sodaß die Störung sich nach denjenigen Teilen des Mediums ausbreitet, die vorher ungestört waren. Die Verschiebung $(u, v, w)$ verhält sich beim Durchgang durch $S$ notwendig stetig und verschwindet daher auf der sich bewegenden Fläche. Die Normale zu $S$, in deren Richtung $c$ gemessen ist, werde mit $\nu$ bezeichnet; $s$ bedeute irgend eine in die Tangentialebene fallende Richtung, sodaß $s$ und $\nu$ zu einander senkrecht sind. Da $u$ in jedem Punkte von $S$ verschwindet, so gilt die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, s) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y, s) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(z, s) = 0$$

für alle Richtungen $s$, die der Gleichung genügen

$$\cos(x, s) \cos(x, \nu) + \cos(y, s) \cos(y, \nu) + \cos(z, s) \cos(z, \nu) = 0.$$

Daraus folgt, daß in allen Punkten von $S$

$$\frac{\partial u/\partial x}{\cos(x,\nu)} = \frac{\partial u/\partial y}{\cos(y,\nu)} = \frac{\partial u/\partial z}{\cos(z,\nu)} = \frac{\partial u}{\partial \nu}. \tag{8}$$

Andererseits stellt $u = 0$ eine Gleichung dar, die auf der sich bewegenden Fläche $S$ dauernd erfüllt ist; sie muß bis zur ersten Ordnung in $\delta t$ befriedigt sein, wenn wir für $x, y, z, t$

$$x + c \cos(x,\nu)\,\delta t, \quad y + c \cos(y,\nu)\,\delta t, \quad z + c\cos(z,\nu)\,\delta t, \quad t + \delta t$$

einsetzen. Es folgt hieraus, daß wir in jedem Punkte von $S$ haben müssen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\left\{\cos(x,\nu)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(y,\nu)\frac{\partial u}{\partial y} + \cos(z,\nu)\frac{\partial u}{\partial z}\right\} = 0. \tag{9}$$

Kombinieren wir die Gleichungen (8) und (9), so finden wir, daß folgende Gleichungen in allen Punkten von $S$ befriedigt sein müssen:

$$\frac{\partial u/\partial x}{\cos(x,\nu)} = \frac{\partial u/\partial y}{\cos(y,\nu)} = \frac{\partial u/\partial z}{\cos(z,\nu)} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{10}$$

Ganz entsprechende Gleichungen gelten für $v$ und $w$ an Stelle von $u$. In diesen Gleichungen sind die Differentialquotienten von $u, \ldots$ natürlich auf derjenigen Seite von $S$ aus den Ausdrücken für $u, \ldots$ zu berechnen, auf der zur Zeit $t$ Störung herrscht.

## § 206. Bewegung einer Unstetigkeitsfläche. Dynamische Bedingungen.

Die dynamischen Bedingungen, die auf der Fläche $S$ bestehen, ergeben sich aus der Betrachtung der Impulsänderungen einer dünnen Schicht, die in unmittelbarer Nähe von $S$ aus dem Medium herausgeschnitten wird. Wir grenzen auf $S$ ein kleines Flächenstück $\delta S$ ab und betrachten das prismatische Teilchen des Mediums, das von $S$, von den Normalen zu $S$ am Rande von $\delta S$ und von einer Fläche

begrenzt wird, die im Abstand $c\delta t$ von $S$ parallel zu $S$ gelegen ist. In dem kurzen Zeitabschnitt $\delta t$ geht dies Teilchen aus dem ruhenden, unverzerrten Zustand in einen der Verschiebung $u, v, w$ entsprechenden Zustand der Bewegung und Verzerrung über. Diese Änderung wird hervorgebracht von der Spannung, die über die Oberfläche des Teilchens resultiert, d. h. von der auf $\delta S$ wirkenden Spannung; die Änderung der Bewegungsgröße ist gleich dem Zeitintegral über diese Spannung. Die in Rede stehende Spannung wirkt über die zu $\nu$ normale Fläche auf denjenigen Teil des Mediums, in den $\nu$ hineinragt, sodaß ihre Komponenten pro Flächeneinheit gleich $-X_\nu, -Y_\nu, -Z_\nu$ sind. Die Resultanten erhalten wir, wenn wir diese Größen mit $\delta S$ multiplizieren; die Impulse ergeben sich durch Hinzufügen des Faktors $\delta t$. Die Impulsgleichung lautet daher

$$\varrho\,\delta S\cdot c\,\delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = -(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu)\,\delta S\,\delta t;$$

hieraus erhalten wir die Gleichungen

$$\varrho c\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right) = -(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu). \tag{11}$$

In diesen Gleichungen sind $\partial u/\partial t, \ldots$ und $X_\nu, \ldots$ aus den Werten von $u, \ldots$ auf derjenigen Seite von $S$, auf der die Störung herrscht, zu berechnen. Die Gleichungen gelten für alle Punkte von $S$.

Wenn zu beiden Seiten der Fläche $S$ Bewegung und Verzerrung herrscht, die Verschiebungen jedoch auf der einen und der anderen Seite durch verschiedene Formeln sich ausdrücken, wollen wir dieselben mit $(u_1, v_1, w_1)$ und $(u_2, v_2, w_2)$ bezeichnen. In allen Punkten von $S$ muß die Verschiebung die gleiche sein, sei es, daß sie aus den Ausdrücken für $u_1, \ldots$ oder aus denjenigen für $u_2, \ldots$ berechnet wird. Wir können zeigen, daß die Werte der Differentialquotienten von $u_1, \ldots$ auf $S$ durch Gleichungen von folgendem Typus verknüpft sind:

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}}{\cos(x, \nu)} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}}{\cos(y, \nu)} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}}{\cos(z, \nu)} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)$$

die zwei entsprechenden Gleichungen erhalten wir, wenn wir $u$ durch $v$ oder $w$ ersetzen. Bezeichnen wir die aus $(u_1, v_1, w_1)$ berechneten Spannungen mit $X_x^{(1)}, \ldots$ und die aus $(u_2, v_2, w_2)$ berechneten Spannungen mit $X_x^{(2)}, \ldots$, so läßt sich zeigen, daß die Werte dieser Größen und von $\partial u_1/\partial t, \ldots$ auf $S$ durch folgende Gleichungen miteinander verknüpft sind

$$\varrho c\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial t}, \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)$$
$$= (X_\nu^{(2)} - X_\nu^{(1)},\ Y_\nu^{(2)} - Y_\nu^{(1)},\ Z_\nu^{(2)} - Z_\nu^{(1)}).$$

## § 207. Wellengeschwindigkeit in einem isotropen Medium.

Bezeichnen wir die Richtungskosinus von $\nu$ mit $l, m, n$, so gehen die Gleichungen (11) in drei Gleichungen von folgendem Typus über

$$-\varrho c \frac{\partial u}{\partial t} = \left\{(\lambda + \mu)\, l \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\lambda l \frac{\partial v}{\partial y} + \mu m \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\lambda l \frac{\partial w}{\partial z} + \mu m \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}; \tag{12}$$

die rechte Seite läßt sich auch in der Form schreiben

$$(\lambda + 2\mu)\, l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu \left\{m \frac{\partial u}{\partial y} + m \frac{\partial v}{\partial x} - 2l \frac{\partial v}{\partial y}\right\} + \mu \left\{n \frac{\partial u}{\partial z} + n \frac{\partial w}{\partial x} - 2l \frac{\partial w}{\partial z}\right\}. \tag{13}$$

Diese Gleichungen gelten auf der Fläche $S$, und ebendort haben wir neun Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\, l \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{14}$$

sodaß z. B.

$$l \frac{\partial v}{\partial y} = m \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{lm}{c} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Setzen wir $\partial u/\partial x \ldots$ aus (14) in (12) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\varrho c^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \{(\lambda + \mu)\, l^2 + \mu\} \frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda + \mu) \left(lm \frac{\partial v}{\partial t} + ln \frac{\partial w}{\partial t}\right); \tag{15}$$

eliminieren wir $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial w/\partial t$ aus dieser und den beiden entsprechenden Gleichungen, so erhalten wir Gleichung (7), § 204. Wie aus (13) und den Gleichungen vom Typus (14) hervorgeht, läßt Gleichung (12) sich auch folgendermaßen schreiben:

$$-\varrho c \frac{\partial u}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\, l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \mu m \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu n \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{16}$$

Demnach haben wir, wenn die Drehung verschwindet, drei Gleichungen von folgendem Typus:

$$\varrho c^2 \frac{\partial u}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \left(l^2 \frac{\partial u}{\partial t} + lm \frac{\partial v}{\partial t} + ln \frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

woraus sich $\varrho c^2 = \lambda + 2\mu$ ergeben würde; und wenn die Dilatation verschwindet, haben wir drei Gleichungen vom Typus

$$\varrho c^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left\{(m^2 + n^2) \frac{\partial u}{\partial t} - lm \frac{\partial v}{\partial t} - ln \frac{\partial w}{\partial t}\right\},$$

woraus sich $\varrho c^2 = \mu$ ergeben würde.

Diese Resultate zeigen, daß die Unstetigkeitsfläche mit einer Geschwindigkeit fortschreitet, die entweder $\{(\lambda+2\mu)/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$ oder $(\mu/)\varrho^{\frac{1}{2}}$ beträgt; ferner daß bei verschwindender Drehung die Geschwindigkeit notwendig gleich $\{(\lambda+2\mu)/\varrho\}^{\frac{1}{2}}$, bei verschwindender Dilatation notwendig gleich $(\mu/\varrho)^{\frac{1}{2}}$ ist.

## § 208. Wellengeschwindigkeit in einem äolotropen festen Medium.

Die Gleichungen (10) und (11) gelten, gleichgültig ob es sich um einen isotropen Körper handelt oder nicht. Erstere liefern die sechs Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= -l\frac{\dot u}{c}, & e_{yz} &= -\left(m\frac{\dot w}{c}+n\frac{\dot v}{c}\right),\\ e_{yy} &= -m\frac{\dot v}{c}, & e_{zx} &= -\left(n\frac{\dot u}{c}+l\frac{\dot w}{c}\right),\\ e_{zz} &= -n\frac{\dot w}{c}, & e_{xy} &= -\left(l\frac{\dot v}{c}+m\frac{\dot u}{c}\right), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wo die Punkte Differentiation nach $t$ bezeichnen und $l, m, n$ für $\cos(x, \nu), \ldots$ geschrieben ist. Die Gleichungen (11) lassen sich in folgender Form schreiben:

$$-\varrho c\dot u = l\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + m\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + n\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}, \text{ usw.} \tag{18}$$

wo $W$ die durch die Verzerrungskomponenten ausgedrückte Verzerrungsenergie-Funktion bedeutet.

Wir führen nun für $\dot u/c$, $\dot v/c$, $\dot w/c$ die Bezeichnung $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ein. Die Gleichungen (17) definieren eine lineare Substitution, welche $e_{xx}, \ldots$ durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ausdrückt. Führen wir diese Substitution aus, so geht $W$ in eine homogene quadratische Funktion von $\xi, \eta, \zeta$, über. Diese Funktion bezeichnen wir mit $\Pi$. Wir bemerken, daß $e_{yy}$, $e_{zz}$, $e_{yz}$ von $\xi$ unabhängig sind und daher folgende Gleichung besteht:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -l\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} - m\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} - n\frac{\partial W}{\partial e_{zx}};$$

entsprechende Gleichungen gelten für $\partial\Pi/\partial\eta$ und $\partial\Pi/\partial\zeta$. Die Gleichungen vom Typus (18) lassen sich mithin schreiben

$$\varrho c^2\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \qquad \varrho c^2\eta = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}, \qquad \varrho c^2\zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta}. \tag{19}$$

Wir nehmen nun an, $\Pi$ sei durch die Gleichung gegeben

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\left[\lambda_{11}\xi^2 + \lambda_{22}\eta^2 + \lambda_{33}\zeta^2 + 2\lambda_{23}\eta\zeta + 2\lambda_{31}\zeta\xi + 2\lambda_{12}\xi\eta\right], \tag{20}$$

dann zeigen die Gleichungen (19), daß $c^2$ der Gleichung genügt

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11}-\varrho c^2, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}\\ \lambda_{12}, & \lambda_{22}-\varrho c^2, & \lambda_{23}\\ \lambda_{13}, & \lambda_{23}, & \lambda_{33}-\varrho c^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Da $\xi, \eta, \zeta$ mit $e_{xx}, \ldots$ durch eine reelle lineare Substitution verknüpft sind, so ist die homogene quadratische Funktion $\Pi$ notwendig positiv, und Gleichung (21) liefert daher drei reelle positive Werte für $c^2$. Die Koeffizienten dieser Gleichung hängen von der Richtung $(l, m, n)$ ab. Demgemäß gibt es drei reelle Wellengeschwindigkeiten, die einer Wellenfortpflanzungsrichtung entsprechen.[1]

Die obige Untersuchung rührt her von E. B. Christoffel[2]), der für die Aufstellung der Funktion $\Pi$ folgendes Verfahren angibt: Die sechs Verzerrungskomponenten $e_{xx}, e_{yy}, \ldots, e_{xy}$ mögen mit $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet werden; ferner bedeute $c_x$ die Form

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_6 x_6,$$

wobei unter $c_1, c_2, \ldots$ keine Zahlengrößen zu verstehen sind, vielmehr $c_1^2$ durch $c_{11}$, $c_1 c_2$ durch $c_{12}$ usw. zu ersetzen ist, wenn $c_{11}, c_{12}, \ldots$ die Koeffizienten in der Verzerrungsenergie-Funktion bedeuten. Wir können dann schreiben

$$W = (c_x)^2.$$

Andererseits seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ durch die symbolischen Gleichungen

$$\lambda_1 = c_1 l + c_6 m + c_5 n, \quad \lambda_2 = c_6 l + c_2 m + c_4 n, \quad \lambda_3 = c_5 l + c_4 m + c_3 n$$

definiert; dann haben wir

$$-c_x = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \quad W = (\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta)^2;$$

die Koeffizienten $\lambda_{11}, \ldots$ in der Funktion $\Pi$ können daher durch Quadrieren der Form $\lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta$ erhalten werden, d. h. wir haben

$$\lambda_{11} = c_{11} l^2 + c_{66} m^2 + c_{55} n^2 + 2 c_{56} mn + 2 c_{15} nl + 2 c_{16} lm,$$

$$\lambda_{12} = c_{16} l^2 + c_{26} m^2 + c_{45} n^2 + (c_{46} + c_{25}) mn + (c_{14} + c_{56}) nl + (c_{12} + c_{66}) lm$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## § 209. Wellenflächen.

Die Enveloppe der Ebenen

$$lx + my + nz = c, \tag{22}$$

wo $c$ die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung $(l, m, n)$, ist die zu dem Medium gehörige „Wellenfläche“. Es ist diejenige Fläche, die nach Verlauf der Zeiteinheit den gestörten Teil des Mediums begrenzt, wenn die Störung anfangs auf die unmittelbare Umgebung des Koordinatenanfangspunktes beschränkt ist. Im Falle der Isotropie ist $c$ von $l, m, n$ unabhängig und durch Gleichung (7) gegeben; im Falle der Äolotropie ist $c$ eine Funktion von $l, m, n$ und gegeben durch Gleichung (21). Im allgemeinen Falle setzt sich die Wellenfläche offenbar aus drei Schalen zusammen, die den drei als Wurzeln von (21) sich ergebenden Werten von $c^2$ entsprechen. Im Falle der Isotropie fallen zwei dieser Schalen zusammen, und alle Schalen sind konzentrische Kugeln.

1) Eine allgemeine Diskussion der drei Wellengattungen betreffend verweisen wir auf Lord Kelvin, *Baltimore Lectures*, London 1904.

2) *Ann. di Mat.* (Ser. 2), t. 8 (1877).

Green[1]) bemerkte, daß im allgemeinen Falle der Äolotropie die drei Verschiebungsrichtungen, die den drei möglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ebener Wellen bei gegebener Wellennormale entsprechen, den Hauptachsen eines bestimmten Ellipsoids parallel und daher zueinander senkrecht sind. In unserer Bezeichnungsweise würde das Ellipsoid durch die Gleichung $(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{12})(x, y, z)^2 = \text{const.}$ gegeben sein. Er zeigte, daß, wenn $W$ die Form

$$\tfrac{1}{2} A (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})^2 + \tfrac{1}{2} L (e_{yz}^2 - 4\, e_{yy} e_{zz}) \\ + \tfrac{1}{2} M (e_{zx}^2 - 4\, e_{zz} e_{xx}) + \tfrac{1}{2} N (e_{xy}^2 - 4\, e_{xx} e_{yy}) \quad (23)$$

hat, die Wellenfläche sich zusammensetzt aus einer Kugel, die der Ausbreitung von wirbelfreien Dilatationswellen entspricht, und der Fresnelschen Wellenfläche, d. h. der Enveloppe der der Bedingung

$$\frac{l^2}{c^2 - L/\varrho} + \frac{m^2}{c^2 - M/\varrho} + \frac{n^2}{c^2 - N/\varrho} = 0 \quad (24)$$

unterworfenen Ebenen (22). Die beiden Schalen der letzteren Fläche entsprechen der Ausbreitung dilatationsfreier Schiebungswellen. Die Form (23) stellt, wie Green fand, den allgemeinsten Ausdruck für $W$ dar, der die Ausbreitung von rein transversalen Wellen gestattet, d. h. solcher Wellen, bei denen die Verschiebung zur Wellenfläche parallel ist.

Der Greensche Ausdruck (23) für $W$ ist enthalten in der Formel (15) von § 110, nämlich

$$2\, W = (A, B, C, F, G, H)(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz})^2 + L e_{yz}^2 + M e_{zx}^2 + N e_{xy}^2;$$

dieselbe kennzeichnet elastische feste Medien, die drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen. Um die Greensche Formel zu erhalten, haben wir zu setzen

$$A = B = C, \quad F = A - 2\, L, \quad G = A - 2\, M, \quad H = A - 2\, N.$$

Es ist bemerkenswert, daß diese Beziehungen bei kubischen Kristallen nicht erfüllt sind.

Die Greensche Formel für die Verzerrungsenergie-Funktion enthält nur die Verzerrungskomponenten; die Idee eines Mediums, für welches

$$W = 2\,(L \varpi_x^2 + M \varpi_y^2 + N \varpi_z^2), \quad (25)$$

wurde von Mac Cullagh[2]) eingeführt. Als Wellenfläche ergibt sich die Fresnelsche Wellenfläche.

Lord Rayleigh[3]) hat, einen Vorschlag Rankines aufnehmend, die Ausbreitung von Wellen in einem Medium untersucht, in dem die kinetische Energie die Form hat

1) „On the propagation of light in crystallized media", *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 7 (1839) = *Mathematical Papers*, London 1871, p. 293.

2) „An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction", *Dublin, Trans. R. Irish Acad.*, vol. 21 (1839) = *Collected Works of James Mac Cullagh*, Dublin 1880, p. 145.

3) „On Double Refraction", *Phil. Mag.* (Ser. 4), vol. 41 (1871) = *Scientific Papers*, vol. 1, Cambridge 1899.

$$\iiint \tfrac{1}{2}\left[\varrho_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varrho_2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \varrho_3\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dy\,dz, \tag{26}$$

während die Verzerrungsenergie-Funktion die zu einem isotropen elastischen Körper gehörige Form besitzt. Ein derartiges Medium besitzt, wie man sagt, „Trägheitsäolotropie“. Ist das Medium inkompressibel, so ist die Wellenfläche die Enveloppe der der Bedingung

$$\frac{l^2}{c^2\varrho_1 - \mu} + \frac{m^2}{c^2\varrho_2 - \mu} + \frac{n^2}{c^2\varrho_3 - \mu} = 0 \tag{27}$$

unterworfenen Ebenen (22); sie ist die erste negative Fußpunktfläche der Fresnelschen Wellenfläche bezüglich ihres Mittelpunkts.

Der Fall, daß die Energie-Funktion des Mediums eine Funktion des Drehungskomponenten sowohl wie der Verzerrungskomponenten ist, also durch eine homogene quadratische Funktion der neun Größen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\cdots$ ausgedrückt wird, ist von H. M. Macdonald[1]) untersucht worden. Die allgemeinste Form, die angesetzt werden darf, wenn Transversalwellen unabhängig von Dilatationswellen sich ausbreiten sollen, führt, wie gezeigt wird, für transversale Wellen zur Fresnelschen Wellenfläche.

Der noch allgemeinere Fall, wo sowohl Trägheits- wie elastische Äolotropie besteht, ist von T. J. I'A. Bromwich[2]) untersucht worden. Die Forderung, daß zwei von den Wellen rein transversal sein sollen, führt in diesem Falle, wie sich zeigt, nicht zu demselben Resultat wie die Forderung, daß es sich um reine Drillungswellen handelt, während diese beiden Forderungen zu demselben Resultat führen, wenn nur elastische Äolotropie besteht. Die Wellenfläche für die Drillungswellen läßt sich aus der Fresnelschen Wellenfläche durch eine homogene Verzerrung ableiten.

## § 210. Die durch die charakteristische Gleichung bestimmte Bewegung.

Selbst im Falle eines isotropen Körpers gestaltet sich das Problem der Fortpflanzung von Störungen durch den Körper ziemlich verwickelt infolge des gleichzeitigen Auftretens zweier Wellengattungen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten. Wir werden gut tun, uns zunächst auf die Betrachtung von Wellen eines Typus, also wirbelfreier oder dilatationsfreier Wellen, zu beschränken. Die Bewegung ist dann durch die charakteristische Gleichung (6), § 204, d. h. $\partial^2\Phi/\partial t^2 = c^2\nabla^2\Phi$, bestimmt.

Diese Gleichung wurde von Poisson[3]) in einer Form gelöst, bei der der Wert von $\Phi$ an irgend einer Stelle und zu irgend einer Zeit durch die Anfangswerte von $\Phi$ und $\partial\Phi/\partial t$ ausgedrückt erscheint.

1) *London Math. Soc. Proc.,* vol. 32 (1900), p. 311.

2) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 34 (1902), p. 307.

3) *Paris, Mém. de l'Institut*, t. 3 (1820). Ein einfacher Beweis wurde von Liouville, *J. de Math. (Liouville)*, t. 1 (1856), gegeben. Einen symbolischen Beweis liefert Lord Rayleigh, *Theory of Sound,* Kap. XIV.

Poissons Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen: Mögen $\Phi_0$ und $\dot{\Phi}_0$ die Anfangswerte von $\Phi$ und $\partial\Phi/\partial t$ bezeichnen. Um einen beliebigen Punkt $(x, y, z)$ als Mittelpnnkt werde eine Kugel vom Radius $ct$ beschrieben, und $\overline{\Phi}_0$ und $\overline{\dot{\Phi}}_0$ mögen die Mittelwerte von $\Phi_0$ und $\dot{\Phi}_0$ auf dieser Kugel bezeichnen. Dann drückt sich der Wert von $\Phi$ im Punkte $(x, y, z)$ zur Zeit $t$ durch folgende Gleichung aus:

$$\Phi = \frac{d}{dt}(t\overline{\Phi}_0) + t\overline{\dot{\Phi}}_0. \tag{28}$$

Ist die anfängliche Störung auf den von einer geschlossenen Fläche $\Sigma_0$ begrenzten Bereich beschränkt, so haben $\Phi_0$ und $\dot{\Phi}_0$ in den Punkten innerhalb $\Sigma_0$ von null verschiedene Werte und verschwinden außerhalb $\Sigma_0$. Wählen wir irgend einen Punkt im Innern von $\Sigma_0$ oder auf $\Sigma_0$ als Mittelpunkt, so können wir um ihn eine Kugel vom Radius $ct$ beschreiben; die Störung zur Zeit $t$ ist dann auf das Aggregat der Punkte beschränkt, die auf den Oberflächen aller dieser Kugeln liegen. Dies Aggregat ist im allgemeinen von einer Fläche begrenzt, die in zwei Schalen, eine innere und eine äußere, zerfällt. Wenn die äußere Schale einen Punkt des Mediums erreicht, so werden die in der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes gelegenen Teilchen plötzlich von der kleinen Verzerrung und der Geschwindigkeit erfaßt, die die Werte von $\Phi$ und $\partial\Phi/\partial t$ mit sich bringen; nachher, wenn die innere Schale auf den Punkt trifft, kehren dieselben Teilchen des Mediums wieder zum ruhenden, unverzerrten Zustand zurück.[1])

In allgemeinerer Weise wurde die charakteristische Gleichung von Kirchhoff[2]) gelöst. An Stelle der Kugel nahm er eine beliebige Oberfläche $S$ und an Stelle der Anfangswerte von $\Phi$ und $\partial\Phi/\partial t$ auf $S$ nahm er die Werte von $\Phi$ und der ersten Ableitungen in den Punkten von $S$ zu gewissen, dem Augenblick $t$ vorangehenden Zeitpunkten. Bedeutet $Q$ einen Punkt auf $S$ und $r$ den Abstand desselben vom Punkte $(x, y, z)$, so handelt es sich um die Werte von $\Phi$ und der ersten Ableitungen von $\Phi$ im Punkte $Q$ zur Zeit $t - r/c$. Die so definierten Werte von $\Phi, \ldots$ seien mit $[\Phi], \ldots$ bezeichnet. Dann drückt sich der Wert von $\Phi$ im Punkte $(x, y, z)$ zur Zeit $t$ durch folgende Gleichung aus:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\iint\left\{[\Phi]\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu} - r^{-1}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right] - \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\} dS, \tag{29}$$

wo $\nu$ die Richtung der Normalen von $S$ bedeutet, die nach der Seite, wo $(x, y, z)$ liegt, zeigt.

---

1) Vgl. Stokes, „Dynamical theory of diffraction", *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 9 (1849) = *Math. and Phys. Papers*, vol. 2, p. 243.

2) *Ann. Phys. Chem. (Wiedemann)*, Bd. 18 (1883). Siehe auch Kirchhoff, *Vorlesungen über math. Physik, Optik*, Leipzig 1891.

Die Kirchhoffsche Formel (29) ergibt sich sehr einfach[1]), wenn man $t - r/c$ für $t$ in $\Phi(x, y, z, t)$ substituiert, wo $r$ jetzt den Abstand des Punktes $(x, y, z)$ vom Ursprung bedeutet. Bezeichnen wir die Funktion $\Phi(x, y, z, t - r/c)$ mit $\psi(x, y, z, t)$, so können wir zeigen, daß wenn $\Phi(x, y, z, t)$ der charakteristischen Gleichung (6) genügt, $\psi$ folgende Gleichung befriedigt:

$$\frac{1}{r}\nabla^2\psi + \frac{2}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] = 0. \qquad (30)$$

Wenn diese Gleichung überall in dem von einer geschlossenen Fläche $S$ begrenzten Bereich, der den Ursprung nicht enthält, besteht, so integrieren wir die linke Seite dieser Gleichung über den betreffenden Bereich und transformieren das Raumintegral in ein Oberflächenintegral; so erhalten wir die Gleichung

$$\iint\left(\psi\frac{\partial r^{-1}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{2}{cr}\frac{\partial r}{\partial\nu}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dS = 0.$$

Bezeichnen nun $[\Phi], \ldots,$ die Werte von $\Phi, \ldots$ zur Zeit $t - r/c$, so lautet diese Gleichung

$$\iint\left\{[\Phi]\frac{\partial r^{-1}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right] - \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\right\}dS = 0,$$

da, wie leicht zu beweisen,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right] - \frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial\nu}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right].$$

Befindet sich der Ursprung innerhalb der Fläche $S$, so integrieren wir die linke Seite von (30) über den Raum zwischen $S$ und einer kleinen, um den Ursprung als Mittelpunkt beschriebenen Kugel $\Sigma$ und gehen zur Grenze über, indem wir den Radius von $\Sigma$ unbegrenzt abnehmen lassen. Wir finden so für den Wert von $\Phi$ im Ursprung die Formel (29), und dieselbe Formel liefert den Wert von $\Phi$ in einem beliebigen Punkt und in einem beliebigen Augenblick. Die Formel gilt für einen räumlichen Bereich, der nach innen oder außen von einer geschlossenen Fläche $S$ begrenzt wird, vorausgesetzt daß in jedem in Betracht kommenden Augenblick $\Phi$ und die ersten Ableitungen von $\Phi$ in allen Punkten des Bereichs stetig und die zweiten Ableitungen endlich und durch Gleichung (6) verknüpft sind.[2]) Handelt es sich um einen Bereich außerhalb $S$, so muß $\Phi$ in unendlicher Entfernung mindestens von der Ordnung $r^{-1}$ unendlich klein werden. Diese Bedingungen können wir so ausdrücken, daß wir sagen: alle Störungsquellen liegen auf der von $(x, y, z)$ abgewandten Seite der Fläche $S$.

Die Kirchhoffsche Formel schließt, wie sich zeigen läßt, die Poissonsche in sich.[3]) Sie läßt sich auch in der Form schreiben

---

1) Vgl. Beltrami, *Rom, Acc. Lincei Rend.* (Ser. 5), t. 4 (1895).

2) Bezüglich des Falles, wo man außerhalb $S$ eine sich bewegende Unstetigkeitsfläche hat, siehe eine Abhandlung des Verfassers, *London Math. Soc. Proc.* (Ser. 2), vol. 1 (1904), p. 37.

3) Siehe die eben angezogene Abhandlung.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{[\Phi]}{r}\right) - r^{-1}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right] \right\} dS, \tag{31}$$

wo $\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{[\Phi]}{r}\right)$ so zu bilden ist, daß erst $t - r/c$ für $t$ in $\Phi$ eingesetzt und dann differentiiert wird, wie wenn $r$ die einzige veränderliche Größe in $[\Phi]/r$ wäre. Die Formel (31) stellt ein Analogon zur Greenschen Formel (7), § 158, dar. Sie läßt sich auch dahin aussprechen, daß der Wert von $\Phi$ in irgend einem Punkte außerhalb einer geschlossenen Fläche (die alle Störungsquellen in sich birgt) derselbe ist wie derjenige, der von einer bestimmten Verteilung von Quellen und Doppelquellen auf der Fläche herrühren würde. Es läßt sich, ähnlich wie in § 124, leicht zeigen, daß die Bewegung innerhalb oder außerhalb $S$, wie sie von gegebenen Anfangsbedingungen herrührt, durch die Werte von $\Phi$ oder von $\partial\Phi/\partial\nu$ auf $S$ eindeutig bestimmt ist. Der Satz, der durch Gleichung (31) ausgedrückt ist, läßt sich aus den Eigenschaften von Oberflächenverteilungen von Quellen und Doppelquellen und dem Eindeutigkeitstheorem ableiten.[1])

## § 211. Willkürliche Anfangsbedingungen.

Wenn die Anfangsbedingungen nicht so beschaffen sind, daß die Störung ganz wirbelfrei oder dilatationsfrei ist, so sind die Resultate viel verwickelter. Für die Komponenten der Verschiebung, die an irgend einer Stelle und zu irgend einer Zeit aus einer gegebenen Anfangsverteilung der Verschiebung und der Geschwindigkeit entspringt, sind Formeln abgeleitet worden[2]), und das Ergebnis läßt sich in folgender Form aussprechen:

Es sei $(u_0, v_0, w_0)$ die Anfangsverschiebung, die, wie wir annehmen, überall in dem räumlichen Bereich $T$ gegeben ist und auf der Oberfläche von $T$, sowie außerhalb $T$ verschwindet, und sei $(\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w})$ die Anfangsgeschwindigkeit, von der wir ebenfalls annehmen, daß sie überall in $T$ gegeben ist und außerhalb $T$ verschwindet. $a$ und $b$ mögen die Geschwindigkeiten der wirbelfreien und der dilatationsfreien Wellen bezeichnen. $S_1$ sei eine Kugel vom Radius $at$ um den Punkt $(x, y, z)$ als Mittelpunkt und $S_2$ eine Kugel vom Radius $bt$ um denselben Punkt als Mittelpunkt. $V$ bezeichne denjenigen Teil des von diesen beiden Kugeln begrenzten Raumes, der innerhalb $T$ liegt. $r$ bedeute den Abstand des Punktes $(x, y, z)$ von einem Punkte $(x', y', z')$, der innerhalb $V$ oder auf den innerhalb $T$ liegenden Teilen von $S_1$ und $S_2$ sich befindet; $q_0$ bezeichne die Anfangsverschiebung im Punkte $(x', y', z')$ und $\dot{q}_0$ die Anfangsgeschwindigkeit an derselben Stelle, beide auf den von $(x, y, z)$ aus

1) Vgl. J. Larmor, *London Math. Soc. Proc.* (Ser. 2), vol. 1 (1904).

2) Betr. Literaturnachweise siehe Einleitung, p. 22. Auch eine Abhandlung des Verfassers in den *London Math. Soc. Proc.* (Ser. 2), vol. 1 (1904), p. 291, wäre einzusehen.

gezogenen Radiusvektor $r$ projiziert. Dann läßt sich die Verschiebung $u$ in $(x, y, z)$ zur Zeit $t$ folgendermaßen schreiben:

$$u = \frac{1}{4\pi}\iiint\left\{(t\dot{u}_0 + u_0)\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + (t\dot{v}_0 + v_0)\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} + (t\dot{w}_0 + w_0)\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z}\right\} dV$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint\left\{r\left(u_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + v_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} + w_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z}\right) + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\left(t\dot{q}_0 + q_0 + r\frac{\partial q_0}{\partial r}\right)\right\} dS_1$$
$$- \frac{1}{4\pi}\iint\left\{r\left(u_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + v_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} + w_0\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z}\right) + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\left(t\dot{q}_0 + q_0 + r\frac{\partial q_0}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{r^2}\left(t\dot{u}_0 + u_0 + r\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\right\} dS_2; \tag{32}$$

entsprechende Ausdrücke lassen sich für $v$ und $w$ hinschreiben. Die Oberflächenintegrationen sind über diejenigen Teile von $S_1$ und $S_2$ auszudehnen, die innerhalb $T$ liegen.

Die Dilatation und die Drehung lassen sich aus diesen Formeln berechnen, und es läßt sich zeigen, daß Dilatation nur in Form einer Dilatationswelle, die sich mit der Geschwindigkeit $a$ ausbreitet, und Drehung nur in Form einer Rotationswelle, die sich mit der Geschwindigkeit $b$ ausbreitet, auftritt. Bedeuten $r_1$ und $r_2$ den größten und den kleinsten Abstand eines Punktes $O$ des Mediums von der Oberfläche $T$, so beginnt die Bewegung in $O$ in dem Augenblicke $t = r_2/a$, und die Dilatationswelle endigt im Augenblick $t = r_1/a$; die Rotationswelle beginnt in dem Augenblick $t = r_2/b$, und die Bewegung hört auf in dem Augenblick $t = r_1/b$. Wenn die Dilatationswelle endigt, bevor die Rotationswelle beginnt, so hat die Bewegung in der Zwischenzeit den Charakter der wirbelfreien Bewegung in einer inkompressiblen Flüssigkeit[1]); in einer gewissen Entfernung von $T$, die groß ist gegenüber den linearen Abmessungen von $T$, ist diese Bewegung verhältnismäßig schwach.

Das Problem der Integration der Gleichungen der kleinen Bewegung eines isotropen elastischen Körpers ist Gegenstand äußerst zahlreicher Untersuchungen gewesen. Außer den bereits angezogenen seien folgende angeführt: V. Cerruti, „Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi", *Rom, Acc. Lincei, Mem. fis. mat.*, 1880; V. Volterra, „Sur les vibrations des corps élastiques isotropes", *Acta math.*, t. 18 (1894); G. Lauricella, „Sulle equazioni del moto dei corpi elastici", *Torino Mem.* (Ser. 2), t. 45 (1895); O. Tedone, „Sulle vibrazioni dei corpi solidi omogenei ed isotropi", *Torino Mem.* (Ser. 2), t. 47 (1897); J. Coulon, „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques", Paris (*Thèse*) 1902. Auch Hadamards Lehrbuch, *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris 1903, mag zu Rate gezogen werden.

## § 212. Von Massenkräften herrührende Bewegung.

Genau wie in § 130 stellen wir die Massenkräfte in der Form

$$(X, Y, Z) = \text{Gradient von } \Phi + \text{curl}\,(L, M, N)$$

1) Vgl. Stokes, *loc. cit.*

und die Verschiebung in der Form

$$(u, v, w) = \text{Gradient von } \Phi + \text{curl}\,(F, G, H)$$

dar. Die Bewegungsgleichungen

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \varrho X = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ usw.}$$

werden dann befriedigt, wenn $\Phi, F, G, H$ den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \Phi = \varPhi, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - b^2 \nabla^2 F = L, \quad \dots$$

genügen; partikuläre Lösungen lassen sich in der Form ausdrücken[1])

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint \frac{1}{r}\,\varPhi'\left(t - \frac{r}{a}\right) dx'\,dy'\,dz', \\ F &= \frac{1}{4\pi b^2}\iiint \frac{1}{r}\,L'\left(t - \frac{r}{b}\right) dx'\,dy'\,dz', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Werte von $\varPhi, L, \dots$, ausgedrückt durch $X, Y, Z$, sind durch die Gleichungen (7) von § 130 gegeben, und die in (33) vorkommenden Integrationen lassen sich ausführen.

Nehmen wir den Fall der Einzelkraft von der Größe $\chi(t)$, die im Ursprung in der Richtung der $x$-Achse angreift, so haben wir, wie in § 130,

$$\varPhi'\left(t - \frac{r}{a}\right) = -\frac{1}{4\pi\varrho}\,\chi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{\partial R^{-1}}{\partial x'},$$

$$L' = 0, \quad M'\left(t - \frac{r}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\varrho}\,\chi\left(t - \frac{r}{b}\right)\frac{\partial R^{-1}}{\partial z'},$$

$$N'\left(t - \frac{r}{b}\right) = -\frac{1}{4\pi\varrho}\,\chi\left(t - \frac{r}{b}\right)\frac{\partial R^{-1}}{dy'},$$

wo $R$ den Abstand des Punktes $(x', y', z')$ vom Ursprung bedeutet. Wir wollen die Umgebung des Punktes $(x, y, z)$ durch Kugeln um diesen Punkt als Mittelpunkt in dünne Schichten zerlegen und können dann die Integrationen in (33) folgendermaßen ansetzen:

$$\iiint \frac{1}{r}\,\varPhi'\left(t - \frac{r}{a}\right) dx'\,dy'\,dz' = \int_0^\infty -\frac{1}{4\pi\varrho}\,\chi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dr}{r}\iint \frac{\partial R^{-1}}{\partial x'}\,dS,$$

wo $dS$ ein Oberflächenelement der Kugel vom Radius $r$ um $(x, y, z)$

1) Vgl. L. Lorenz, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 58 (1861) = *Oeuvres Scientifiques*, t. 2 (Kopenhagen 1899) p. 1. Siehe auch Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 2, § 276.

bedeutet. Nun ist $\iint (\partial R^{-1}/\partial x')\, dS$ gleich null, wenn der Ursprung innerhalb $S$ liegt, und gleich $4\pi r^2 (\partial r_0^{-1}/\partial x)$, wenn der Ursprung außerhalb $S$ liegt; $r_0$ bezeichnet dabei den Abstand des Punktes $(x, y, z)$ vom Ursprung. Im ersteren Fall ist $r_0 < r$, im letzteren $r_0 > r$. Wir können daher die obere Grenze der Integration nach $r$ durch $r_0$ ersetzen und finden

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi a^2 \varrho} \frac{\partial r_0^{-1}}{\partial x} \int_0^{r_0} r \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr.$$

Haben wir $\Phi$ gefunden, so spielt das in der Rechnung auftretende $r$ weiterhin keine Rolle mehr, wir können also $r$ statt $r_0$ schreiben, sodaß $r$ jetzt den Abstand des Punktes $(x, y, z)$ vom Ursprung bedeutet. Wir haben dann

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \int_0^{r/a} t' \chi(t - t')\, dt'. \tag{34}$$

Ebenso würden wir finden

$$\left.\begin{aligned} F = 0, \qquad G &= \frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \int_0^{r/b} t' \chi(t - t')\, dt', \\ H &= -\frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial r^{-1}}{\partial y} \int_0^{r/b} t' \chi(t - t')\, dt'. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Die von der Kraft $\chi(t)$ herrührende Verschiebung ist durch die Gleichungen gegeben[1]):

$$\left.\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t - t')\, dt' + \frac{1}{4\pi\varrho r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left\{ \frac{1}{a^2} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{b^2} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\} + \frac{1}{4\pi\varrho b^2 r} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right), \\ v = {} & \frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial y} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t - t')\, dt' \\ & + \frac{1}{4\pi\varrho r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \left\{ \frac{1}{a^2} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\} \\ w = {} & \frac{1}{4\pi\varrho} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x \partial z} \int_{r/a}^{r/b} t' \chi(t - t')\, dt' \\ & + \frac{1}{4\pi\varrho r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \left\{ \frac{1}{a^2} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

1) Formeln, die mit (36) gleichwertig sind, wurden erhalten von Stokes, *loc. cit.*

## § 213. Weitere Resultate, betreffend die von Massenkräften herrührende Bewegung.

1) Die Dilatation und die Drehung berechnen sich aus (36) zu

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{4\pi a^2 \varrho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\} \\
\varpi_x &= 0, \quad 2\varpi_y = \frac{1}{4\pi b^2 \varrho} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}, \\
2\varpi_z &= -\frac{1}{4\pi b^2 \varrho} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

2) Die Ausdrücke (36) reduzieren sich auf (11), § 130, wenn $\chi(t)$ durch eine Konstante ersetzt wird.

3) Die Spannungen, die auf die Oberfläche einer kugelförmigen Höhlung wirken müssen, um die durch (36) ausgedrückte Verschiebung aufrecht zu erhalten, sind statisch gleichwertig mit einer zur $x$-Achse parallelen Einzelkraft. Nimmt der Radius der Höhlung unbegrenzt ab, so hat die Kraft die Größe $\chi(t)$.

4) Wie in § 132 können wir die Wirkungen verschiedenartiger Verzerrungskerne untersuchen.[1] Im Falle eines „Kompressionszentrums" haben wir, unter Weglassung eines Faktors, die Gleichung

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\}, \tag{38}$$

welche wirbelfreie Wellen eines wohlbekannten Typus darstellen. Im Falle eines „Zentrums einer Rotation um die $z$-Achse" haben wir, unter Weglassung eines Faktors, die Gleichungen

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}, 0\right) \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}, \tag{39}$$

welche dilatationsfreie Wellen eines wohlbekannten Typus darstellen.

5) Kombinieren wir zwei Kompressionszentren entgegengesetzten Zeichens in derselben Weise, wie wir früher zwei Kräfte miteinander zu einer „Doppelkraft ohne Moment" kombinierten, so erhalten wir wirbelfreie Wellen von dem durch folgende Gleichung ausgedrückten Typus:

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) \right\}. \tag{40}$$

Kombinieren wir zwei Paare von Rotationszentren, die auf die $x$- und die $y$-Achse und zwei parallele Achsen bezogen sind, in derselben Weise, wie wir früher zwei Kräftepaare miteinander zu einem Rotationszentrum kombinierten, so erhalten wir dilatationsfreie Wellen von folgendem Typus

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left\{ \frac{1}{r} \chi\left(t - \frac{r}{b}\right) \right\}; \tag{41}$$

die Verschiebung drückt sich also durch dieselben Formeln aus wie die

---

1) Eine mehr ins einzelne gehende Untersuchung findet sich in meiner Abhandlung, die auf p. 351 angezogen wurde.

elektrische Kraft in dem einen Hertzschen Oszillator umgebenden Felde.[1]) Lord Kelvin[2]) hat gezeigt, daß wir durch Überlagerung von Lösungen vom Typus (40) und (41) die Wirkung einer schwingenden starren Kugel in der Umgebung des Ursprungs ableiten können.

6) Ist $\chi(t)$ eine einfache harmonische Funktion der Zeit, etwa $\chi(t) = A \cos pt$, so finden wir:

$$\int_{r/a}^{r/b} t'\chi(t-t')\,dt' = \frac{A}{p^2}\left\{\cos p\left(t-\frac{r}{b}\right) - \cos p\left(t-\frac{r}{a}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{pr}{b}\sin p\left(t-\frac{r}{b}\right) + \frac{pr}{a}\sin p\left(t-\frac{r}{a}\right)\right\},$$

und die vollständigen Ausdrücke für die Wirkungen der Kräfte lassen sich mittels (36) hinschreiben.[3]) In diesem Falle stellt sich das ganze Phänomen als Ausbreitung zweier Züge einfacher harmonischer Wellen dar, und zwar sind die Geschwindigkeiten bezüglich gleich $a$ und gleich $b$; in allgemeineren Fällen jedoch ist, wie die Formeln (36) zeigen, die Wirkung, die zur Zeit $t$ in einem vom Angriffspunkt der Kraft um $r$ entfernten Punkt hervorgerufen wird, nicht nur von der Größe der Kraft in den Zeitpunkten $t - r/a$ und $t - r/b$ abhängig, sondern auch von der Größe der Kraft in den dazwischen liegenden Zeitpunkten. Die Sache verhält sich so, wie wenn außer den beiden genau bestimmten Wirkungen (Dilatation und Drehung), die sich mit den Geschwindigkeiten $a$ und $b$ fortpflanzen, noch andere Wirkungen mit dazwischen liegenden Geschwindigkeiten sich ausbreiteten.[4])

7) Partikuläre Integrale der Bewegungsgleichungen für Massenkräfte, die einer einfachen harmonischen Funktion der Zeit, $e^{ipt}$, proportional sind, lassen sich in folgender Form ausdrücken:

$$\Phi = \frac{e^{ipt}}{4\pi a^2}\iiint \Phi' \frac{e^{-ipr/a}}{r}\,dx'\,dy'\,dz',$$
$$F = \frac{e^{ipt}}{4\pi b^2}\iiint L' \frac{e^{-ipr/b}}{r}\,dx'\,dy'\,dz',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

wo

$$\Phi' = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} + Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'\,dy'\,dz',$$
$$L' = \frac{1}{4\pi}\iiint\left(Z'\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - Y'\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right)dx'\,dy'\,dz'.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

1) Hertz, *Ausbreitung der elektrischen Kraft*, p. 147. Mit der angegebenen Beziehung beschäftigt sich W. König, *Ann. Phys. Chem.* (*Wiedemann*), Bd. 37 (1889) und Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 6 (1903), p. 385.

2) *Phil. Mag.* (Ser. 5), vols. 47 und 48 (1899).

3) Bezüglich der Wirkungen von Kräften, die einfache harmonische Funktionen der Zeit sind, siehe Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 2, p. 418 ff.

4) Vgl. meine auf p. 351 angezogene Abhandlung und das auf p. 352 verzeichnete Stokessche Resultat.

## § 214. Oberflächenwellen auf einem isotropen elastischen festen Körper.[1])

Von den periodischen Bewegungen sind diejenigen ebenen Wellen von einfachem harmonischen Typus von besonderer Bedeutung, die sich über die Oberfläche eines festen Körpers ausbreiten und eine Störung mit sich bringen, die nur ein kleines Stück ins Innere des Körpers eindringt. Der Körper sei begrenzt von der Ebene $z = 0$, die positive Richtung der $z$-Achse zeige ins Innere des Körpers. Wir wollen annehmen, daß die Verschiebungskomponenten mit $e^{ipt}$ und außerdem mit $e^{i(fx+gy)}$ proportional sind, sodaß $2\pi/\sqrt{f^2+g^2}$ die Wellenlänge. Wie in § 190 bezeichnen wir $p^2\varrho/(\lambda+2\mu)$ mit $h^2$ und $p^2\varrho/\mu$ mit $\varkappa^2$. Die Dilatation $\Delta$ genügt der Gleichung $(\nabla^2 + h^2)\,\Delta = 0$, und da sie mit $e^{i(fx+gy)}$ proportional ist, müssen wir haben

$$\Delta = Pe^{-rz+i(fx+gy+pt)}, \tag{42}$$

wo $P$ eine Konstante und

$$r^2 = f^2 + g^2 - h^2. \tag{43}$$

Ein partikuläres Integral der Bewegungsgleichungen drückt sich dann aus durch die Gleichungen

$$(u_1, v_1, w_1) = (-if, -ig, r)\, h^{-2} Pe^{-rz+i(fx+gy+pt)}, \tag{44}$$

und ein allgemeineres Integral finden wir, wenn wir $(u, v, w)$ gleich $(u_1+u_2,\ v_1+v_2,\ w_1+w_2)$ setzen, wo $u_2, v_2, w_2$ durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$(u_2, v_2, w_2) = (A, B, C)\, e^{-sz+i(fx+gy+pt)}; \tag{45}$$

hierin sind $A$, $B$, $C$ Konstanten, die durch die Gleichung

$$ifA + igB - sC = 0 \tag{46}$$

verknüpft sind, und

$$s^2 = f^2 + g^2 - \varkappa^2. \tag{47}$$

Da die Oberfläche $z = 0$ spannungsfrei ist, so haben wir die Gleichungen

$$sA = ifC + \frac{2ifr}{h^2}P, \qquad sB = igC + \frac{2igr}{h^2}P,$$

$$\left(\frac{\varkappa^2}{h^2} - 2\right)P - 2\frac{r^2}{h^2}P - 2sC = 0,$$

von denen die dritte folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$[\varkappa^2 - 2(f^2+g^2)]\,P - 2h^2 sC = 0.$$

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 17 (1887) = *Scientific Papers*, vol. 2, p. 441.

Wir können diese Gleichungen so auflösen, daß $A$, $B$, $C$ durch $P$ ausgedrückt erscheint. Schreiben wir

$$\varkappa'^2 = \varkappa^2/(f^2 + g^2), \qquad h'^2 = h^2/(f^2 + g^2), \tag{48}$$

so finden wir

$$C = \frac{\varkappa'^2 - 2}{2h'^2 s} P, \qquad \frac{A}{f} = \frac{B}{g} = i \frac{\varkappa'^2 - 2 + 4rs/(f^2 + g^2)}{2h'^2 (1 - \varkappa'^2)(f^2 + g^2)};$$

setzen wir dies in (46) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$(\varkappa'^2 - 2)^2 = 4rs/(f^2 + g^2). \tag{49}$$

Eliminieren wir aus ihr $r$ und $s$ mittels (43) und (47), so geht dieselbe über in

$$\varkappa'^8 - 8\varkappa'^6 + 24\varkappa'^4 - 16(1 + h'^2)\varkappa'^2 + 16h'^2 = 0. \tag{50}$$

Ist das Material inkompressibel, d. h. $h'^2/\varkappa'^2 = 0$, so wird die Gleichung für $\varkappa'^2$ eine kubische Gleichung $\varkappa'^6 - 8\varkappa'^4 + 24\varkappa'^2 - 16 = 0$, die eine reelle positive Wurzel 0,91275 ... und zwei komplexe Wurzeln $(3{,}5436\ldots) \pm i\,(2{,}2301\ldots)$ besitzt. Da $\varkappa^2/(f^2 + g^2)$ endlich und $h^2/\varkappa^2 = 0$, so ist $r$ reell, wie Gleichung (43) zeigt. Gleichung (49) zeigt, daß für die komplexen Werte von $\varkappa'$

$$4rs/(f^2 + g^2) = -(2{,}7431\ldots) \pm i\,(6{,}8846\ldots). \tag{51}$$

Da der reelle Teil von $s$, wie aus dieser Gleichung zu entnehmen, das entgegengesetzte Zeichen hat wie $r$, so gibt es keine Wellen der in Rede stehenden Art, welche komplexen Werten von $\varkappa'$ entsprechen. Nehmen wir jedoch die reelle Wurzel, d. h. $\varkappa'^2 = 0{,}91275\ldots$, so finden wir

$$r^2 = f^2 + g^2, \qquad s^2 = (0{,}08724\ldots)(f^2 + g^2), \tag{52}$$

und wir erhalten eine Wellenbewegung der verlangten Art. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist

$$p/\sqrt{f^2 + g^2} = (0{,}9554\ldots)\sqrt{\mu/\varrho}, \tag{53}$$

also wenig kleiner als die Geschwindigkeit, mit der sich dilatationsfreie Wellen durch den Körper ausbreiten.

Wenn das Material der Poissonschen Bedingung ($\lambda = \mu$) genügt, haben wir $\varkappa'^2/h'^2 = 3$, und wir haben dann eine Wellenbewegung der verlangten Art, bei der

$$\varkappa'^2 = 0{,}8453\ldots, \qquad r^2 = (0{,}7182\ldots)(f^2 + g^2),$$
$$s^2 = (0{,}1546\ldots)(f^2 + g^2); \tag{54}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist jetzt

$$(0{,}9194\ldots)\sqrt{\mu/\varrho}. \tag{55}$$

Bezüglich obiger Wellengattung bemerkt Lord Rayleigh (*loc. cit.*): „Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die hier untersuchten Oberflächenwellen bei Erdbeben und beim Zusammenstoß elastischer fester

Körper eine wichtige Rolle spielen. Da sie nur nach zwei Dimensionen sich ausbreiten, so muß ihnen in großer Entfernung vom Erregungspunkt eine ständig wachsende überwiegende Bedeutung zukommen.“ Der Gegenstand ist weiterhin von T. J. I'A. Bromwich[1]) und von H. Lamb[2]) untersucht worden. Ersterer zeigte, daß bei Berücksichtigung der Schwere die von Lord Rayleigh erhaltenen Resultate keine wesentliche Änderung erfahren. Letzterer hat die Wirkung einer begrenzten Anfangsstörung an der Oberfläche eines festen Körpers bzw. in der Nähe desselben untersucht. Er zeigte, daß in einiger Entfernung vom Erregungspunkt die Störung nach einem Zeitraum einsetzt, der der Ausbreitung einer wirbelfreien Dilatationswelle entspricht; ein zweites Stadium der Bewegung beginnt nach einem Zeitraum, der der Fortpflanzung einer dilatationsfreien Schiebungswelle entspricht, und eine Störung von viel größerer Amplitude beginnt sich nach einem Zeitraum geltend zu machen, der der Ausbreitung von Wellen des von Lord Rayleigh untersuchten Typus entspricht. Die Bedeutung dieser Wellen für die Theorie der Erdbeben ist vielleicht bisher nicht vollauf gewürdigt worden.

---

1) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 30 (1899).
2) *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 203 (1904).

# Kapitel XIV.

## Torsion.

### § 215. Spannung und Verzerrung in einem gedrillten Prisma.

In § 86, d) fanden wir ein Spannungssystem, das in einem Zylinder von kreisförmigem Querschnitt durch Kräftepaare um die Achse, die an den Enden angreifen, aufrecht erhalten werden kann. Der Zylinder wird durch die Kräftepaare gedrillt (engl. „twisted"), sodaß jeder Querschnitt gegen einen anderen um einen Winkel gedreht ist, der dem Abstand zwischen den beiden Querschnittebenen parallel ist. Auf jeden Querschnitt wirkt in jedem Punkte eine tangentiale Spannung, die senkrecht ist zu der durch die Zylinderachse und den betreffenden Punkt gehenden Ebene; die Größe dieser Spannung ist in jedem Punkte dem Abstand von der Achse proportional.

Wenn der Querschnitt des Zylinders oder Prismas nicht kreisförmig ist, so genügt das oben beschriebene Spannungssystem nicht der Bedingung, daß der Mantel spannungsfrei ist. Wir wollen es so abzuändern suchen, daß alle Bedingungen befriedigt werden. Da die an den Enden des Prismas angebrachten Spannungen statisch mit Kräftepaaren in den Ebenen der Endflächen gleichwertig sind, da ferner der von irgend einem Querschnitt und einer Endfläche begrenzte Teil des Prismas durch die Spannungen auf diesen Querschnitt und das an der Endfläche wirkende Kräftepaar im Gleichgewicht gehalten wird, so müssen die fraglichen Spannungen mit einem Kräftepaar in der Ebene des Querschnitts gleichwertig sein, und das Moment dieses Kräftepaares muß für alle Querschnitte den gleichen Betrag haben. Bei dem Spannungssystem, das wir suchen, wird es sich also im wesentlichen um eine geeignete Verteilung von Tangentialspannungen über die Querschnitte handeln. Demgemäß suchen wir allen Bedingungen mittels einer *Schubspannungsverteilung* zu genügen, die sich aus passend gerichteten Tangentialspannungen auf die Elemente der Querschnitte und den zugehörigen gleichen Tangentialspannungen auf die Elemente geeignet gewählter Längsschnitte zusammensetzt.

Wir werden finden, daß wir mit einem derartigen Ansatz zum Ziele kommen; und in gewissem Umfange können wir den Charakter der Verzerrung und Verschiebung im Prisma voraussehen. Denn die Verzerrung, die der eben beschriebenen Schubspannung entspricht, besteht in Schubverzerrung, die sich im allgemeinen in jedem Punkte aus zwei einfachen Schiebungen zusammensetzt. Die eine dieser einfachen Schiebungen bedingt ein relatives Gleiten von Elementen verschiedener Querschnitte in seitlicher Richtung; es ist dies die Verzerrungsart, die im Kreiszylinder auftrat. Der andere einfache Schub besteht darin, daß verschiedene longitudinale Linienelemente in der Längsrichtung des Prismas gegen einander gleiten. Durch diesen Schub werden die Querschnitte zu krummen Flächen verzerrt. Die Gestalt, zu der ein beliebiger Querschnitt verzerrt wird, bestimmt sich durch die Verschiebung in der Längsrichtung des Prismas.

## § 216. Das Torsionsproblem.[1])

Wir wählen die Erzeugenden der Oberfläche des Prismas parallel zur $z$-Achse und setzen voraus, daß das Material isotrop ist. Die in dem letzten Paragraphen angestellte Überlegung führt uns zu der Annahme, daß die Verschiebung durch folgende Formeln gegeben ist:

$$u = -\tau y z, \qquad v = \tau z x, \qquad w = \tau \Phi, \tag{1}$$

wo $\Phi$ eine Funktion von $x$ und $y$ und $\tau$ der Drall (engl. „twist"). Wir sehen zu, welche Folgerungen sich aus dieser Annahme ergeben.

Die einzigen Verzerrungskomponenten, die nicht verschwinden, sind $e_{zx}$ und $e_{yz}$; sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$e_{zx} = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \qquad e_{yz} = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right). \tag{2}$$

Die einzigen Spannungskomponenten, die nicht verschwinden, sind $X_z$ und $Y_z$; sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$X_z = \mu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \qquad Y_z = \mu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right). \tag{3}$$

Die Gleichungen des Gleichgewichts bei verschwindender Massenkraft sind befriedigt, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

in allen Punkten eines Querschnittes gilt. Die Bedingung, daß der Mantel des Prismas spannungsfrei ist, ist erfüllt, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu) \tag{5}$$

---

1) Die Theorie stammt von Saint-Venant. Siehe *Einleitung*, Fußnote 50 und p. 24.

in allen Punkten der Randkurve eines Querschnitts besteht. Daß die Randbedingung (5) mit der Differentialgleichung (4) verträglich ist, erkennen wir, wenn wir die linke und die rechte Seite von (5) längs des ganzen Randes integrieren und die Kurvenintegrale in Flächenintegrale, die über den Querschnitt erstreckt sind, transformieren. Das Integral der linken Seite von (5) längs des Randes ist gleichwertig mit dem über den Querschnitt erstreckten Integral der linken Seite von (4) und verschwindet daher. Das Integral der rechten Seite von (5), genommen längs der geschlossenen Randkurve, verschwindet ebenfalls.

Die Spannungen auf einen beliebigen Querschnitt sind natürlich statisch gleichwertig mit einer (möglicherweise verschwindenden) Einzelkraft im Koordinatenanfang und einem Kräftepaar. Wir wollen zeigen, daß sie einem Kräftepaar allein gleichwertig sind. Die Achse des Kräftepaares ist offenbar den Erzeugenden des Prismas parallel. Wir haben nachzuweisen, daß

$$\iint X_z\,dx\,dy = 0, \qquad \iint Y_z\,dx\,dy = 0.$$

Nun ist

$$\iint X_z\,dx\,dy = \mu\tau \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) dx\,dy.$$

Die rechte Seite läßt sich mit Hilfe der Differentialgleichung (4) umformen in

$$\mu\tau \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right)\right\}\right] dx\,dy.$$

Den zuletzt hingeschriebenen Ausdruck können wir in ein Integral, das längs der Randkurve erstreckt ist, transformieren, nämlich in

$$\mu\tau \int x \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - y \cos(x, \nu) + x \cos(y, \nu)\right\} ds,$$

wo $ds$ das Bogenelement der Randkurve. Dies Integral verschwindet wegen der Randbedingung (5). Wir haben somit bewiesen, daß $\iint X_z\,dx\,dy = 0$, und auf ähnlichem Wege können wir zeigen, daß $\iint Y_z\,dx\,dy = 0$. Es ergibt sich also, daß die Spannungen auf einen Querschnitt statisch mit einem Kräftepaar um die $z$-Achse gleichwertig sind, dessen Moment den Betrag hat

$$\mu\tau \iint \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{6}$$

Wir haben jetzt gezeigt, daß das Prisma in der den Gleichungen (1) entsprechenden verschobenen Lage durch Kräftepaare gehalten werden kann, die an den Enden angreifen und deren Achsen zur Zentrallinie des Prismas parallel sind. Ist der Drall gleich $\tau$, so hat das Moment des Kräftepaars, das „Drillungsmoment“, den Betrag

$C\tau$, wo

$$C = \mu \iint \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx\, dy. \tag{7}$$

Die Größe $C$ ist das Produkt der Steifigkeit des Materials und einer Größe, die in den linearen Abmessungen des Querschnitts vom vierten Grade ist. $C$ wird zuweilen die „Drillungssteifigkeit“ (engl. „torsional rigidity“) des Prismas genannt.

Die vollständige Lösung des Torsionsproblems für ein Prisma von beliebiger Querschnittsform ist gefunden, wenn $\Phi$ so bestimmt ist, daß die Gleichung (4) und die Randbedingung (5) erfüllt sind. Die Aufgabe, $\Phi$ für eine gegebene Berandung zu bestimmen, wird manchmal als das „Torsionsproblem“ für jene Berandung bezeichnet. Die Funktion $\Phi$ nennt man mitunter die „Torsionsfunktion“ für den betreffenden Rand.

In der obigen Lösung wird das drillende Kräftepaar durch Anbringung der Spannungen $X_z$, $Y_z$, die sich durch (3) ausdrücken, geliefert. Die praktische Anwendbarkeit der Lösung beschränkt sich jedoch nicht auf den Fall, wo das Kräftepaar in dieser Weise angebracht ist. Ist die Länge des Prismas groß gegenüber den linearen Abmessungen seines Querschnitts, so stellt die Lösung den Zustand des Prismas überall, außer in einem verhältnismäßig kleinen Bereich in der Nähe der Enden, richtig dar, mag nun das drillende Kräftepaar genau in der bezeichneten Weise angebracht sein oder nicht. [Vgl. § 89.]

Die potentielle Energie pro Längeneinheit in dem gedrillten Prisma ist

$$\tfrac{1}{2} \mu \tau^2 \iint \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx\, dy,$$

somit gleich

$$\tfrac{1}{2} C \tau^2 + \tfrac{1}{2} \mu \tau^2 \iint \left\{ x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy &= \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds \\ &= \int \Phi \{ y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu) \} ds \\ &= \iint \left( y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx\, dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die potentielle Energie pro Längeneinheit gleich $\frac{1}{2} C \tau^2$ ist.

## § 217. Lösungsverfahren beim Torsionsproblem.

Da $\Phi$ eine ebene harmonische Funktion, so gibt es eine konjugierte Funktion $\Psi$ derart, daß $\Phi + i\Psi$ eine Funktion der komplexen Variablen $x + iy$; und falls $\Psi$ sich ermitteln läßt, kann $\Phi$ mittels

folgender Gleichungen hingeschrieben werden:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Die Funktion $\Psi$ genügt der Gleichung $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ in allen Punkten innerhalb der Randkurve des Querschnitts, sowie einer gewissen Bedingung auf diesem Rande. Wir wollen die Randbedingung für $\Psi$ aufstellen.

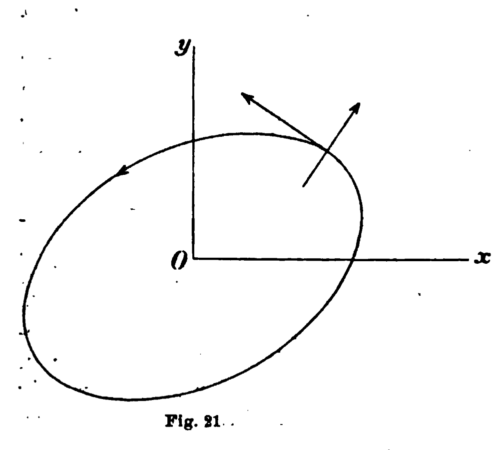


Fig. 21.

Wir bezeichnen das Bogenelement der Randkurve mit $ds$ und bemerken, daß, wenn $s$ und $\nu$ in dem durch die Pfeile in Fig. 21 angegebenen Sinne gemessen werden, $\cos(x, \nu) = dy/ds$, $\cos(y, \nu) = -dx/ds$ ist; die Bedingung (5) läßt sich also schreiben

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds};$$

daraus folgt, daß am Rande

$$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.} \tag{8}$$

Das Problem ist also auf die Bestimmung einer ebenen harmonischen Funktion, die diese Bedingung erfüllt, zurückgeführt. Abgesehen von additiven Konstanten sind die Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ eindeutig bestimmt.[1])

## § 218. Hydrodynamische Analogien.

a) Die Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ sind vom mathematischen Standpunkt identisch mit dem Geschwindigkeitspotential und der Strömungsfunktion einer bestimmten wirbelfreien Bewegung einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit, die sich in einem Gefäß von der Gestalt des Prismas befindet.[2]) Es ist diejenige Bewegung, die entsteht, wenn das Gefäß mit der Winkelgeschwindigkeit $-1$ um eine Achse gedreht wird.

b) Die Funktion $\Psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ist vom mathematischen Standpunkt identisch mit der Geschwindigkeit bei einer gewissen Laminar-

1) Für eine Reihe von Querschnittsformen sind die Funktionen ermittelt in §§ 221, 222 unten.

2) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.* Teil II, p. 242 ff.

bewegung einer zähen Flüssigkeit. Die Flüssigkeit fließt unter Druck durch ein Rohr, und der Querschnitt des Rohrs ist derselbe wie der des Prismas.[1])

c) die Funktion $\Psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ist vom mathematischen Standpunkt ebenfalls identisch mit der Strömungsfunktion der Bewegung von inkompressibler reibungsloser Flüssigkeit, die mit der gleichmäßigen Drehgeschwindigkeit eins in einem festen zylindrischen Gefäß von der Gestalt des Prismas zirkuliert.[2]) Die Winkelkoordinate des Impulses der Flüssigkeit ist gleich dem Quotienten aus der Drillungssteifigkeit des Prismas und der Steifigkeit des Materials. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist in jedem Punkte, mathematisch gesprochen, identisch mit der Schubverzerrung, die das Material des Prismas in jenem Punkte erleidet.

Im Falle der Analogie a) rotiert das Gefäß in der angegebenen Weise relativ zu einem als fest angesehenen Rahmen, und die $x$- und die $y$-Achse drehen sich mit dem Gefäß. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens relativ zu dem festen Rahmen löst sich in zwei zur augenblicklichen Lage der $x$- und der $y$-Achse parallele Komponenten auf. Diese Komponenten sind $\partial\Phi/\partial x$ und $\partial\Phi/\partial y$. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit relativ zum Gefäß kommt im Fall der Analogie c) zur Geltung.

Wir können von der Analogie in der Form a) Gebrauch machen, um die Wirkung der Drillung des Prismas um eine bestimmte Achse zu bestimmen, wenn die Wirkung der Drillung um irgend eine parallele Achse bekannt ist. Es sei $\Phi_0$ die Torsionsfunktion, wenn die Achse durch den Koordinatenanfang eines Querschnitss geht; $\Phi'$ sei die Torsionsfunktion, wenn das Prisma um eine zu jener parallele Achse, die durch den Punkt $(x', y')$ des Querschnitts geht, gedrillt wird. Rotation des Gefäßes um die zweite Achse ist in jedem Augenblick gleichwertig mit Rotation um die erste Achse und einer gewissen Translationsbewegung, die für alle Punkte des Gefäßes dieselbe ist. Die instantane Translationsbewegung ist die Bewegung der ersten Achse, die durch die Drehung um die zweite Achse hervorgebracht wird; die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Achsen sind $-y'$ und $x'$, da die Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes gleich $-1$ ist. Demnach müssen wir haben: $\Phi' = \Phi_0 - xy' + yx'$. Die Verschiebungskomponenten sind deshalb durch die Gleichungen

$$u = -\tau(y - y')z, \quad v = \tau(x - x')z, \quad w = \tau\Phi'$$

gegeben; die Spannung ist dieselbe wie in dem Falle, wo die Drehungsachse durch den Koordinatenanfang geht. Das Torsionsmoment und die potentielle Energie haben ebenfalls in den beiden Fällen den gleichen Betrag.

1) J. Boussinesq, *J. de math. (Liouville)*, (Sér. 2), t. 16 (1871).
2) A. G. Greenhill, Artikel „Hydromechanics“, *Ency. Brit.*, 9. Aufl.

## § 219. Verteilung der Schubspannung.

In jedem Punkte besteht die Spannung aus zwei überlagerten Spannungszuständen. Bei dem einen System haben wir die Schubspannungen $X_z$ und $Y_z$ vom Betrage $-\mu\tau y$ bzw. $\mu\tau x$. Bei diesem System hat die auf die Flächeneinheit der Ebene $z = \text{const.}$ wirkende Tangentialspannung in jedem Punkt die Richtung der Tangente an einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegt und der durch den Punkt hindurchgeht. Die gleiche Tangentialspannung muß parallel zur $z$-Achse auf die Flächeneinheit der Ebenen wirken, die durch die $z$-Achse und den betreffenden Punkt hindurchgehen. Beim zweiten System haben wir Schubspannungen $X_z$ und $Y_z$ vom Betrag $\mu\tau\partial\Phi/\partial x$ und $\mu\tau\partial\Phi/\partial y$. Die entsprechende auf die Flächeneinheit der Ebene $z = \text{const.}$ wirkende Tangentialspannung hat in jedem Punkt die Richtung der Normalen zu derjenigen Kurve der Schar $\Phi = \text{const.}$, die durch den Punkt hindurchläuft, und ihr Betrag ist dem Gradienten von $\Phi$ proportional. Die gleiche Tangentialspannung muß parallel zur $z$-Achse auf die Flächeneinheit der zylindrischen Fläche wirken, die sich über jener Kurve erhebt. Diese Sätze über die Spannungsverteilung sind von der Wahl der Koordinatenachsen in der Ebene des Querschnitts unabhängig, so lange der Ursprungspunkt derselbe bleibt.

Die Resultante der beiden Spannungssysteme besteht aus der Schubspannung mit den Komponenten $X_z$ und $Y_z$, wie sie durch die Gleichungen (3) gegeben sind. Setzen wir

$$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = \varPsi, \tag{9}$$

so fällt die auf den Querschnitt wirkende Tangentialspannung $(X_z, Y_z)$ in jedem Punkt in die Richtung derjenigen Kurve der Schar $\varPsi = \text{const.}$, die durch den Punkt hindurchgeht; die Größe dieser Spannung ist $\mu\tau\partial\varPsi/\partial\nu$, wo $d\nu$ das Element der Normale der Kurve. Die Kurven $\varPsi = \text{const.}$ können wir „Schubspannungslinien" nennen.

Die Größe der resultierenden Tangentialspannung läßt sich auch durch die Formel ausdrücken

$$\mu\tau\left\{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right]^2 + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

und diese Formel ist von der Richtung der Koordinaten unabhängig. Wählen wir als $x$-Achse eine Gerade, die zur Richtung der Tangentialspannung in einem Punkt $P$ parallel ist, so ist die Schubspannung in $P$ gleich dem Werte der Funktion $\mu\tau(\partial\Phi/\partial x - y)$ im Punkte $P$, und die $x$-Komponente der Spannung in irgend einem anderen Punkte $Q$ ist gleich dem Werte derselben Funktion in $Q$. Diese Funktion kann nun als harmonische Funktion in $P$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben; es gibt daher einen Punkt $Q$ in der Umgebung

von $P$, in dem sie einen größeren Wert hat als in $P$. Somit ist die $x$-Komponente der Spannung in einem Punkte $Q$ nahe bei $P$ größer als die Spannung in $P$, und die Spannung in $Q$ muß daher größer sein als die in $P$. Daraus folgt, daß die Schubspannung in keinem Punkte im Innern des Prismas ein Maximum haben kann; daher fällt der größte Wert der Spannung auf den Zylindermantel.[1])

## § 220. Torsionsfestigkeit.

Die resultierende Schubverzerrung ist der resultierenden Schubspannung proportional, und die Dehnung und Verkürzung längs der Hauptachsen der Verzerrung in irgendeinem Punkte haben je den halben Betrag der Schubverzerrung in diesem Punkte; somit hängt die Torsionsfestigkeit des Prismas von der größten Schubspannung ab. Praktische Regeln bezüglich der größten zulässigen Belastung müssen die Bedingung ausdrücken, daß diese Spannung einen bestimmten Wert nicht übersteigt.

Einige praktisch bedeutsame Resultate lassen sich aus der Form der hydrodynamischen Analogie [§ 218, c)] ableiten, bei der es sich um eine Zirkulationsbewegung mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit handelt. In einer Welle, die ein Kräftepaar überträgt, befinde sich eine zylindrische Blase von kreisförmigem Querschnitt, deren Achse zu der der Welle parallel ist. Ist der Durchmesser der Höhlung klein gegenüber dem der Welle und befindet sich die Blase in einem Abstand von der Oberfläche, der groß ist gegen ihren Durchmesser, so ist das Problem nahezu identisch mit dem der Strömung in einer Flüssigkeit hinter einem Zylinder. Wir wissen nun, daß die Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit hinter einem Zylinder einen Maximalwert besitzt, der doppelt so groß ist wie die Stromgeschwindigkeit; daraus können wir schließen, daß in der Welle der Schub in der Nähe der Höhlung doppelt so groß ist wie der in einer gewissen Entfernung herrschende Schub. Falls die Höhlung der Oberfläche beträchtlich näher liegt als der Achse, oder falls die Oberfläche eine halbkreisförmige Rinne aufweist, so kann der Schub in der Umgebung der Höhlung (bzw. der Rinne) das Doppelte des Maximalschubs betragen, der auftreten würde, wenn die Höhlung (bzw. Rinne) nicht vorhanden wäre.[2])

---

1) Dieser Satz wurde zuerst von Boussinesq, *loc. cit.*, aufgestellt. Der im Text angegebene Beweis findet sich in einer Abhandlung von L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 193 (1900). Boussinesq hatte angenommen, daß die Punkte größter Schubspannung mit denjenigen Randpunkten zusammenfallen müßten, die der Achse am nächsten liegen. Filon zeigte jedoch, daß dies nicht notwendig der Fall ist.

2) Vgl. J. Larmor, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 33 (1892).



Wenn der Rand des Querschnitts irgendwo eine scharfe vorspringende Ecke besitzt, so verschwindet die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Ecke, und der Schub beim Torsionsproblem ist daher in einer solchen Ecke gleich null. Wenn der Rand eine scharfe einspringende Ecke besitzt, so ist die Geschwindigkeit theoretisch unendlich groß, und die Torsion eines Prismas mit einem derartigen Querschnitt wird in der Nähe der Ecke von *bleibender Formänderung* begleitet sein.

Saint-Venant machte in seiner Abhandlung vom Jahre 1855 auf die Zwecklosigkeit vorspringender Kanten aufmerksam und zeigte in verschiedenen Zahlenbeispielen die Verringerung der Drillungssteifigkeit in Prismen mit derartigen Kanten im Vergleich zu Kreiszylindern mit demselben Querschnittsinhalt.

## § 221. Lösung des Torsionsproblems für verschiedene Berandungen.

Wir wollen nun zeigen, wie sich die Funktion $\Phi$ aus der Gleichung (4) und der Bedingung (5) bestimmt, wenn der Rand des Prismenquerschnitts gewisse spezielle Formen besitzt. Die willkürliche Konstante, die zu $\Phi$ hinzugefügt werden kann, werden wir im allgemeinen so wählen, daß $\Phi$ im Koordinatenanfang verschwindet.

a) *Der Kreis.*

Wenn der Zylinder von kreisförmigem Querschnitt um seine Figurenachse gedrillt wird, so verschwindet $\Phi$, und wir haben die bereits in § 86, d) angegebene Lösung. Wird er um irgendeine zu jener parallele Achse gedrillt, so verschwindet $\Phi$ nicht, kann aber nach dem in § 218 auseinander gesetzten Verfahren bestimmt werden. Im letzteren Falle bleiben die Querschnitte eben, werden aber so verschoben, daß sie mit der Achse einen von einem rechten Winkel etwas abweichenden Winkel bilden.

b) *Die Ellipse.*

Die Funktion $\Psi$ ist eine ebene harmonische Funktion, die am Rande $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ der Bedingung $\Psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}$ genügt. Setzen wir $\Psi$ in der Form $A(x^2 - y^2)$ an, so erhalten wir die Gleichung

$$(\tfrac{1}{2} - A)\, a^2 = (\tfrac{1}{2} + A)\, b^2. \tag{11}$$

Somit müssen wir haben

$$\Psi = \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(x^2 - y^2), \quad \Phi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy. \tag{12}$$

Diese Lösung ist offenbar auch auf den Fall eines Randes, der von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen gebildet wird, anwendbar. Wir haben es dann mit einem elliptischen Rohr zu tun.

c) *Das Rechteck.*[1])

Die Berandung ist gegeben durch die Gleichungen $x = \pm a$, $y = \pm b$. Die Funktion $\Psi$ unterscheidet sich für $x = \pm a$ und $b > y > -b$ von $\frac{1}{2}(y^2 + a^2)$ um eine Konstante; für $y = \pm b$ und $a > x > -a$ unterscheidet sie sich um dieselbe Konstante von $\frac{1}{2}(x^2 + b^2)$. Wir führen eine neue Funktion $\Psi'$ mittels der Gleichung

$$\Psi' = \Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) - \tfrac{1}{2}b^2$$

ein. Dann ist $\Psi'$ innerhalb des Rechtecks eine ebene harmonische Funktion; wir können $\Psi'$ auf den Seiten $y = \pm b$ gleich null und auf den Seiten $x = \pm a$ gleich $y^2 - b^2$ annehmen. Da die Randbedingungen sich nicht ändern, wenn wir $x$ mit $-x$ oder $y$ mit $-y$ vertauschen, suchen wir allen Bedingungen zu genügen, indem wir für $\Psi'$ eine Formel vom Typus $\sum A_m \cosh mx \cos my$ ansetzen. Die Bedingungen an den Grenzen $y = \pm b$ verlangen, daß $m = \frac{1}{2}(2n+1)\pi/b$, wo $n$ eine ganze Zahl. Nehmen wir an, daß die Funktion $y^2 - b^2$ für $b > y > -b$ sich in eine Reihe von der Form

$$y^2 - b^2 = \sum A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

entwickeln läßt, so können wir die Koeffizienten in der Weise bestimmen, daß wir beide Seiten dieser Gleichung mit

$$\cos\{(2n+1)\pi y/2b\}$$

multiplizieren und dann beiderseits zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$ nach $y$ integrieren. Wir würden dann finden

$$A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b} = (-)^{n+1} 4 b^2 \frac{2^3}{(2n+1)^3 \pi^3}.$$

Wir kommen so zu der Vermutung, daß für $b > y > -b$ die Summe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{(-)^{n+1}}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \tag{13}$$

gleich $y^2 - b^2$ ist. Wir können nicht ohne weiteres schließen, daß dies aus dem Fourierschen Satz folgt[2]); denn eine Fouriersche Reihe von Kosinus der Vielfachen von $\pi y/2b$ stellt eine Funktion in einem Intervall dar, das durch die Ungleichungen $2b > y > -2b$ gegeben

1) Das entsprechende hydrodynamische Problem wurde gelöst von Stokes, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 8 (1843) = *Math. and Phys. Papers*, vol. 1, p. 16.

2) Wir bemerken z. B, daß die Fouriersche Reihe der Kosinus der Vielfachen von $\pi y/2b$, die im ganzen Intervall $2b > y > -2b$ die Summe $y^2 - b^2$ hat, gleich ist

$$\tfrac{1}{3}b^2 + \frac{16 b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{2b}.$$

ist, während der Wert $y^2 - b^2$ der zu entwickelnden Funktion nur in dem Intervall $b > y > -b$ vorgegeben ist. Enthält die Fouriersche Kosinusreihe nur die ungeraden Vielfachen von $\pi y/2b$, so ändert sich das Vorzeichen jedes Gliedes, wenn wir $2b - y$ statt $y$ setzen; wenn also die Reihe (13) eine Fouriersche Reihe ist, deren Summe für $b > y > 0$ gleich $y^2 - b^2$ ist, so ist die Summe der Reihe für $2b > y > b$ gleich $b^2 - (2b - y)^2$. Nun läßt sich zeigen, daß die Fouriersche Reihe für eine gerade Funktion von $y$, die für $b > y > 0$ den Wert $y^2 - b^2$ und für $2b > y > b$ den Wert $b^2 - (2b - y)^2$ hat, in der Tat mit der Reihe (13) übereinstimmt.

Wir ziehen daraus den Schluß, daß $\Psi$ folgende Form hat

$$\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2) - 4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

mithin, daß

$$\Phi = -xy + 4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^3} \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}.\text{[1]} \quad (14)$$

## § 222. Weitere Resultate.

Das Torsionsproblem ist für viele Randformen gelöst worden. Ein Verfahren besteht darin, daß man eine ebene harmonische Funktion als Funktion $\Psi$ annimmt und mögliche Berandungen aus der Bedingung $\Psi - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const.}$ ableitet. Wir können z. B. $\Psi = A(x^3 - 3xy^2)$ annehmen; setzen wir $A = -1/6a$, so kann der Rand von dem gleichseitigen Dreieck[2]) von der Höhe $3a$ gebildet werden, dessen Seiten durch die Gleichung

$$(x - a)(x - y\sqrt{3} + 2a)(x + y\sqrt{3} + 2a) = 0$$

gegeben sind. Andere Beispiele für dies Verfahren sind von Saint-Venant untersucht worden.

Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man konjugierte Funktionen $\xi, \eta$ einführt, sodaß $\xi + i\eta$ eine Funktion von $x + iy$. Wenn die Funktionen sich so wählen lassen, daß der Rand aus Kurven zusammengesetzt ist, längs deren entweder $\xi$ oder $\eta$ einen konstanten Wert hat, so ist $\Psi$ der reelle Teil einer Funktion von $\xi + i\eta$, die auf dem Rande gegebene Werte annimmt. Das Problem ist dann von derselben Art, wie das Torsionsproblem für das Rechteck. Wir führen für dies Verfahren einige Beispiele an.

---

1) Der Ausdruck für $\Phi$ muß ungeändert bleiben, wenn $x$ und $y$, $a$ und $b$ miteinander vertauscht werden. Einen Bericht über die Identitäten, die sich aus dieser Bemerkung ergeben, findet der Leser in einer Abhandlung von F. Purser, *Messenger of Math.*, vol. 11 (1882).

2) Siehe die Figuren 23 und 24 in § 223.

1) Kreissektor, dessen Ränder durch $r = 0$, $r = a$, $\theta = \pm\beta$ gegeben sind.[1]) Wir finden

$$\Psi = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\frac{\pi}{2\beta}} \cos\left\{(2n+1)\frac{\pi\theta}{2\beta}\right\}\right]$$

wo

$$A_{2n+1} = (-)^{n+1}\left[\frac{1}{(2n+1)\pi - 4\beta} - \frac{2}{(2n+1)\pi} + \frac{1}{(2n+1)\pi + 4\beta}\right].$$

Schreiben wir $re^{i\theta} = ax$, so ist

$$\Psi - i\Phi = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{x^2}{\cos 2\beta} - \frac{a^2}{2\beta}\left\{x^2 \int_0^x \frac{x^{\frac{\pi}{2\beta}-3}}{1 + x^{\frac{\pi}{\beta}}} dx \right.$$

$$\left. - \frac{4\beta}{\pi} \operatorname{arctg} x^{\pi/2\beta} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{x^{\frac{\pi}{2\beta}+1}}{1 + x^{\frac{\pi}{\beta}}} dx\right\},$$

wo $|x| \leqq 1$ ist und $\operatorname{arctg} x^{\pi/2\beta}$ denjenigen Zweig der Funktion bezeichnet, der mit $x$ verschwindet.

Ist $\pi/2\beta$ eine ganze Zahl, die größer als 2 ist, so lassen sich die Integrationen ausführen; ist aber $\pi/2\beta = 2$, so werden die beiden ersten Terme unendlich; ihre Summe hat einen endlichen Grenzwert, und wir erhalten für einen Viertelzylinder:

$$\Psi - i\Phi = \frac{2a^2}{\pi}\left[- x^2 \log x + \operatorname{arctg} x^2 + \tfrac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \log(1 + x^4)\right].$$

Für einen Halbzylinder ergibt sich

$$\Psi - i\Phi = \frac{a^2}{\pi}\left[\tfrac{1}{2}\pi x^2 - i\left(x + \frac{1}{x}\right) + \tfrac{1}{2} i \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) \log\frac{1+x}{1-x}\right].$$

2) Für ein Kurvenrechteck, das von zwei konzentrischen Kreisbögen und zwei Radien begrenzt wird, machen wir von konjugierten Funktionen $\alpha$ und $\beta$ Gebrauch, die durch die Gleichung

$$x + iy = ce^{\alpha + i\beta}$$

gegeben sind; den Radius $a$ des äußeren Kreises setzen wir gleich $ce^{\alpha_0}$, den Radius $b$ des inneren Kreises gleich $ce^{-\alpha_0}$ (sodaß $c$ das geometrische Mittel der Radien); die begrenzenden Radien seien durch die Gleichungen $\beta = \pm\beta_0$ gegeben. Wir finden

$$\Phi = -\tfrac{1}{2} abe^{2\alpha} \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta_0} + 2^5 ab\beta_0^2 \sum_0^{\infty} A_n \Phi_n,$$

1) Siehe A. G. Greenhill, *Messenger of Math.*, vol. 8 (1877), p. 89, und vol. 10 (1880), p. 83.

wo

$$\Phi_n = \left\{\cosh 2\alpha_0 \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2\beta_0}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi\alpha_0}{2\beta_0}} + \sinh 2\alpha_0 \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2\beta_0}}{\sinh \frac{(2n+1)\pi\alpha_0}{2\beta_0}}\right\}$$

und

$$A_n = \frac{(-)^n \sin \frac{(2n+1)\pi\beta}{2\beta_0}}{\{(2n+1)\pi - 4\beta_0\}\,(2n+1)\pi\,\{(2n+1)\pi + 4\beta_0\}}.$$

3) Ist das gedrillte Prisma ein Rohr, das von zwei nicht konzentrischen Kreiszylindern begrenzt wird, so können wir die durch die Gleichung

$$x + iy = c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\xi + i\eta)$$

bestimmten konjugierten Funktionen $\xi$, $\eta$ benutzen; stellt $\eta = \alpha$ den äußeren, $\eta = \beta$ den inneren Rand dar, so läßt sich zeigen[1]), daß

$$\Psi = 2c^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{e^{-n\beta} \coth\beta \sinh n(\eta - \alpha) + e^{-n\alpha} \coth\alpha \sinh n(\beta - \eta)}{\sinh n(\beta - \alpha)} \cos n\xi.$$

4) Werden die Ränder von konfokalen Ellipsen und Hyberbeln gebildet, so benutzen wir die konjugierten Funktionen $\xi$, $\eta$, die durch die Gleichung

$$x + iy = c \cosh(\xi + i\eta)$$

bestimmt sind. Im Falle eines Rohrs, dessen Querschnitt von zwei konfokalen Ellipsen $\xi_0$ und $\xi_1$ begrenzt wird, läßt sich zeigen[2]), daß

$$\Psi = \tfrac{1}{4} c^2 \frac{\sinh 2(\xi_0 - \xi) + \sinh 2(\xi - \xi_1)}{\sinh 2(\xi_0 - \xi_1)} \cos 2\eta.$$

## § 223. Graphische Darstellung der Resultate.

a) *Verwölbung der Querschnitte.*

Die Kurven $\Phi = \text{const.}$ sind die Höhenlinien der Fläche, zu der jeder Querschnitt des Prismas verwölbt wird. Diese Kurven wurden von Saint-Venant für eine Reihe von Querschnittsformen gezeichnet. Für zwei Fälle sind die Ergebnisse in Fig. 22 und Fig. 23 dargestellt. In beiden Fällen zerlegt sich der Querschnitt in mehrere Gebiete, 4 an der Zahl in Fig. 22, 6 in Fig. 23; $\Phi$ wechselt beim Übergang von einem Gebiet zu einem anliegenden Gebiet das Zeichen, die Form der Kurven $\Phi = \text{const.}$ dagegen ändert sich nicht. Denken wir uns die Achse des Prismas ver-

1) H. M. Macdonald, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*. vol. 8 (1893).

2) Vgl. A. G. Greenhill, *Quart. J. of Math.*, vol. 16 (1879). Andere Beispiele für elliptische und hyperbolische Begrenzung sind von Filon, *loc. cit.* p. 367, durchgerechnet worden.

tikal, so liegt die krumme Fläche, zu der sich ein Querschnitt verzerrt, in dem einen Gebiet oberhalb der Anfangslage und in dem angrenzenden

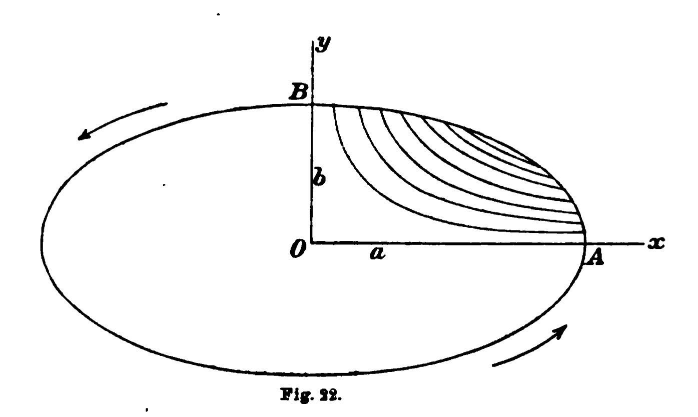



Fig. 22.

Gebiet unterhalb derselben. Saint-Venant zeigte, daß die Querschnitte eines quadratischen Prismas auf diese Weise in 8 Gebiete zerfallen, die durch die Diagonalen und ihre Winkelhalbierenden geschieden werden. Ist der Querschnitt des Prismas ein Rechteck, in dem zwei gegenüberliegende Seiten bedeutend länger sind als die beiden andern, so treten nur vier Gebiete auf, und zwar werden dieselben durch die Geraden, die parallel zu den Seiten durch den Schwerpunkt gezogen werden, getrennt. Der Grenzfall zwischen Rechtecken, die in 4, und solchen, die in 8 Gebiete zerfallen, liegt vor, wenn das Verhältnis der aneinander stoßenden Seiten gleich 1,4513 ist. Das Studium der Figuren hat das Verständnis dafür gefördert, daß die Querschnitte eines gedrillten, nicht kreisförmigen Prismas nicht eben bleiben.

b) *Schubspannungslinien.*

Die Verteilung der Tangentialspannung über den Querschnitt eines gedrillten Prismas läßt sich mit Hilfe der Schubspannungslinien graphisch darstellen. Diese Linien bestimmen sich durch die Gleichung

$$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = c.$$

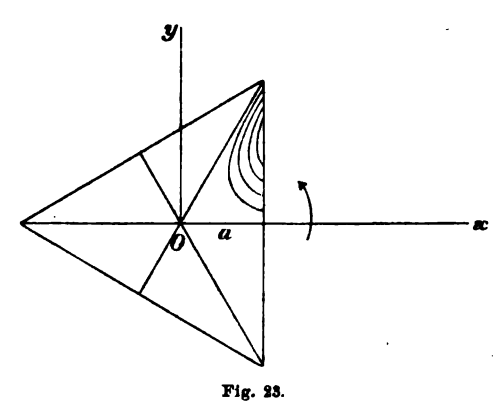



Fig. 23.

Sie haben die Eigenschaft, daß die Tangentialspannung auf den Querschnitt in jedem Punkt in die Richtung der Tangente derjenigen Kurve dieser Schar, die durch den Punkt hindurchgeht, fällt. Werden die Kurven für eine gleichmäßige Wertfolge von $c$ gezeichnet, so wird die Tangentialspannung

in jedem Punkte durch die Dichte der aufeinander folgenden Kurven gemessen.

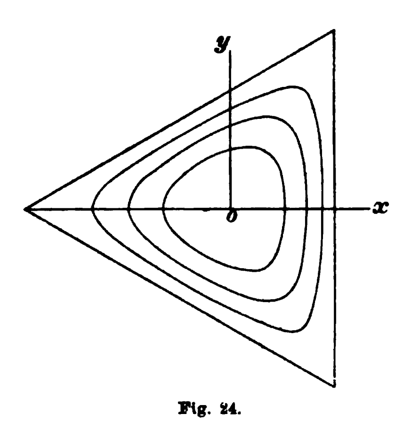


Fig. 24.

Bei einem Prisma von elliptischem Querschnitt ist

$$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = -(x^2 b^2 + y^2 a^2)/(a^2 + b^2);$$

die Schubspannungslinien sind daher konzentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks ist

$$\Psi - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) = -\tfrac{1}{6}a^{-1}[x^3 - 3xy^2 + 3ax^2 + 3ay^2],$$

und die Schubspannungslinien haben die in Fig. 24 dargestellte Form.

## § 224. Analogie mit der Gestalt einer gleichförmig belasteten gespannten Membran.[1])

Eine homogene Membran sei durch gleichförmigen Zug $T$ gespannt und am Rande befestigt. Der Rand sei eine gegebene Kurve in der $(x, y)$-Ebene. Wenn die Membran durch Druck vom Betrage $p$ pro Flächeneinheit beansprucht wird, so erfährt sie eine kleine Verschiebung $z$, und $z$ ist eine Funktion von $x$ und $y$, die am Rande verschwindet. Die Gleichung des Gleichgewichts der Membran lautet

$$T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + p = 0.$$

Die Funktion $2\,Tz/p$ bestimmt sich durch dieselben Bedingungen wie die Funktion $\Psi$ von § 219, vorausgesetzt daß der Rand der Membran mit der Randkurve des Querschnitts des gedrillten Prismas übereinstimmt. Daraus folgt, daß die Höhenlinien der belasteten Membran identisch sind mit den Schubspannungslinien auf dem Querschnitt des Prismas.

Ferner läßt sich die Drillungssteifigkeit des Prismas durch das Volumen darstellen, das von der Oberfläche der belasteten Membran und der Ebene des Randes abgegrenzt wird. Wir sahen bereits in § 216, daß die Drillungssteifigkeit durch die Gleichung

$$C = \mu \iint \left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right)^2\right\} dx\,dy$$

gegeben ist, oder wenn wir $\Psi$ einführen:

---

1) Die hier geschilderte Analogie wurde von L. Prandtl, *Phys. Zeitschr.*, Bd. 4 (1903) entwickelt; sie bietet ein Mittel, die Spannungsverteilung in einem gedrillten Prisma unmittelbar vor Augen zu führen.

$$C = \mu \iint \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

$$= \mu \int \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds - \mu \iint \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) dx\,dy$$

$$= \mu \int \Psi\, dx\,dy,$$

da $\Psi$ am Rande verschwindet und $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 = 0$. Daraus folgt, daß das in Rede stehende Volumen gleich $(p/4\mu T)\, C$ ist.

## § 225. Drillungsmoment.

Das Drillungsmoment läßt sich mittels der Formel (6), § 216 berechnen, wenn die Funktion $\Phi$ bekannt ist. Wir wollen für verschiedene Fälle das Ergebnis anmerken.

a) *Der Kreis.*

Ist $a$ der Radius des Kreises, so ist das Drillungsmoment gleich

$$\tfrac{1}{2} \mu \tau \pi a^4. \tag{15}$$

b) *Die Ellipse.*

Aus dem in § 221, b) angegebenen Wert von $\Phi$ ergibt sich, daß das Drillungsmoment gleich ist

$$\mu \tau \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2). \tag{16}$$

c) *Das Rechteck.*

Aus dem in § 221, c) vermerkten Resultat finden wir für das Drillungsmoment die Formel

$$\mu \tau \tfrac{4}{3} ab(a^2 + b^2) - \mu \tau \tfrac{4}{3} ab(a^2 - b^2)$$
$$+ 4 \mu \tau b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \iint \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

wo $\Phi$ die folgende Reihe bedeutet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^3} \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}}.$$

Wir greifen ein Glied der Reihe heraus und erhalten so ein Glied des Integrals, nämlich

$$\frac{(-)^n}{(2n+1)^2 \cosh\{(2n+1)\pi a/2b\}} \frac{\pi}{2b} \iint \left\{ x \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \right.$$
$$\left. - y \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} \right\} dx\,dy$$

Nun ist

$$\int_{-a}^{a} x \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} dx = \frac{2b}{(2n+1)\pi}\Big[2a \cosh \frac{(2n+1)\pi a}{2b} - \frac{2b}{(2n+1)\pi} 2 \sinh \frac{(2n+1)\pi a}{2b}\Big],$$

$$\int_{-a}^{a} \cosh \frac{(2n+1)\pi x}{2b} dx = \frac{2b}{(2n+1)\pi} 2 \sinh \frac{(2n+1)\pi a}{2b},$$

$$\int_{-b}^{b} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy = \frac{2b}{(2n+1)\pi} 2 (-)^n,$$

$$\int_{-b}^{b} y \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} dy = \frac{8b^2}{(2n+1)^2\pi^2} (-)^n,$$

Mithin ist das Drillungsmoment gleich

$$\tfrac{8}{3}\mu\tau ab^3 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \mu\tau a b^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \mu\tau b^4 \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}.$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-4} = \pi^4/96$, so können wir den Wert des Drillungsmoments in folgender Form hinschreiben:

$$\tfrac{16}{3}\mu\tau ab^4 - \mu\tau b^4 \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi a}{2b}. \tag{17}$$

Der Wert der Reihe in (17) ist von Saint-Venant für zahlreiche Werte des Verhältnisses $a:b$ berechnet worden. Für $a > 3b$ ist er nahezu konstant, und der Wert des Drillungsmoments ist ungefähr gleich $\mu\tau ab^3\left[\frac{16}{3} - \frac{b}{a}(3{,}361)\right]$. Für ein Quadrat ist das Moment gleich $(4{,}4985)\,\mu\tau a^4$.

Saint-Venant hat auch für eine Reihe anderer Querschnittsformen das Drillungsmoment berechnet. Er fand, daß eine recht gute Formel für die Torsionsfestigkeit eines Prismas sich ergibt, wenn man den Querschnitt des Prismas durch eine Ellipse von gleichem Flächeninhalt und gleichem Trägheitsmoment ersetzt.[1]) Der Ausdruck für das Drillungsmoment im Falle einer Ellipse vom Flächeninhalt $A$ und vom Trägheitsmoment $I$ ist $\mu\tau A^4/4\pi^2 I$.

## § 226. Torsion eines äolotropen Prismas.

Die Theorie, die in § 216 entwickelt wurde, läßt sich auf ein Prisma aus äolotropem Material ausdehnen, wenn der Normalschnitt eine Struktur-

1) Saint-Venant, *Paris C. R.*, t. 88 (1879).

Symmetrieebene darstellt. Wählen wir die $z$-Achse parallel zu den Erzeugenden der Mantelfläche, so drückt sich die Verzerrungsenergie-Funktion in der Form aus, die zu den der Gruppe $C_2$ (§ 109) entsprechenden kristallinischen Stoffen gehört. Ist die Verschiebung durch die Formeln (1) gegeben, so verschwinden von den Spannungskomponenten nur $X_z$ und $Y_z$ nicht, und wir haben die Gleichungen

$$X_z = \tau\left[c_{55}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) + c_{45}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right)\right],$$
$$Y_z = \tau\left[c_{44}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) + c_{45}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right)\right].$$

Die Gleichgewichtsgleichungen führen auf die Gleichung

$$c_{55}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\,c_{45}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

die über den ganzen Querschnitt gelten muß; die Bedingung, daß der Mantel spannungsfrei ist, ist erfüllt, wenn die Gleichung

$$c_{55}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cos(x, \nu) + c_{44}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cos(y, \nu) + c_{45}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cos(x, \nu) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cos(y, \nu)\right\}$$
$$= c_{55}y\cos(x, \nu) - c_{44}x\cos(y, \nu) - c_{45}\left\{x\cos(x, \nu) - y\cos(y, \nu)\right\}$$

in allen Punkten der Randkurve besteht. Genau wie im Falle der Isotropie können wir zeigen, daß die Differentialgleichung und die Randbedingung miteinander verträglich sind und daß die auf einen Normalschnitt wirkenden Spannungen mit einem Moment von folgendem Betrage gleichwertig sind:

$$\tau\iint\Big\{c_{44}x^2 + c_{55}y^2 - 2\,c_{45}xy + c_{44}x\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$
$$- c_{55}y\frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_{45}\left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\Big\}\,dx\,dy.$$

Im Falle $c_{45} = 0$ vereinfacht sich die Rechnung beträchtlich. Schreiben wir $L$ statt $c_{44}$ und $M$ statt $c_{55}$, so lautet die Differentialgleichung

$$M\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + L\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0;$$

ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Randkurve, so läßt sich die Randbedingung folgendermaßen schreiben:

$$M\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + L\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = My\frac{\partial f}{\partial x} - Lx\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wir führen andere Variabeln ein, indem wir setzen

$$x' = x\sqrt{\frac{L+M}{2M}},\quad y' = y\sqrt{\frac{L+M}{2L}},\quad \Phi' = \Phi\,\frac{L+M}{2\sqrt{LM}}.$$

$\Phi'$ genügt dann der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} = 0.$$

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ geht über in $F(x', y') = 0$, wo

$$F(x', y') = f\left(x'\sqrt{\frac{2M}{L+M}},\ y'\sqrt{\frac{2L}{L+M}}\right),$$

sodaß

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2M}{L+M}},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{\frac{2L}{L+M}};$$

die Randbedingung wird somit übergeführt in

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial \Phi'}{\partial y'} = y'\frac{\partial F}{\partial x'} - x'\frac{\partial F}{\partial y'}$$

oder

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \nu'} = y' \cos(x', \nu') - x' \cos(y', \nu'),$$

wenn $d\nu'$ das Element der Normale des transformierten Randes bedeutet Mithin kann $\Phi$ für eine bestimmte Begrenzung ermittelt werden, wenn $\Phi$ für eine orthographische Projektion derselben bestimmt werden kann. Das Problem, $\Phi'$ zu finden, deckt sich mit dem einfachen Torsionsproblem, das wir früher betrachteten.

Es handle sich beispielsweise um ein rechteckiges Prisma, dessen Begrenzung durch $x = \pm a$, $y = \pm b$ gegeben ist. Wir würden finden, daß die Formel für $\Phi$ lautet

$$\Phi = -xy + \sqrt{\frac{M}{L}}\frac{2^5 b^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^3}\frac{\sinh\dfrac{(2n+1)\pi x\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}}{\cosh\dfrac{(2n+1)\pi a\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

und daß das Drillungsmoment sich durch folgende Formel ausdrückt:

$$M\tau a b^3\left\{\frac{16}{3} - \frac{b\sqrt{M}}{a\sqrt{L}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\operatorname{tgh}\frac{(2n+1)\pi a\sqrt{L}}{2b\sqrt{M}}\right\}.$$

Diese Formel benutzte W. Voigt bei seinen Untersuchungen über die elastischen Konstanten von Kristallen. [Siehe § 113.]

---

## Kapitel XV.

## Die Biegung eines Balkens durch eine am Ende angreifende Transversallast.

### § 227. Spannung in einem gebogenen Balken.

In § 87 beschrieben wir den Spannungszustand in einem beliebigen zylindrischen oder prismatischen Körper, der durch Kräftepaare an den Enden gebogen wird. Die Spannung in einem Punkte bestand in einem longitudinalen Zug oder Druck, und zwar galt die Formel

$$\text{Zug} = -Mx/I;$$

hier ist $M$ das Biegungsmoment, die $(y, z)$-Ebene enthält die Zentrallinie, die $x$-Achse zeigt nach dem Krümmungsmittelpunkt, und $I$ ist das Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf eine senkrecht zur Biegungsebene durch den Schwerpunkt gehende Achse. In § 95 zeigten wir, wie diese Theorie sich auf das Problem der Biegung eines rechteckigen Balkens von verschwindender Breite durch eine am Ende angreifende Transversallast ausdehnen läßt. Wir fanden, daß das in Frage kommende Spannungssystem sowohl Tangentialspannung auf die Querschnitte als auch longitudinale Zug- und Druckspannungen in sich schloß, daß aber der auftretende Zug oder Druck aus dem Biegungsmoment sich durch dieselbe Formel bestimmte wie im Falle der Biegung durch Kräftepaare an den Enden. Diese Theorie werden wir nun auf den Fall eines Balkens von beliebiger Querschnittsform verallgemeinern.[1]) Tangentialspannungen auf die Elemente der Querschnitte bringen gleiche, in der Richtung der Zentrallinie wirkende Tangentialspannungen auf die Elemente geeignet gewählter Längsschnitte mit sich, und die beiden Tangentialspannungen zusammen liefern in jedem Punkte eine *Schubspannung*. Es liegt nahe, anzunehmen, daß das gesuchte Spannungssystem sich zusammen-

---

1) Die Theorie rührt her von Saint-Venant. Siehe *Einleitung*, Fußnote 50 und p. 25.

setzt aus longitudinalen Zug- und Druckspannungen, die sich wie oben bestimmen, und einer Schubspannungsverteilung, bei der geeignet gerichtete Tangentialspannungen auf die Elemente der Querschnitte auftreten. Wir werden diese Annahme verifizieren und zeigen, daß es eine und nur eine Schubspannungsverteilung gibt, mittels deren sich das Problem lösen läßt.

## § 228. Problemstellung.

Um die Vorstellung zu fixieren, wählen wir die Zentrallinie des Balkens horizontal und das eine Ende befestigt; die Kräfte, die an diesem Ende über den Querschnitt angreifen, mögen den Balken in nahezu horizontaler Lage erhalten, und die Kräfte, die am anderen Ende über den Querschnitt angebracht sind, seien statisch gleichwertig mit einer vertikalen Last $W$, die in einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Linie wirkt. Der Koordinatenanfang falle in das befestigte Ende, die $z$-Achse in die Zentrallinie, und die $x$-Achse ziehen wir vertikal abwärts. Ferner nehmen wir an, daß die $x$- und die $y$-Achse den durch die Schwerpunkte gehenden Hauptträgheitsachsen der Querschnitte parallel sind. Wir bezeichnen die Länge des Balkens mit $l$ und setzen voraus, daß das Material isotrop ist. Wir betrachten den Fall, daß Massenkräfte fehlen und keine Spannungen auf die zylindrische Begrenzung wirken.

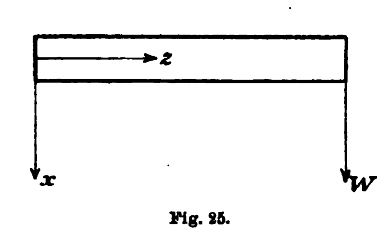


Fig. 25.

Das Biegungsmoment in dem Querschnitt, der von dem befestigten Ende den Abstand $z$ hat, ist $W(l-z)$. Wir machen die Annahme, daß der auf ein Element dieses Querschnitts wirkende Zug durch die Gleichung gegeben ist

$$Z_z = -W(l-z)\,x/I, \tag{1}$$

wo $I$ das über den Querschnitt erstreckte Integral $\iint x^2\,dx\,dy$ bedeutet. Wir nehmen an, daß die Spannung aus diesem Zug $Z_z$ und einer Schubspannung mit den Komponenten $X_z$ und $Y_z$ besteht, sodaß die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden; die Schubspannungskomponenten $X_z$ und $Y_z$ suchen wir zu bestimmen.

Zwei der Gleichgewichtsgleichungen gehen über in $\partial X_z/\partial z = 0$, $\partial Y_z/\partial z = 0$; daraus folgt, daß $X_z$ und $Y_z$ von $z$ unabhängig sind. Die dritte der Gleichgewichtsgleichungen wird

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{Wx}{I} = 0. \tag{2}$$

Die Bedingung dafür, daß die zylindrische Begrenzung spannungs-

frei ist, lautet

$$X_z \cos(x, \nu) + Y_z \cos(y, \nu) = 0. \qquad (3)$$

Unsere Aufgabe ist, $X_z$ und $Y_z$ als Funktionen von $x$ und $y$ den folgenden Bedingungen gemäß zu bestimmen:

1) Die Differentialgleichung (2) wird in allen Punkten des Balkenquerschnitts befriedigt.

2) Die Bedingung (3) wird in allen Punkten der Randkurve dieses Querschnitts befriedigt.

3) Die Spannungen auf die Flächenelemente des Endquerschnitts ($z = l$) sind statisch gleichwertig mit einer Kraft $W$, die der $x$-Achse parallel gerichtet ist und im Schwerpunkt des Querschnitts wirkt.

4) Das Spannungssystem, bei dem $X_x = Y_y = X_y = 0$, während $Z_z$ durch (1) gegeben ist und $X_z$, $Y_z$ den genannten Bedingungen genügen, besitzt die Eigenschaft, daß die Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten (§ 17) erfüllt sind.

## § 229. Typus der auftretenden Schubspannung.

Das angenommene Spannungssystem erfüllt die Gleichungen

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \quad Z_z = -W(l-z)\,x/I, \quad \frac{\partial X_z}{\partial z} = \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$

und infolgedessen befriedigen die Verzerrungskomponenten die Gleichungen

$$e_{zz} = -\frac{W(l-z)\,x}{EI}, \quad e_{xx} = e_{yy} = -\sigma e_{zz}, \quad e_{xy} = 0,$$

$$\frac{\partial e_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial z} = 0,$$

wo $E$ und $\sigma$ den Youngschen Modul und die Poissonsche Konstante des Materials bezeichnen.

Die Kompatibilitätsbedingungen vom Typus

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\, \partial z}$$

sind identisch erfüllt, ebenso die Gleichung

$$2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right).$$

Die übrigen Kompatibilitätsbedingungen der letzteren Art lauten

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = -\frac{2\sigma W}{EI}.$$

Aus diesen Gleichungen schließen wir

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} = 2\tau - \frac{2\sigma W}{EI}\,y,$$

wo $2\tau$ eine Integrationskonstante; und aus dieser Gleichung wiederum folgt, daß $e_{yz}$ und $e_{zx}$ sich in der Form ausdrücken lassen

$$e_{yz} = \tau x + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \qquad e_{zx} = -\tau y + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\sigma W}{EI} y^2, \tag{4}$$

wo $\Phi_0$ eine Funktion von $x$ und $y$.

Substituieren wir aus diesen Gleichungen in die Formeln $X_z = \mu e_{zx}$ und $Y_z = \mu e_{yz}$ und benutzen die Beziehung $\mu = \frac{1}{2} E/(1 + \sigma)$, so sehen wir, daß Gleichung (2) die Form annimmt

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \frac{2(1+\sigma) W}{EI} x = 0,$$

während die Bedingung (3) übergeht in

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} = \tau \{ y \cos(x, \nu) - x (\cos y, \nu) \} - \frac{\sigma W}{EI} y^2 \cos(x, \nu).$$

Wir können diese Relationen vereinfachen, indem wir setzen

$$\Phi_0 = \tau \Phi - \frac{W}{EI} \{ \chi + \tfrac{1}{6} \sigma x^3 + (1 + \tfrac{1}{2}\sigma) x y^2 \}. \tag{5}$$

Dann ist $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt (§ 216), und $\chi$ ist eine Funktion, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

in allen Punkten des Querschnitts und der Bedingung

$$\frac{\partial \chi}{\partial \nu} = -\{ \tfrac{1}{2} \sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^2 \} \cos(x, \nu) - (2 + \sigma) x y \cos(y, \nu) \tag{7}$$

in allen Punkten der Randkurve genügt. Daß die Differentialgleichung (6) und die Randbedingung (7) mit einander verträglich sind zeigt die Bemerkung, daß das über den Querschnitt erstreckte Integral $\iint x\,dx\,dy$ und somit auch das längs des Randes erstreckte Integral der rechten Seite von (7) verschwindet. Die Aufgabe, die Funktion $\chi$ aus Gleichung (6) und Bedingung (7) zu bestimmen, kann man das „Biegungsproblem“ für den Querschnitt nennen.

Wenn die Funktionen $\Phi$ und $\chi$ bekannt sind, sind die Schubspannungen $X_z$ und $Y_z$ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} X_z &= \mu \tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) - \frac{W}{2(1+\sigma) I} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2} \sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^2 \right\}, \\ Y_z &= \mu \tau \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) - \frac{W}{2(1+\sigma) I} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial y} + (2 + \sigma) x y \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Glieder, die $\tau$ enthalten[1]), drücken ein System von Spannungen

1) Sie sind von derselben Form wie die Ausdrücke für die Spannungen beim Torsionsproblem.

auf die Flächenelemente des Querschnittes aus, die mit einem Moment um die $z$-Achse vom Betrage

$$\mu\tau \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dx\, dy$$

statisch gleichwertig sind, und die Glieder, die $W$ enthalten, geben Anlaß zu einem Moment um dieselbe Achse vom Betrage

$$\frac{W}{2(1+\sigma) I} \iint \left\{ y \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \frac{\partial \chi}{\partial y} + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^3 - (2 + \tfrac{1}{2}\sigma) x^2 y \right\} dx\, dy.$$

Wir wählen $\tau$ so, daß die Summe dieser Momente verschwindet.

Die Spannungen auf die Flächenelemente eines Querschnittes sind statisch gleichwertig mit einer gewissen Kraft im Schwerpunkt des Querschnittes und einem bestimmten Kräftepaar. Wir wollen zeigen, daß die Kraft die Größe $W$ und die Richtung der $x$-Achse hat und daß das Kräftepaar den Betrag $W(l-z)$ und seine Achse die Richtung der $y$-Achse hat. Wir wollen also die Gleichungen beweisen

$$\iint X_z dx\, dy = W, \quad \iint Y_z dx\, dy = 0, \quad \iint Z_z dx\, dy = 0 \tag{9}$$

und

$$\iint y Z_z dx\, dy = 0, \qquad \iint - x Z_z dx\, dy = W(l - z),$$
$$\iint (x Y_z - y X_z)\, dx\, dy = 0. \tag{10}$$

Wegen (2) und (3) gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\iint X_z dx\, dy &= \iint \left\{ X_z + x \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y}\right) + \frac{W x^2}{I} \right\} dx\, dy \\ &= W + \int x \{X_z \cos(x, \nu) + Y_z \cos(y, \nu)\}\, ds \\ &= W.\end{aligned}$$

Ebenso können wir die zweite der Gleichungen (9) beweisen, indem wir bemerken, daß $\iint xy\, dx\, dy$ verschwindet. Die dritte dieser Gleichungen und die beiden ersten der Gleichungen (10) folgen ohne weiteres aus der Formel (1) für $Z_z$, und die Konstante $\tau$ wurde bereits so gewählt, daß die dritte der Gleichungen (10) befriedigt wird.

Die Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ sind beide bis auf eine additive Konstante, die auf die Spannung keinen Einfluß hat, bestimmt. Wir haben somit gezeigt, daß das in § 228 gestellte Problem eine und nur eine Lösung zuläßt.

## § 230. Formeln für die Verschiebung.

Die Verschiebung läßt sich aus der Verzerrung ableiten, ohne daß die Form von $\Phi$ und $\chi$ bestimmt wird. Das Verfahren gestaltet sich im einzelnen folgendermaßen:

Wir haben die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{W(l-z)x}{EI};$$

aus ihr ergibt sich

$$w = -\frac{Wl}{EI}xz + \frac{1}{2}\frac{W}{EI}xz^2 + \Phi', \tag{11}$$

wo $\Phi'$ eine Funktion von $x$ und $y$. Andererseits haben wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma\frac{Wl}{EI}x - \sigma\frac{W}{EI}zx,\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{Wl}{EI}z - \frac{1}{2}\frac{W}{EI}z^2 - \tau y + \frac{\sigma W}{EI}y^2 + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} - \frac{\partial\Phi'}{\partial x},\end{aligned}\right\}$$

von denen die zweite aus (11) und der zweiten von (4) sich ergibt. Diese beiden Gleichungen sind miteinander verträglich, wenn

$$\frac{\partial^2(\Phi_0 - \Phi')}{\partial x^2} + \sigma\frac{W}{EI}x = 0.$$

Des weiteren haben wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma\frac{Wl}{EI}x - \sigma\frac{W}{EI}zx,\\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau x + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} - \frac{\partial\Phi'}{\partial y};\end{aligned}\right\}$$

diese sind miteinander verträglich, falls

$$\frac{\partial^2(\Phi_0 - \Phi')}{\partial y^2} + \sigma\frac{W}{EI}x = 0.$$

Differentiieren wir ferner die linke Seite der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ nach $z$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2(\Phi_0 - \Phi')}{\partial x\,\partial y} + \sigma\frac{W}{EI}y = 0.$$

Die drei Gleichungen für $\Phi_0 - \Phi'$ zeigen, daß wir haben müssen

$$\Phi' = \Phi_0 + \sigma\frac{W}{EI}\left(\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}xy^2\right) - \beta x + \alpha y + \gamma',$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma'$ Konstanten. Setzen wir aus (5) den Wert für $\Phi_0$ ein, so erhalten wir folgenden Ausdruck für $\Phi'$:

$$\Phi' = \tau\Phi - \frac{W}{EI}(\chi + xy^2) - \beta x + \alpha y + \gamma'.$$

Die Verschiebung $w$ ist damit bestimmt. Führen wir den Wert von $\Phi'$ in

die Gleichungen für $\partial u/\partial z$ und $\partial v/\partial z$ ein, so bekommen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau y + \frac{W}{EI}\{lz - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}\sigma(x^2 - y^2)\} + \beta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \tau x - \sigma\frac{W}{EI}xy - \alpha.$$

Aus den Gleichungen für $\partial u/\partial x$ und $\partial u/\partial z$ erhalten wir für $u$ folgenden Ausdruck:

$$u = -\tau yz + \frac{W}{EI}[\tfrac{1}{2}l(z^2 + \sigma x^2) - \tfrac{1}{2}z\sigma(x^2 - y^2) - \tfrac{1}{6}z^3] + \beta z + F_1(y),$$

wo $F_1(y)$ eine unbekannte Funktion von $y$. Ebenso finden wir für $v$ folgenden Ausdruck:

$$v = \tau zx + \frac{W}{EI}\sigma(l - z)xy - \alpha z + F_2(x),$$

wo $F_2(x)$ eine unbekannte Funktion von $x$. Da $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0$, so genügen die Funktionen $F_1$, $F_2$ der Gleichung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sigma\frac{W}{EI}ly = 0;$$

demnach müssen wir haben

$$F_1(y) = -\tfrac{1}{2}\sigma\frac{W}{EI}ly^2 - \gamma y + \alpha', \quad F_2(x) = \gamma x + \beta',$$

wo $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma$ Integrationskonstanten.

Für die Verschiebung haben wir somit folgenden Wert gefunden:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\tau yz + \frac{W}{EI}[\tfrac{1}{2}(l-z)\sigma(x^2-y^2) + \tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3] - \gamma y + \beta z + \alpha',\\
v &= \tau zx + \frac{W}{EI}\sigma(l - z)xy + \gamma x - \alpha z + \beta',\\
w &= \tau\Phi - \frac{W}{EI}[x(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + \chi + xy^2] - \beta x + \alpha y + \gamma',
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ Integrationskonstanten. Diese Gleichungen liefern die allgemeinste mögliche Form für die Verschiebung $(u, v, w)$, wenn die Spannung durch die in § 228 aufgestellten Bedingungen bestimmt ist.

Diejenigen Terme von (12), die $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ enthalten, stellen eine Verschiebung dar, wie sie bei einem starren Körper möglich ist, und diese Konstanten selbst sind aus den Befestigungsbedingungen im Koordinatenanfang zu bestimmen. (Vgl. § 18.)

Wir haben vorausgesetzt, daß der Ursprung fest ist, und haben daher $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$. Im allgemeinen werden wir annehmen, daß die additiven Konstanten in den Ausdrücken für $\Phi$ und $\chi$ so bestimmt sind, daß diese Funktionen im Ursprung verschwinden. Dann haben wir auch $\gamma' = 0$.

Außer dem Punkt wollen wir ein durch ihn gehendes Linienelement festhalten. Wir nehmen an, dasjenige Linienelement, das im ungespannten Zustand in die $y$-Achse fällt, behalte seine ursprüngliche Richtung bei. Wir haben dann $\alpha = 0$, $\gamma = 0$.

Außer dem Punkt und dem von ihm auslaufenden Linienelement wollen wir ein durch das letztere hindurchgehendes Flächenelement festhalten. Der Wert der Konstanten $\beta$ hängt von der Wahl dieses Elementes ab. Wählen wir das dem Querschnitt angehörende Flächenelement, so müssen wir im Ursprung $\partial w/\partial x = 0$ haben. Wählen wir das in die neutrale Ebene (d. h. die Ebene $x = 0$) fallende Flächenelement, so müssen wir im Ursprung $\partial u/\partial z = 0$ haben. Im ersteren Fall bleibt das den Schwerpunkt enthaltende Element des Querschnittes am befestigten Ende vertikal, im letzteren Falle bleibt das die Zentrallinie enthaltende Flächenelement am befestigten Ende horizontal. Es liegt kein Grund für die Annahme vor, daß in praktischen Fällen stets eine dieser Bedingungen zutrifft; höchstwahrscheinlich sind die Werte von $\beta$ für verschiedene besondere Fälle den Umständen nach verschieden.

## § 231. Lösung des Biegungsproblems für verschiedene Berandungen.

Wir wollen jetzt zeigen, wie sich die Funktion $\chi$ aus der Gleichung (6) und der Bedingung (7) bestimmt, wenn der Querschnitt des Balkens gewisse spezielle Randformen besitzt. Die Konstante, die zu $\chi$ hinzugefügt werden kann, werden wir im allgemeinen so wählen, daß $\chi$ im Ursprung verschwindet.

a) *Der Kreis.*

Die Gleichung der Randkurve ist $x^2 + y^2 = a^2$. Ausgedrückt in Polarkoordinaten $(r, \theta)$ lautet die Randbedingung auf $r = a$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = -a^2 \cos\theta \left\{\tfrac{1}{2}\sigma \cos^2\theta + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)\sin^2\theta\right\} - a^2 \sin\theta \left\{(2+\sigma)\sin\theta\cos\theta\right\}$$

oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = -\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sigma\right) a^2 \cos\theta + \tfrac{3}{4} a^2 \cos 3\theta.$$

Da $\chi$ innerhalb des Kreises $r = a$ eine ebene harmonische Funktion, so haben wir

$$\chi = -\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sigma\right) a^2 r \cos\theta + \tfrac{1}{4} r^3 \cos 3\theta$$

oder

$$\chi = -\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sigma\right) a^2 x + \tfrac{1}{4}(x^3 - 3xy^2). \tag{13}$$

b) *Konzentrische Kreise.*

Der Balken hat die Form eines Rohrs. Ist $a_0$ der Radius des äußeren Kreises und $a_1$ der des inneren, so können wir beweisen, daß $\chi$ die Form hat

$$\chi = -\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sigma\right) \left\{(a_0^2 + a_1^2)r + \frac{a_0^2 a_1^2}{r}\right\} \cos\theta + \tfrac{1}{4} r^3 \cos 3\theta + \text{const.} \tag{14}$$

In diesem Falle können wir die additive Konstante nicht so wählen, daß $\chi$ im Ursprung verschwindet; doch liegt hier der Ursprung in dem Hohlraum des Rohrs.

c) *Die Ellipse.*

Die Gleichung der Randkurve ist $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Wir führen die konjugierten Funktionen $\xi$, $\eta$ mittels der Relation

$$x + iy = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \cosh(\xi + i\eta)$$

ein und bezeichnen $\left|\frac{d(\xi + i\eta)}{d(x + iy)}\right|$ mit $h$. Der Wert von $h$ in einem Randpunkte ist $p/ab$, wo $p$ das vom Mittelpunkt auf die Tangente in diesem Punkte gefällte Lot. Die Randbedingung läßt sich schreiben

$$h\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = -\frac{px}{a^2}\left\{\tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)\,y^2\right\} - \frac{py}{b^2}(2 + \sigma)\,xy$$

oder

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = -b\cos\eta\,\left\{\tfrac{1}{2}\sigma a^2\cos^2\eta + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)\,b^2\sin^2\eta\right\}$$
$$- a\sin\eta\,(2 + \sigma)\,ab\sin\eta\cos\eta,$$

oder endlich

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = -\left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}\sigma)\,a^2b + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^3\right]\cos\eta$$
$$+ \left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\sigma)\,a^2b + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^3\right]\cos 3\eta.$$

Somit erhalten wir

$$\chi = -\left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}\sigma)\,a^2b + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^3\right]\frac{\cosh\xi}{\sinh\xi_0}\cos\eta$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\sigma)\,a^2b + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^3\right]\frac{\cosh 3\xi}{\sinh 3\xi_0}\cos 3\eta,$$

wo $\xi_0$ den Wert von $\xi$ auf dem Rande bezeichnet, sodaß

$$(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\cosh\xi_0 = 0, \qquad (a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\sinh\xi_0 = b.$$

Nun haben wir

$$(x + iy)^3 = (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}\,\tfrac{1}{4}\left\{\cosh 3(\xi + i\eta) + 3\cosh(\xi + i\eta)\right\},$$

sodaß

$$4\frac{x^3 - 3xy^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{x}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = \cosh 3\xi\cos 3\eta.$$

Ferner haben wir

$$\sinh 3\xi_0 = 4\sinh^3\xi_0 + 3\sinh\xi_0.$$

Somit erhalten wir

$$\chi = -\left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}\sigma)\,a^2 + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^2\right]x$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left[(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\sigma)\,a^2 + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\sigma)\,b^2\right]\frac{4(x^3 - 3xy^2) - 3x(a^2 - b^2)}{3a^2 + b^2}$$

oder

$$\chi = -\frac{a^2\{2(1+\sigma)a^2+b^2\}}{3a^2+b^2}x + \frac{1}{3}\frac{2a^2+b^2+\frac{1}{2}\sigma(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}(x^3-3xy^2). \quad (15)$$

Bei den obigen Entwicklungen sind wir so verfahren, wie wenn $a > b$ wäre; man übersieht aber leicht, daß das Schlußresultat auch gilt, wenn $b > a$. Im Falle $b = a$ kommen wir auf die bereits gefundene Lösung für den Kreis zurück.

d) *Konfokale Ellipsen.*

Eine ähnliche Rechnung wie die obige führt zur Lösung des Problems für einen Querschnitt, der von zwei konfokalen Ellipsen begrenzt ist. In $x$ und $y$ würde sich das Resultat nicht rational ausdrücken lassen. Sind $\xi_0$ und $\xi_1$ die Werte von $\xi$, die dem äußeren und dem inneren Rande entsprechen, und setzen wir $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}} = c$, so können wir zeigen, daß

$$\begin{aligned}\chi = c^3 \cos\eta\,[(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\sigma)\cosh\xi \\ -(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\sigma)\{\cosh\xi_0\cosh\xi_1\cosh(\xi_0+\xi_1)\cosh\xi \\ -\sinh\xi_0\sinh\xi_1\sinh(\xi_0+\xi_1)\sinh\xi\}] \\ + c^3\cos 3\eta\,[\tfrac{1}{16}\cosh 3\xi \\ -(\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\sigma)\frac{\sinh\xi_0\cosh 3(\xi-\xi_1)-\sinh\xi_1\cosh 3(\xi_0-\xi)}{3\sinh 3(\xi_0-\xi_1)}]. \quad (16)\end{aligned}$$

e) *Das Rechteck.*

Die Gleichungen der Ränder sind $x = \pm a$, $y = \pm b$. Die Randbedingung auf $x = \pm a$ ist

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = -\{\tfrac{1}{2}\sigma a^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\}, \qquad (b > y > -b).$$

Die Randbedingung auf $y = \pm b$ ist

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} = \mp(2+\sigma)bx, \qquad (a > x > -a).$$

Wir führen eine neue Funktion $\chi'$ durch die Gleichung

$$\chi' = \chi - \tfrac{1}{3}(2+\sigma)(x^3-3xy^2) \quad (17)$$

ein. Dann ist $\chi'$ innerhalb des Rechtecks eine ebene harmonische Funktion, $\partial\chi'/\partial y$ verschwindet auf $y = \pm b$, und die Bedingung auf $x = \pm a$ lautet

$$\frac{\partial\chi'}{\partial x} = -(1+\sigma)a^2 + \sigma y^2.$$

Nun läßt sich die Funktion $y^2$ im Intervall $b > y > -b$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{4b^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Demnach kann $\chi'$ in der Form ausgedrückt werden

$$\chi' = \{-(1+\sigma)a^2 + \tfrac{1}{3}\sigma b^2\}x + \sigma\frac{4b^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^3}\frac{\sinh\frac{n\pi x}{b}}{\cosh\frac{n\pi a}{b}}\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (18)$$

und $\chi$ kann dann mit Hilfe von (17) und (18) hingeschrieben werden.

f) *Weitere Resultate.*

Die Resultate für den Kreis und die Ellipse ordnen sich ein in die Formel

$$\chi = Ax + B(x^3 - 3xy^2);$$

die Lösung für die Ellipse wurde ursprünglich so gefunden, daß die Konstanten $A$ und $B$ dieser Formel geeignet gewählt wurden, und mehrere andere Beispiele für dies Verfahren wurden von Saint-Venant behandelt. Von den Querschnitten, für die das Problem mittels dieser Formel gelöst ist, erwähnen wir denjenigen, dessen Randkurve durch die Gleichung gegeben ist

$$y = \pm b\,|(1 - x^2/a^2)^{\sigma}|, \quad (a > x > -a).$$

Die entsprechende Funktion $\chi$ ist

$$\chi = -a^2x + \tfrac{1}{3}(1 - \tfrac{1}{2}\sigma)(x^3 - 3xy^2).$$

Für $\sigma = \frac{1}{4}$ geht obige Gleichung über in $x^2/a^2 + y^4/b^4 = 1$. Die Kurve ist in Fig. 26 für den Fall, wo $a = 2b$, dargestellt. Ein anderes Beispiel liefert die Formel[1])

$$\chi = -a^2x + \tfrac{1}{6}(2+\sigma)(x^3 - 3xy^2);$$

dieselbe löst das Problem für einen Querschnitt, der von zwei Bogenstücken der Hyperbel $x^2(1+\sigma) - y^2\sigma = a^2$ und zwei geraden Linien $y = \pm a$ begrenzt wird. Der Querschnitt ist in Fig. 27 dargestellt; $\sigma$ ist dabei gleich $\frac{1}{4}$ angenommen.

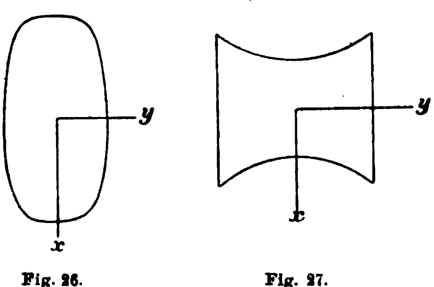


Fig. 26. Fig. 27.

## § 232. Analyse der Verschiebung.

a) *Krümmung der verzerrten Zentrallinie.*

Die Zentrallinie des Balkens wird zu einer Kurve gebogen, deren Krümmungen in der $(x, z)$-Ebene und in der $(y, z)$-Ebene sich mit hinreichender Annäherung durch die Werte von $\partial^2 u/\partial z^2$ und $\partial^2 v/\partial z^2$ für $x = y = 0$ ausdrücken. Diese Größen berechnen sich aus den Ausdrücken für die Verzerrungskomponenten mittels der Formeln

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial y};$$

1) Grashof, *Elastizität und Festigkeit*, p. 246.

wir können sie auch aus den Gleichungen (12) berechnen. Wir finden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{W(l-z)}{EI}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Daraus folgt, daß die Ebene der Kurve, zu der sich die Zentrallinie biegt, die $(x, z)$-Ebene ist und daß der Krümmungsradius $R$ in jedem Punkte gleich $EI/W(l-z)$ ist. Der Nenner dieses Ausdrucks ist das Biegungsmoment, das wir mit $M$ bezeichnen; die Krümmung $1/R$ der Zentrallinie ist daher mit dem Biegungsmoment $M$ durch die Gleichung

$$M = EI/R \tag{19}$$

verknüpft, und die Krümmung in einem bestimmten Punkt ist dieselbe, wie wenn der Balken durch Kräftepaare an den Enden gebogen würde, deren Betrag gleich dem Werte von $M$ in diesem Punkte ist.

b) *Neutrale Ebene.*

Die Dehnung einer Längsfaser ist durch die Gleichung gegeben:

$$e_{zz} = -x/R. \tag{20}$$

Daraus folgt, daß Fasern, die in der Ebene $x = 0$ liegen, weder Dehnung noch Verkürzung erleiden; mit anderen Worten, diese Ebene ist eine „neutrale Ebene". Die Dehnung oder Verkürzung eines longitudinalen Linienelementes bestimmt sich aus dem Abstand von der neutralen Ebene und aus der Krümmung der Zentrallinie nach genau derselben Regel wie im Falle der Biegung durch Kräftepaare an den Enden.

c) *Schiefstellung der verzerrten Querschnitte.*

Die verzerrte Zentrallinie läuft nicht rechtwinklig zu den verzerrten Querschnitten; vielmehr hat der Kosinus des Winkels, unter dem sie von diesen geschnitten wird, in jedem Punkte der Zentrallinie den Wert der Verzerrungskomponente $e_{zx}$. Wir wollen ihn mit $s_0$ bezeichnen. Dann haben wir

$$s_0 = \frac{\text{Schubspannung im Schwerpunkt}}{\text{Steifigkeit des Materials}}, \tag{21}$$

und wir können $s_0$ mittels der Formel berechnen

$$s_0 = -(W/EI)\,(\partial\chi/\partial x)_0, \tag{22}$$

wo das Suffix 0 anzeigt, daß $x$ und $y$ nach Ausführung der Differentiation durch null zu ersetzen sind.

Die Größe $s_0$ ist eine kleine Konstante, sodaß alle verzerrten Querschnitte die verzerrte Zentrallinie unter demselben Winkel $\frac{1}{2}\pi - s_0$ schneiden. Die gegenseitige Lage der verzerrten Zentrallinie und eines ursprünglich vertikalen Linienelements ist in Fig. 14, § 95, veranschaulicht.

Steht am befestigten Ende das durch den Schwerpunkt des verzerrten Querschnitts gehende Flächenelement vertikal, so ist die Konstante $\beta$ in dem durch (12) gegebenen Ausdruck für die Verschiebung gleich $s_0$.[1])

Ist die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ die Randkurve, so finden wir

$$s_0 = \frac{4\,W}{E\pi ab}\,\frac{2\,a^2(1+\sigma)+b^2}{3\,a^2+b^2}.$$

Wollte man in (21) die Schubspannung im Schwerpunkt durch die mittlere Schubspannung $(W/\pi ab)$ ersetzen, so würde sich der für $s_0$ berechnete Wert in einem zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ liegenden Verhältnis zu klein ergeben; der Wert $\frac{3}{4}$ entspricht dem Fall, daß $a$ groß ist gegen $b$, der Wert $\frac{5}{8}$ dem Fall, daß $b$ groß ist gegen $a$.[2])

Handelt es sich um einen rechteckigen Querschnitt, so finden wir

$$s_0 = \frac{3\,W(1+\sigma)}{4\,Eab}\left[1 - \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cosh\frac{n\pi a}{b}}\right\}\right]. \tag{23}$$

Für den Ausdruck in der eckigen Klammer hat Saint-Venant eine Tabelle entworfen, wobei $\sigma = \frac{1}{4}$ gesetzt ist; nachstehend die Resultate:

| $a/b$ | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wert des Klammerausdrucks | 0,676 | 0,849 | 0,907 | 0,94 | 0,962 | 0,971 | 0,983 | 0,989 | 0,993 |

d) *Durchbiegung.*

Als „Durchbiegung" („Biegungspfeil", engl. „deflexion") des Balkens bezeichnen wir die Verschiebung eines Punktes der Zentrallinie in der Richtung der Last, also den Wert von $u$ für $x = y = 0$. Setzen wir sie gleich $\xi$, so haben wir

$$\xi = \frac{W}{EI}\left(\tfrac{1}{2}\,z^2 l - \tfrac{1}{6}\,z^3\right) + \beta z. \tag{24}$$

Die Gleichung

$$EI\frac{d^2\xi}{dz^2} = W(l-z), \tag{25}$$

die die Proportionalität des Biegungsmoments mit der Krümmung ausdrückt, würde zur Bestimmung der Durchbiegung genügen, wenn die Richtung der verzerrten Zentrallinie im Ursprung bekannt wäre. Die Gleichung (24) stellt das Integral von (25) dar, wenn die Bedingung eingeführt wird, daß $\xi$ mit $z$ verschwindet. Das Glied $\beta z$ in (24) hängt von der Art der Befestigung ab, wie am Schlusse von § 230 auseinandergesetzt wurde; der andere Term hängt vom Biegungsmoment ab.

---

1) In Saint-Venants Abhandlung ist $\beta$ mit $s_0$ identifiziert.

2) Diese Zahlenwerte erhält man, wenn man $\sigma = \frac{1}{4}$ setzt.

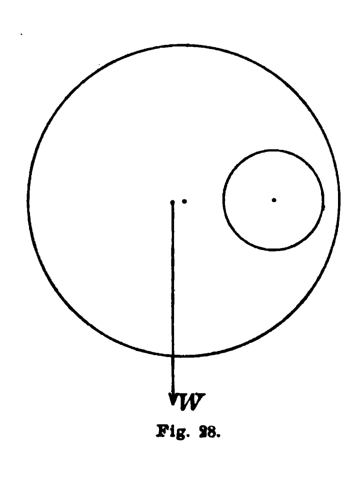


Fig. 28.

e) *Drall.*

Die die Konstante $\tau$ enthaltenden Glieder von (11) zeigen an, daß der Balken durch die Last gedrillt wird. Der Betrag des Dralls kann erst bestimmt werden, wenn die Funktionen $\Phi$ und $\chi$ gefunden sind. In jedem der von uns gelösten besonderen Fälle verschwindet $\tau$. Es liegt dies an der Symmetrie der betrachteten Querschnitte. Ein Beispiel unsymmetrischer Querschnittsform, bei dem die Integration sich durchführen läßt, liefert der in Fig. 28 dargestellte Fall eines Rohrs mit exzentrisch gelegenem Hohlraum. [Vgl. § 222, 3).]

f) *Antiklastische Krümmung.*

Diejenigen Glieder in den Formeln (12) für $u, v$, die von $x, y$, aber nicht von $z$ abhängen, stellen Gestaltänderungen der Querschnitte in ihrer eigenen Ebene dar. Diese Änderungen sind von derselben Art wie die in § 88 beschriebenen. Daraus folgt, daß die neutrale Ebene zu einer antiklastischen Fläche deformiert wird. Die verzerrte Zentrallinie ist eine der Krümmungslinien dieser Fläche; die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte liegen unterhalb der neutralen Ebene, und die entsprechenden Krümmungsradien drücken sich aus durch $EI/W(l-z)$. Der andere Krümmungsmittelpunkt der Fläche für irgend einen Punkt der Zentrallinie liegt oberhalb der neutralen Ebene; und der entsprechende Krümmungsradius ist gegeben durch $EI/\sigma W(l-z)$.

g) *Verwölbung der Querschnitte.*

Der Ausdruck für $w$ läßt sich schreiben

$$w = \tau\Phi - \frac{W}{EI}x(lz - \tfrac{1}{2}z^2) - \beta x + s_0 x - \frac{W}{EI}\left[\chi - x\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 + xy^2\right]. \quad (26)$$

Der Term $\tau\Phi$ entspricht der Drillung des Balkens durch die Last; er stellt, wie wir wissen, eine Verzerrung der Querschnitte zu krummen Flächen dar. Die Glieder $-x\{W(lz - \frac{1}{2}z^2)/EI + \beta\}$ stellen eine Verschiebung dar, durch die die Querschnitte zur verzerrten Zentrallinie senkrecht gestellt werden. Der Term $s_0 x$ bedeutet eine Verschiebung, durch die jeder Querschnitt durch einen Winkel $s_0$ gegen die Zentrallinie zurückgedreht wird, wie oben unter c) erläutert wurde. Die übrigen Glieder, welche $W/EI$ enthalten, stellen eine Verzerrung der Querschnitte zu krummen Flächen unabhängig von der durch $\tau\Phi$ gegebenen Verwölbung dar. Konstruieren wir die Fläche, die durch die Gleichung

$$z = -\frac{W}{EI}\left\{\chi - x\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 + xy^2\right\} + \tau\Phi \tag{27}$$

gegeben ist, und legen sie so, daß ihre Tangentialebene im Ursprung sich mit der Tangentialebene eines verzerrten Querschnitts deckt, so fällt der verzerrte Querschnitt mit dieser Fläche zusammen.

Im Falle einer kreisförmigen Begrenzung hat die rechte Seite von (27) den Wert

$$-(W/E\pi a^4)\, x\,(x^2 + y^2),$$

und die Höhenlinien des verzerrten Querschnitts finden wir, wenn wir diesen Ausdruck gleich einer Konstanten setzen. Einige dieser Linien sind in Fig. 29 gezeichnet.

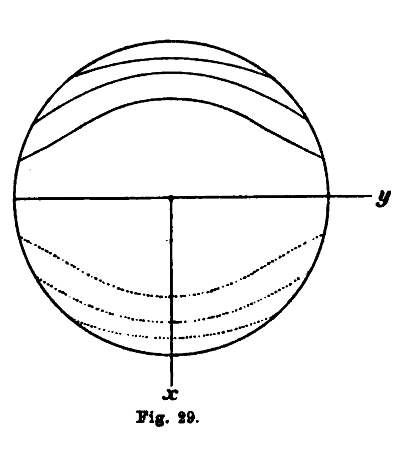


Fig. 29.

## § 233. Verteilung der Schubspannung.

Die Bedeutung der Transversalkomponente $Y_z$ der auf die Querschnitte wirkenden Tangentialspannung erkennen wir deutlich im Falle der elliptischen Begrenzung. Wenn $a$ groß ist gegen $b$, so ist der Maximalwert von $Y_z$ klein gegen den von $X_z$; nimmt das Verhältnis von $b$ zu $a$ zu, so wächst auch das Verhältnis des Maximalwertes von $Y_z$ zu dem von $X_z$; und wenn $b$ groß ist gegen $a$, ist der Maximalwert von $Y_z$ groß gegen den von $X_z$. Die Bedeutung von $Y_z$ wächst also in dem Maße, wie die Gestalt des Balkens der eines Brettes sich nähert.

Wir können die Verteilung der Tangentialspannung auf die Querschnitte graphisch darstellen, indem wir Kurven von der Eigenschaft zeichnen, daß ihre Tangenten in jedem Punkt in die Richtung der an dieser Stelle wirkenden Tangentialspannung fallen. Wie in § 219 können wir diese Kurven „Schubspannungslinien" nennen. Die Differentialgleichung der Kurvenschar ist

$$dx/X_z = dy/Y_z \tag{28}$$

oder

$$\left\{\frac{\partial \chi}{\partial y} + (2+\sigma)\,xy\right\}dx - \left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\,\sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\,\sigma)\,y^2\right\}dy = 0.$$

Da $\partial X_z/\partial x + \partial Y_z/\partial y$ nicht gleich null ist, so wird die Größe der Schubspannung *nicht* durch die Dichte benachbarter Kurven der Schar gemessen.

Wir betrachten beispielsweise den Fall der elliptischen Begrenzung. Die Differentialgleichung ist

$$xy\,dx\left[\frac{(4+\sigma)a^2+(2-\sigma)b^2}{3a^2+b^2}-(2+\sigma)\right]=\left[\frac{a^2}{3a^2+b^2}\{2a^2(1+\sigma)+b^2\}\right.$$
$$\left.-\frac{x^2-y^2}{3a^2+b^2}\{(2+\tfrac{1}{2}\sigma)a^2+(1-\tfrac{1}{2}\sigma)b^2\}-\tfrac{1}{2}\sigma(x^2-y^2)-y^2\right]dy;$$

wir können sie auch in folgender Form schreiben:

$$2x\frac{dx}{dy}\{(1+\sigma)a^2+\sigma b^2\}-\frac{x^2}{y}\{2(1+\sigma)a^2+b^2\}$$
$$+\frac{a^2}{y}\{2(1+\sigma)a^2+b^2\}-y(1-2\sigma)a^2=0.$$

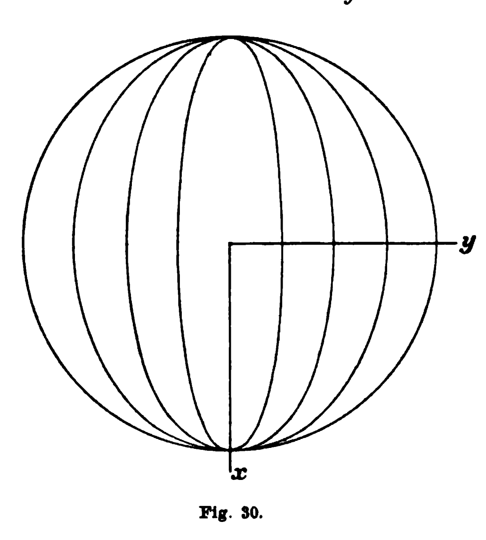


Fig. 30.

Diese Gleichung hat den integrierenden Faktor

$$y^{-\frac{2(1+\sigma)a^2+b^2}{(1+\sigma)a^2+\sigma b^2}},$$

und die vollständige Lösung läßt sich in der Form ausdrücken

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=Cy^{\frac{2(1+\sigma)a^2+b^2}{(1+\sigma)a^2+\sigma b^2}},$$

wo $C$ eine willkürliche Konstante. Da $\sigma<\frac{1}{2}$, so berühren alle Kurven der Schar die elliptische Begrenzung im höchsten und tiefsten Punkte $(\pm a, 0)$. Der Fall einer kreisförmigen Begrenzung ist in den vorliegenden eingeschlossen, und die Schubspannungslinien sind in diesem Fall gegeben durch die Gleichung

$$a^2-x^2-y^2=Cy^{\frac{3+2\sigma}{1+2\sigma}}.$$

Einige dieser Kurven sind in Fig. 30 gezeichnet; dabei ist $\sigma=\frac{1}{4}$ gesetzt.

## § 234. Verallgemeinerungen der vorstehenden Theorie.

a) *Unsymmetrische Belastung.*

Wenn die Last $W'$ statt zur $x$-Achse, zur $y$-Achse parallel gerichtet ist, so kommen wie früher die Spannungskomponenten $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ in Frage, und diese sind gegeben durch die Gleichungen

$$X_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)-\frac{W'}{2(1+\sigma)I'}\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial x}+(2+\sigma)xy\right\},$$
$$Y_z=\mu\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)-\frac{W'}{2(1+\sigma)I'}\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\sigma y^2+(1-\tfrac{1}{2}\sigma)x^2\right\},$$
$$Z_z=-\frac{W'(l-z)y}{I},$$

wo $I'$ das über den Querschnitt erstreckte Integral $\iint y^2 dx dy$ bedeutet und $\chi'$ eine ebene harmonische Funktion ist, die der Randbedingung genügt

$$\frac{\partial \chi'}{\partial \nu} = -(2+\sigma)xy\cos(x,\nu) - \left\{\tfrac{1}{2}\sigma y^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)x^2\right\}\cos(y,\nu). \quad (29)$$

Die Konstante $\tau$ wird wie früher so gewählt, daß die Spannungen über einen Querschnitt kein Kräftepaar um die $z$-Achse ergeben. Abgesehen von einer Verschiebung, wie sie bei einem starren Körper möglich ist, ist die Verschiebung durch folgende Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + \frac{W'}{EI'}\sigma(l-z)xy, \\ v &= \tau zx + \frac{W'}{EI'}\left\{\tfrac{1}{2}(l-z)\sigma(y^2-x^2) + \tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3\right\}, \\ w &= \tau\Phi - \frac{W'}{EI'}\left\{y(lz-\tfrac{1}{2}z^2) + \chi' + yx^2\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Wenn die Richtung der Last mit keiner der Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Querschnitts zusammenfällt, so zerlegen wir die angreifende Last $P$ in zwei zu den Achsen parallele Komponenten $W$ und $W'$. Dann erhalten wir die Lösung, indem wir die in § 229 und § 230 abgeleitete Lösung mit der hier angegebenen kombinieren. Lassen wir die in einem starren Körper möglichen Verschiebungen weg, so ergeben sich aus (12) und (30) die Gleichungen der verzerrten Zentrallinie in folgender Form:

$$x = \frac{W}{EI}(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3), \quad y = \frac{W'}{EI'}(\tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3);$$

sie ist daher eine ebene Kurve, und zwar liegt sie in der Ebene

$$W'x/I' = Wy/I.$$

Die neutrale Ebene bestimmt sich durch die Gleichung $e_{zz} = 0$; da nun

$$e_{zz} = -\frac{W}{EI}(l-z)x - \frac{W'}{EI'}(l-z)y,$$

so ist sie dargestellt durch

$$Wx/I + W'y/I' = 0.$$

Die neutrale Ebene liegt somit senkrecht zur Biegungsebene. Die Lastebene ist durch die Gleichung $y/x = W'/W$ gegeben. Da $I$ und $I'$ die Trägheitsmomente des Querschnitts, bezogen auf die $y$-Achse bezw. auf die $x$-Achse, so läßt sich das Ergebnis in folgender Form aussprechen: Die Spuren der Lastebene und der neutralen Ebene auf dem Querschnitt sind konjugierte Durchmesser der Zentralellipse des Querschnitts.[1])

1) Diesen Satz sprach Saint-Venant in seiner Abhandlung über die Torsion vom Jahre 1855 aus.

b) *Zusammengesetzte Verzerrung.*

Die Lösung des Problems der Biegung eines Balkens durch ein Kräftepaar, das am freien Ende um eine beliebige Achse in der Ebene seines Querschnitts wirkt, können wir mittels der in § 87 gegebenen Resultate hinschreiben; wir haben bloß die Lösungen für zwei Kräftepaare, die um die durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Hauptträgheitsachsen wirken, zu kombinieren. Indem wir die Lösungen für das Problem der Dehnung durch eine am Ende angreifende Zugkraft [§ 69 und § 70, h)], für den Fall der Torsion (Kap. XIV), der Biegung durch Kräftepaare und der Biegung durch eine am Ende angreifende Transversallast miteinander kombinieren, erhalten wir den Spannungs- und Verzerrungszustand in einem Balken, der durch Kräfte deformiert wird, die an den Enden allein angreifen und die statisch mit einer beliebigen Resultante und einem beliebigen resultierenden Moment gleichwertig sind. Bei allen diesen Lösungen verschwinden die mit $X_x$, $Y_y$, $X_y$ bezeichneten Spannungskomponenten.

Was die Biegungsfestigkeit von Balken anbetrifft, so kommen, wenn die linearen Abmessungen des Querschnitts klein sind im Vergleich zur Länge, von den Spannungskomponenten der longitudinale Zug und von den Verzerrungskomponenten die longitudinale Dehnung am meisten in Betracht; in jedem Falle finden sich die größten Werte auf den Querschnitten, denen das größte Biegungsmoment entspricht, und zwar in denjenigen Punkten derselben, die am weitesten von der neutralen Ebene entfernt sind. Die Sicherheitsbedingung für einen gebogenen Balken läßt sich in der Form aussprechen: Das maximale Biegungsmoment darf einen gewissen Grenzwert nicht überschreiten.

Von der Sicherheitsbedingung für ein gedrilltes Prisma war in § 220 die Rede. Die Größe, die in diesem Falle einen gewissen Grenzwert nicht übersteigen darf, ist der Schub; dieser ist im allgemeinen in denjenigen Punkten des Randes am größten, die der Zentrallinie am nächsten liegen. Wird der Balken gleichzeitig gebogen und gedrillt, so sind die von null verschiedenen Spannungskomponenten der von der Biegung herrührende longitudinale Zug $Z_z$ und die Schubspannungen $X_z$ und $Y_z$. Ist die Länge des Balkens groß gegen die linearen Abmessungen des Querschnitts, so können die Werte von $Z_z$ in der Nähe des Querschnitts $z = 0$ und diejenigen Glieder von $X_z$ und $Y_z$, die von der Drillung abhängen, von derselben Größenordnung sein; sie sind groß gegenüber denjenigen Gliedern von $X_z$ und $Y_z$, die von der Biegung herrühren. Für die Festigkeitsberechnung können wir also von den Schubspannungen und Schubverzerrungen, die von der Biegung herrühren, absehen und uns auf die aus der Drillung entspringenden Glieder beschränken.

In allen Fällen, wo die Spannungskomponenten $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ von null verschieden sind und $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden, ergeben sich die Hauptspannungen aus der Bemerkung, daß die Spannungsfläche die Form

$$z(2\,X_z x + 2\,Y_z y + Z_z z) = \text{const.}$$

hat, daß mithin eine Hauptspannungsebene in jedem Punkt mit der zur Zentrallinie parallelen Ebene zusammenfällt, die die Richtung der in

diesem Punkte resultierenden Tangentialspannung auf den Querschnitt enthält. Die Normalspannung auf diese Ebene verschwindet, und die Werte der beiden nicht verschwindenden Hauptspannungen sind

$$\tfrac{1}{2} Z_z \pm \tfrac{1}{2}[Z_z^2 + 4(X_z^2 + Y_z^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

Die Verzerrungsfläche hat in allen diesen Fällen die Form

$$\frac{1}{E}[-\sigma Z_z(x^2 + y^2 + z^2) + (1 + \sigma) z(2 X_z x + 2 Y_z y + Z_z z)] = \text{const.},$$

und die Hauptdehnungen sind gleich

$$-\frac{\sigma Z_z}{E}, \quad \frac{(1-\sigma) Z_z}{2E} \pm \frac{1+\sigma}{2E}[Z_z^2 + 4(X_z^2 + Y_z^2)]^{\frac{1}{2}}; \tag{32}$$

der erste Wert gibt die Dehnung einer Linie, die zu derjenigen Hauptspannungsebene senkrecht ist, auf die die Normalspannung verschwindet.

c) *Äolotropes Material.*

Das Problem von § 228 gestaltet sich nicht wesentlich verwickelter, wenn das Material des Balkens als äolotrop angenommen wird, vorausgesetzt, daß in jedem Punkt die zu den Hauptträgheitsebenen parallelen Ebenen zugleich Struktur-Symmetrieebenen sind. Die $(x, y, z)$-Achsen seien ebenso gewählt wie in § 228, und die Verzerrungsenergie-Funktion habe die Form

$$\tfrac{1}{2}(A, B, C, F, G, H)(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz})^2 + \tfrac{1}{2}(L e_{yz}^2 + M e_{zx}^2 + N e_{xy}^2).$$

Den Youngschen Modul des Materials für Zug in Richtung der $z$-Achse bezeichnen wir mit $E$, und die Poissonschen Konstanten, die bei Zug in Richtung der $z$-Achse den zur $x$- und zur $y$-Achse parallelen Verkürzungen entsprechen, bezeichnen wir mit $\sigma_1$ und $\sigma_2$. Wir nehmen ein Spannungssystem an, das durch die Gleichungen

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \quad Z_z = -\frac{W}{I}(l - z)x \tag{33}$$

beschränkt ist. Wir können dann zeigen, daß $X_z$ und $Y_z$ notwendig die Form haben

$$\left.\begin{aligned} X_z &= M\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right) - \frac{MW}{EI}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma_1 x^2 + \frac{E - M\sigma_1 - 2L\sigma_2}{2L} y^2\right], \\ Y_z &= L\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right) - \frac{LW}{EI}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{E - M\sigma_1}{L} xy\right], \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

wo $\Phi$ und $\chi$ Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung

$$\left(M\frac{\partial^2}{\partial x^2} + L\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_{\chi}^{\Phi} = 0$$

sind und bezüglich folgenden Randbedingungen genügen:

$$\cos(x, \nu) M\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \cos(y, \nu) L\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \cos(x, \nu) My - \cos(y, \nu) Lx,$$

$$\cos(x, \nu) M\frac{\partial\chi}{\partial x} + \cos(y, \nu) L\frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$= -\cos(x, \nu) M\left(\tfrac{1}{2}\sigma_1 x^2 + \frac{E - M\sigma_1 - 2L\sigma_2}{2L} y^2\right) - \cos(y, \nu)(E - M\sigma_1) xy.$$

Ferner können wir zeigen, daß die Verschiebung, die dem durch (33) und (34) ausgedrückten Spannungssystem entspricht, notwendig folgende Form hat:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau yz + \frac{W}{EI}\left[\tfrac{1}{2}(l-z)(\sigma_1 x^2 - \sigma_2 y^2) + \tfrac{1}{2} l z^2 - \tfrac{1}{6} z^3\right] - \gamma y + \beta z + \alpha' \\ v &= \tau z x + \frac{W}{EI}(l-z)\,\sigma_2 xy + \gamma x - \alpha z + \beta', \\ w &= \tau\Phi - \frac{W}{EI}\left[x\left(lz - \tfrac{1}{2}z^2\right) + \chi + \frac{E - M\sigma_1 - L\sigma_2}{2L} xy^2\right] \\ &\qquad - \beta x + \alpha y + \gamma'. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Wie in § 230 können wir $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ und $\alpha = \gamma = 0$ annehmen. Die Integrationskonstante $\tau$ kann so gewählt werden, daß die Spannung am belasteten Ende statisch gleichwertig ist mit einer Einzelkraft $W$, die im Schwerpunkt des Endquerschnitts in Richtung der $x$-Achse angreift. Die Resultate können in derselben Weise wie in § 232 gedeutet werden.

## § 235. Kritische Beleuchtung verschiedener Methoden.

a) In vielen Lehrbüchern der angewandten Mechanik [1]) wird die Schubspannung ohne Rücksicht auf die Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten einfach aus den Spannungsgleichungen des Gleichgewichts berechnet und zwar mittels gewisser Annahmen bezüglich der Verteilung der Tangentialspannung über den Querschnitt. Ist insbesondere der Querschnitt ein Rechteck und die Last eine zur $x$-Achse parallele Kraft $W$, so wird angenommen, 1) daß $Y_z$ gleich null ist, 2) daß $X_z$ von $y$ unabhängig ist. Die Bedingungen 1) und 2) von § 228, kombiniert mit diesen Annahmen, führen zu folgendem Spannungssystem:

$$X_x = Y_y = X_y = Y_z = 0, \quad X_z = \frac{W}{2I}\left(3\frac{I}{\omega} - x^2\right), \quad Z_z = -\frac{W}{I}(l-z)x, \quad (36)$$

wo $\omega$ der Flächeninhalt des Querschnitts und $I$ das Trägheitsmoment wie in der früheren Bezeichnung. Die resultierende Spannung $\iint X_z\,dx\,dy$ ist gleich $W$.

Wenn dies Spannungssystem zuträfe, so müßten Funktionen $u, v, w$ der Art existieren, daß

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma W}{EI}(l-z)x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{W}{2\mu I}\left(3\frac{I}{\omega} - x^2\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Wir haben nun die Identität

$$2\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

1) Siehe z. B. die Bücher von Rankine und Grashof, die in der *Einleitung* in den Fußnoten 91 und 95 angezogen wurden, sowie die Bücher von Ewing, Bach und Föppl, auf die in der Fußnote auf p. 133 verwiesen wurde.

diese Gleichung ist jedoch unvereinbar mit den obigen Werten für $\partial v/\partial y \ldots$; denn wenn wir diese Werte einsetzen, geht die linke Seite über in $-2\sigma W/EI$, und die rechte Seite wird gleich null. Daraus folgt, daß das durch (36) ausgedrückte Spannungssystem in einem isotropen festen Körper unmöglich ist.

Aus § 95 wissen wir bereits, daß das Spannungssystem (36) die *mittlere Spannung* über die Querschnittsbreite richtig darstellt und daher für die tatsächliche Spannung eine gute Annäherung liefert, falls die Breite klein ist gegenüber der Höhe. Inwieweit es von der tatsächlichen Spannung abweicht, ist aus der Tabelle in § 232, c) zu ersehen; für $s_0$ würde es nämlich den Faktor außerhalb der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (23) ergeben. Die Richtung der Tangentialspannung auf die Querschnitte gibt das System (36) ebenfalls nicht richtig wieder; denn nach ihm müßte diese Spannung überall vertikal sein, während sie in Wirklichkeit in der Nähe der oberen und unteren Kante nahezu horizontal ist.

b) Bei Ausdehnung dieser Methode auf nicht rechteckige Querschnitte wird man sich darüber klar[1]), daß die Schubspannungskomponente $Y_z$ ebensowohl wie $X_z$ vorhanden sein muß. Der zur Behandlung ausgewählte Fall betrifft einen Querschnitt, der zu einer vertikalen Achse symmetrisch ist. Es werden folgende Annahmen gemacht: 1) $X_z$ ist unabhängig von $y$; 2) die Resultanten von $X_z$ und $Y_z$ in allen Punkten $P'$, denen ein gegebener Wert von $x$ entspricht, schneiden sich in einem Punkte der $x$-Achse. Soll die Randbedingung (3) erfüllt sein, so muß dies der Punkt $T$ in Fig. 31 sein, in dem die durch $P$ gezogene Tangente der Randkurve des Querschnitts jene Achse trifft.



Fig. 31.

Um die Annahme 2) analytisch auszudrücken, führen wir die zu $P$ gehörige Ordinate $(NP) = \eta$ und die zu $P'$ gehörige Ordinate $y$ ein; dann ist

$$Y_z = \frac{y}{\eta}\frac{d\eta}{dx} X_z. \qquad (37)$$

Gleichung (2) geht über in

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} X_z + \frac{Wx}{I} = 0,$$

und die Lösung, die $X_z$ im höchsten Punkt $(x = -a)$ verschwinden läßt, lautet:

$$\eta X_z = -\frac{W}{I}\int_{-a}^{x} x\eta\, dx;$$

es ist leicht zu erkennen, daß diese Lösung $X_z$ auch im tiefsten Punkt verschwinden läßt.

---

1) Siehe insbesondere das bereits angezogene Lehrbuch von Grashof.

Das Spannungssystem, das sich mittels dieser Annahmen ergibt, drückt sich aus durch die Gleichungen

$$X_x = Y_y = X_y = 0, \quad X_z = -\frac{W}{\eta I}\int_{-a}^{x} x\eta\,dx, \quad Y_z = -\frac{Wy}{\eta^2 I}\frac{d\eta}{dx}\int_{-a}^{x} x\eta\,dx,$$

$$Z_z = -\frac{Wx(l-z)}{I}; \tag{38}$$

es befriedigt die Gleichgewichtsgleichungen und die Randbedingung und liefert den richtigen Wert $W$ für die Resultante der Tangentialspannungen auf den Querschnitt. Aber im allgemeinen stellt es, aus demselben Grunde wie beim Rechteck, ein mögliches Spannungssystem nicht dar, da nämlich die Kompatibilitätsbedingungen nicht erfüllt sind.

c) Diese Bedingungen führen, wie sich leicht zeigen läßt, zu folgender Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\eta^2}\frac{d\eta}{dx}\int_{-a}^{x} x\eta\,dx\right\} = \frac{\sigma}{1+\sigma}; \tag{39}$$

dieselbe bestimmt $\eta$ als Funktion von $x$ und damit diejenigen Querschnittsformen, für die das Spannungssystem (38) eine mögliche Verteilung darstellt. Um (39) zu integrieren, setzen wir

$$\int_{-a}^{x} x\eta\,dx = \xi, \tag{40}$$

dann genügt $\xi$ der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{\xi\xi''}{\xi'^2} - \frac{\xi}{\xi'}\right) = \frac{\sigma}{1+\sigma},$$

wo $\xi' = \frac{d\xi}{dx}$, $\xi'' = \frac{d^2\xi}{dx^2}$. Das vollständige Integral ist, wie sich zeigen läßt,

$$\xi = C\left\{(a'-x)^{\frac{2a'}{a+a'}}(x+a)^{\frac{2a}{a+a'}}\right\}^{1+\sigma},$$

wo $C$, $a$ und $a'$ willkürliche Konstanten. Eliminieren wir $\xi$ mittels der Relation (40), so sehen wir, daß die Gleichung der Randkurve die Form haben muß

$$\eta = \frac{C}{x}\frac{d}{dx}\left[(a'-x)^{\frac{2a'}{a+a'}}(x+a)^{\frac{2a}{a+a'}}\right]^{1+\sigma}. \tag{41}$$

Die Konstanten $a$ und $a'$ bezeichnen den Abstand des höchsten bezw. des tiefsten Kurvenpunktes von der durch den Schwerpunkt gehenden Horizontalen.

Nur wenn die Randkurve des Querschnitts eine von den Formen besitzt, die der Gleichung (41) entsprechen, ist die Spannung durch (38)

richtig dargestellt. Wir bemerken, daß im Falle eines zur $y$-Achse symmetrischen Querschnitts, für den also $a' = a$, die Gleichung (41) die Form $(\eta/b)^{1/\sigma} + x^2/a^2 = 1$ hat. In § 231, f) sahen wir, daß das Biegungsproblem für diesen Querschnitt lösbar ist; in Fig. 26 war die Kurve für den Fall $\sigma = \frac{1}{4}$ und $a = 2\,b$ gezeichnet.

d) Im Falle der elliptischen (oder kreisförmigen) Begrenzung würde die dargelegte Methode als Schubspannungslinien die Ellipsen ergeben, deren Achsenrichtungen mit denjenigen der Randkurve zusammenfallen und die diese Kurve im höchsten und tiefsten Punkte berühren. Fig. 30 zeigt, daß die richtigen Kurven in der Nähe dieses Punktes flacher verlaufen als jene Ellipsen. Bezüglich der Schiefstellung der verzerrten Querschnitte würde diese Methode für $s_0$ den Wert $8\,W(1+\sigma)/3\,E\pi ab$ liefern; dieser Wert ist annähernd richtig, wenn der Balken sehr schmal, d. h. $b$ klein gegen $a$ ist; dagegen ist er im Falle des Kreises um etwa $5\%$ und in dem Falle, wo $b$ groß ist gegen $a$, beinahe um $20\%$ zu klein.

e) Das Vorhandensein eines Gliedes von der Form $\beta z$ im Ausdruck für die Durchbiegung [§ 232, d)] ist den Verfassern technischer Lehrbücher nicht entgangen. Rankine (*loc. cit.*) nennt es „die von der Schubspannung herrührende zusätzliche Durchbiegung". Nach der am Schlusse von § 230 angestellten Erörterung bezüglich der Bedeutung der Konstanten $\beta$ scheint der Name nicht sehr glücklich gewählt zu sein.

f) Der Satz von § 120 wird zuweilen zur Bestimmung der zusätzlichen Durchbiegung benutzt.[1]) Derselbe ergibt die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\iint (X_z u + Y_z v + Z_z w)_{z=l}\,dx\,dy - \tfrac{1}{2}\iint (X_z u + Y_z v + Z_z w)_{z=0}\,dx\,dy$$
$$= \tfrac{1}{2}\iiint \big[\{X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(Y_y Z_z + \cdots)\}/E$$
$$+ (X_z^2 + Y_z^2 + X_y^2)/\mu\big]\,dx\,dy\,dz. \quad (42)$$

Wenn die Spannungen über die Endflächen den Formeln (1) und (8) entsprechend speziell festgesetzt sind, sodaß die Verschiebung durch (12) gegeben ist, so geht das erste Glied der rechten Seite von (42) über in $\frac{1}{6}\,W^2 l^3/EI + \frac{1}{2}\,W\beta l$, und das zweite Glied wird

$$-\tfrac{1}{2}\,W\beta l - \tfrac{1}{2}\iint \big[(X_z u + Y_z v)_{z=0}$$
$$- (Wlx/I)\,\{\sigma\Phi - W(\chi + xy^2)/EI\}\big]\,dx\,dy,$$

wo der Ausdruck unter dem Integrationszeichen von $\beta$ unabhängig ist. Die rechte Seite von (42) geht über in

$$\tfrac{1}{6}\,W^2 l^3/EI + \tfrac{1}{2}\,l\mu^{-1}\iint (X_z^2 + Y_z^2)\,dx\,dy$$

und ist ebenfalls von $\beta$ unabhängig. In diesem Falle scheitert also die

1) Siehe z. B. W. J. M. Rankine, *loc. cit.*, oder J. Perry, *Applied Mechanics* (London, 1899), p. 461.

Bestimmung der zusätzlichen Durchbiegung durch Gleichung (42). Wenn die Spannungen über die Endflächen nicht genau in Übereinstimmung mit (1) und (8) verteilt sind, so ist die Verschiebung im größten Teile des Balkens praktisch genommen von der durch (12) gegebenen Form; in der Nähe der Enden dagegen ist sie örtlichen Unregelmäßigkeiten unterworfen. Die linke Seite von (42) ist annähernd gleich $\frac{1}{2} W\delta$, wo $\delta$ die Durchbiegung am belasteten Ende, und die rechte Seite ist annähernd gleich $\frac{1}{6} W^2 l^3/EI$; um jedoch eine weitergehende Annäherung zu erhalten, müßten wir nicht nur $X_z$ und $Y_z$ im größten Teil des Balkens, sondern auch die Unregelmäßigkeit an den Enden kennen.

## Kapitel XVI.

### Die Biegung eines gleichförmig belasteten Balkens.

§ 236. In diesem Kapitel werden wir einige Probleme des Gleichgewichts eines zylindrisch geformten isotropen Körpers behandeln, indem wir besondere Beschränkungen bezüglich der Art der Spannungsverteilung einführen. Wir messen die $z$-Koordinate in der Längsrichtung des Zylinders und setzen an erster Stelle voraus, daß die Spannung von $z$ unabhängig ist, sodann, daß sie sich durch lineare Funktionen von $z$ ausdrückt, und schließlich, daß sie sich durch quadratische Funktionen von $z$ ausdrückt. Wir werden finden, daß die beiden ersten Annahmen zu Lösungen führen, zu denen wir schon in früheren Kapiteln gelangten[1]), daß aber die Voraussetzung eines quadratischen Gesetzes die Lösung des Problems der Biegung eines Balkens durch eine gleichmäßig über die Länge verteilte Last liefert.

### § 237. Gleichförmiger Spannungszustand entlang den Balken.

Die $z$-Achse falle in die Zentrallinie des Balkens, die $x$- und die $y$-Achse seien den durch die Schwerpunkte gehenden Hauptträgheitsachsen der Querschnitte parallel. Wir nehmen an, daß Massenkräfte nicht vorhanden sind und daß die zylindrische Begrenzung spannungsfrei ist. Wir untersuchen diejenigen Spannungszustände, bei denen die Spannungskomponenten von $z$ unabhängig sind.

Die Gleichgewichtsgleichungen nehmen die Form an

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0. \quad \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

und die Bedingungen an der zylindrischen Begrenzung lauten

$$\left.\begin{aligned} \cos(x, \nu)\, X_x + \cos(y, \nu)\, X_y = 0, \\ \cos(x, \nu)\, X_y + \cos(y, \nu)\, Y_y = 0, \\ \cos(x, \nu)\, X_z + \cos(y, \nu)\, Y_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1) Vgl. W. Voigt, *Göttinger Abhandlungen,* Bd. 34 (1887).

Die Kompatibilitätsbedingungen nehmen die Form an

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} = 0, \tag{3}$$

ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y}\right) = 0 \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{5}$$

Die Gleichungen (3) zeigen, daß $e_{zz}$ eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist, etwa

$$e_{zz} = \varepsilon - \varkappa x - \varkappa' y, \tag{6}$$

wo $\varepsilon$, $\varkappa$, $\varkappa'$ Kontsante. Wenn dies der Fall ist, führen die Gleichungen (1) und die Bedingungen (2) stets zu dem Schluß, daß $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß diese Gleichungen und Bedingungen das Bestehen der folgenden Relation erfordern:

$$\iint \left\{ X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v'}{\partial y} + X_y \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right\} dx\,dy = 0, \tag{7}$$

wo $u'$, $v'$ beliebige Funktionen von $x$ und $y$ bedeuten und die Integration über den Querschnitt erstreckt ist. In der Tat läßt sich die linke Seite derselben ohne weiteres überführen in

$$\int [\{ X_x \cos(x,\nu) + X_y \cos(y,\nu)\} u' + \{ X_y \cos(x,\nu) + Y_y \cos(y,\nu)\} v'] ds$$
$$- \iint \left\{ \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y}\right) u' + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y}\right) v' \right\} dx\,dy,$$

wo $ds$ das Bogenelement der Randkurve des Querschnitts. Wir setzen nun in Gleichung (7)

1) $u' = x$, $v' = 0$; dann finden wir $\iint X_x dx\,dy = 0$;

2) $u' = x^2$, $v' = 0$; dann finden wir $\iint x X_x dx\,dy = 0$;

3) $u' = xy$, $v' = -\frac{1}{2}x^2$; dann finden wir $\iint y X_x dx\,dy = 0$;

ebenso können wir beweisen, daß

$$\iint Y_y dx\,dy = 0, \quad \iint x Y_y dx\,dy = 0, \quad \iint y Y_y dx\,dy = 0.$$

Hieraus und aus (6) folgt

$$\iint X_x e_{zz} dx\,dy = 0, \quad \iint Y_y e_{zz} dx\,dy = 0.$$

Mögen andererseits $u'$, $v'$ in der Relation (7) die zur $x$- und zur $y$-Achse parallelen Komponenten der Verschiebung bedeuten, die den Spannungen $X_x, \ldots$ entspricht, dann geht (7) über in

$$\iint (X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + X_y e_{xy})\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Nun aber haben wir

$$X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} = -\sigma (X_x + Y_y) e_{zz}$$
$$+ E^{-1} (1+\sigma) \{(1-\sigma)(X_x^2 + Y_y^2) - 2\sigma X_x Y_y\}.$$

Das Integral des Gliedes $-\sigma (X_x + Y_y) e_{zz}$ verschwindet, und die quadratische Form $(1-\sigma)(X_x^2 + Y_y^2) - 2\sigma X_x Y_y$ ist positiv definit, da $\sigma < \frac{1}{2}$; ferner haben wir $X_y e_{xy} = \mu^{-1} X_y^2$. Somit ist der Ausdruck $X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + X_y e_{xy}$ notwendig positiv, und Gleichung (8) kann nur befriedigt werden, wenn $X_x$, $Y_y$, $X_y$ identisch verschwinden.

Daraus folgt, daß wir haben müssen

$$e_{xx} = -\sigma e_{zz}, \quad e_{yy} = -\sigma e_{zz}, \quad e_{xy} = 0, \tag{9}$$

wo $e_{zz}$ durch (6) gegeben ist; Gleichung (5) ist dann identisch erfüllt. Von den Gleichungen und Bedingungen verbleiben also noch die dritte der Gleichungen (1), die dritte der Bedingungen (2), die Gleichungen (4) und die Beziehungen $X_z = \mu e_{zx}$, $Y_z = \mu e_{yz}$. Aus ihnen folgern wir wie in § 229, daß die allgemeinste Form für $e_{zx}$, $e_{yz}$ lautet

$$e_{zx} = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \qquad e_{yz} = \tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right), \tag{10}$$

wo $\tau$ eine Integrationskonstante und $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt (§ 216).

Die Verzerrung ist durch die Gleichungen (6), (9), (10) ausgedrückt; mithin setzt sich der allgemeinste Verzerrungszustand, der 1) gleichförmigen Spannungszustand entlang den Balken ergibt, 2) nur an den Enden angreifende Kräfte voraussetzt, zusammen aus der mit einfachem longitudinalen Zug verbundenen Verzerrung (vgl. § 69), zwei einfachen Biegungen, denen die Krümmungen $\varkappa$ und $\varkappa'$ in der $(x, z)$- und in der $(y, z)$-Ebene entsprechen (vgl. § 87), und der Torsion $\tau$ wie in Kap. XIV.

Der Satz, den wir in diesem Paragraphen für isotrope Körper bewiesen haben, daß nämlich die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden müssen, wenn $e_{zz}$ in $x$ und $y$ linear ist und weder Oberflächenspannungen auf die zylindrische Begrenzung noch Massenkräfte wirken, gilt auch für äolotrope Körper, vorausgesetzt daß die $(x, y)$-Ebene für das Material eine Symmetrieebene darstellt.[1])

## § 238. Gleichförmig längs des Balken veränderliche Spannung.

Wir wählen die $(x, y, z)$-Achsen wie vorhin und behalten die Voraussetzungen bei, daß Massenkräfte nicht vorhanden sind und daß die zylindrische Begrenzung des Balkens spannungsfrei ist; wir untersuchen diejenigen Spannungszustände, bei denen die Spannungs- und

---

1) J. Boussinesq, *J. de Math. (Liouville)*, (Sér. 2), t. 16 (1871).

Verzerrungskomponenten lineare Funktionen von $z$ sind. Wir schreiben die Spannungs- und Verzerrungskomponenten in folgender Form

$$X_x = X_x^{(1)} z + X_x^{(0)}, \text{ usw.} \qquad e_{xx} = e_{xx}^{(1)} z + e_{xx}^{(0)}, \text{ usw.} \tag{11}$$

Die Gleichgewichtsgleichungen nehmen die Gestalt an

$$z\left(\frac{\partial X_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial y}\right) + \frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{dy} + X_z^{(1)} = 0, \text{ usw.} \tag{12}$$

Die Bedingungen an der zylindrischen Begrenzung werden

$$z\{\cos(x,\nu)\, X_x^{(1)} + \cos(y,\nu)\, X_y^{(1)}\} + \cos(x,\nu)\, X_x^{(0)} + \cos(y,\nu)\, X_y^{(0)} = 0, \text{ usw.} \tag{13}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten lauten

$$\left.\begin{aligned}
&z\frac{\partial^2 e_{zz}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial x} = 0, \qquad z\frac{\partial^2 e_{zz}^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial y} = 0,\\
&2z\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial y} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}
&z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}^{(0)}}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial e_{xx}^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}^{(1)}}{\partial x} = 0,\\
&z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}^{(0)}}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial e_{yy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}^{(1)}}{\partial y} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und

$$z\left(\frac{\partial^2 e_{yy}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}^{(1)}}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{\partial^2 e_{yy}^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}^{(0)}}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{16}$$

In allen diesen Gleichungen müssen die Glieder, die $z$ enthalten, und die von $z$ unabhängigen Glieder für sich verschwinden. Die Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten und den Verzerrungskomponenten nehmen die Gestalt an

$$E\,(e_{xx}^{(1)} z + e_{xx}^{(0)}) = X_x^{(1)} z + X_x^{(0)} - \sigma\,(Y_y^{(1)} z + Y_y^{(0)} + Z_z^{(1)} z + Z_z^{(0)}), \text{ usw.};$$

hierin sind die Glieder, die $z$ enthalten, und diejenigen, die von $z$ unabhängig sind, für sich einander gleich zu setzen.

Greifen wir zunächst die Glieder in $z$ heraus, so bemerken wir, daß alle Größen mit dem Index 1 denselben Gleichungen genügen wie die entsprechenden Größen in § 237. Daraus folgt, daß wir setzen können

$$\left.\begin{aligned}
&e_{zz}^{(1)} = \varepsilon_1 - \varkappa_1 x - \varkappa_1' y,\\
&e_{xx}^{(1)} = e_{yy}^{(1)} = -\sigma e_{zz}^{(1)}, \quad e_{xy}^{(1)} = 0,\\
&e_{xz}^{(1)} = \tau_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \quad e_{yz}^{(1)} = \tau_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right),
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wo $\varepsilon_1$, $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_1$ Konstante bedeuten und $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt.

Greifen wir andererseits die von $z$ unabhängigen Glieder heraus, so ergibt sich aus den beiden ersten der Gleichungen (12)

$$\iint \{x Y_z^{(1)} - y X_z^{(1)}\}\, dx dy$$
$$= \iint \left\{ y \left( \frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} \right) - x \left( \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{(0)}}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy$$
$$= \int y \{\cos(x, \nu) X_x^{(0)} + \cos(y, \nu) X_y^{(0)}\}$$
$$- x \{\cos(x, \nu) X_y^{(0)} + \cos(y, \nu) Y_y^{(0)}\}\, ds;$$

der letztere Ausdruck verschwindet gemäß den beiden ersten der Gleichungen (13).

Aus (17) folgt nun

$$\iint \{x Y_z^{(1)} - y X_z^{(1)}\}\, dx\, dy = \mu \tau_1 \iint \left\{ x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} dx\, dy,$$

wo das Integral rechter Hand der Koeffizient von $\mu$ in dem Ausdruck für die Drillungssteifigkeit des Balkens ist. Somit verschwindet $\tau_1$ [1]) und infolgedessen auch $X_z^{(1)}$ und $Y_z^{(1)}$.

Stellen wir in der dritten der Gleichungen (12) und der Bedingungen (13) die von $z$ unabhängigen Glieder heraus, so bekommen wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial X_z^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_z^{(0)}}{\partial y} + Z_z^{(1)} = 0$$

und die Randbedingung

$$X_z^{(0)} \cos(x, \nu) + Y_z^{(0)} \cos(y, \nu) = 0;$$

dieselben sind nur mit einander verträglich, wenn

$$\iint Z_z^{(1)} dx\, dy = 0.$$

Da $Z_z^{(1)} = E(\varepsilon_1 - \varkappa_1 x - \varkappa_1' y)$, so fordert diese Gleichung das Verschwinden von $\varepsilon_1$.

Wir können nun die Gleichungen (17) in folgender Form wieder hinschreiben

$$e_{zz}^{(1)} = -\varkappa_1 x - \varkappa_1' y, \quad e_{xx}^{(1)} = e_{yy}^{(1)} = -\sigma e_{zz}^{(1)}, \quad e_{yz}^{(1)} = e_{zx}^{(1)} = e_{xy}^{(1)} = 0. \qquad (18)$$

Da $X_z^{(1)}$ und $Y_z^{(1)}$ verschwinden, so finden wir, wenn wir in den ersten beiden der Gleichungen (12) und der Bedingungen (13) die von $z$ unabhängigen Glieder herausgreifen, daß $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $X_y^{(0)}$ verschwinden und daß $e_{zz}^{(0)}$ eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist. Wir können daher setzen

1) Dies ist übrigens evident; denn wenn $\tau_1$ nicht verschwände, würden wir Drall von veränderlichem Betrag $\tau_1 z$ haben, der durch Spannungen an den Enden aufrecht erhalten würde. Die Drillungsmomente verschiedener Querschnitte würden einander dann nicht das Gleichgewicht halten können.

$$e_{zz}^{(0)} = \varepsilon_0 - \varkappa_0 x - \varkappa_0' y, \quad e_{xx}^{(0)} = e_{yy}^{(0)} = -\sigma e_{zz}^{(0)}, \quad e_{xy}^{(0)} = 0, \tag{19}$$

wo $\varepsilon_0$, $\varkappa_0$, $\varkappa_0'$ Konstanten. Gleichung (16) ist identisch erfüllt.

Heben wir in der dritten der Gleichungen (12) und in der dritten der Bedingungen (13), sowie in den Gleichungen (15) die von $z$ unabhängigen Glieder heraus, so finden wir wie in § 229 und § 234, a), daß $e_{zx}^{(0)}$ und $e_{yz}^{(0)}$ folgende Form haben müssen:

$$\left.\begin{aligned} e_{zx}^{(0)} &= \tau_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) + \varkappa_1 \left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^2\right\} \\ &\qquad + \varkappa_1' \left\{\frac{\partial \chi'}{\partial x} + (2+\sigma) xy\right\}, \\ e_{yz}^{(0)} &= \tau_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) + \varkappa_1 \left\{\frac{\partial \chi}{\partial y} + (2+\sigma) xy\right\} \\ &\qquad + \varkappa_1' \left\{\frac{\partial \chi'}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\sigma y^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) x^2\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

wo $\chi$ und $\chi'$ die Biegungsfunktionen für den Querschnitt, die der Biegung in der $(x, z)$-Ebene und in der $(y, z)$-Ebene entsprechen, und $\tau_0$ eine Konstante.

Wir haben gezeigt, daß in einem zylindrisch begrenzten Körper der allgemeinste Spannungszustand, der nur an den Enden angreifende Kräfte voraussetzt und bei dem die Spannungskomponenten lineare Funktionen von $z$ sind, die Eigenschaft besitzt, 1) daß $X_z$ und $Y_z$ von $z$ unabhängig sind, 2) daß $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden. Die einzige von $z$ abhängige Spannungskomponente ist also $Z_z$, und zwar ist $Z_z$ eine lineare Funktion von $z$. Wenn umgekehrt Massenkräfte nicht vorhanden sind und $X_x$, $Y_y$, $X_y$ sämtlich verschwinden, gehen die Gleichgewichtsgleichungen über in

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0;$$

aus ihnen folgt, daß $X_z$ und $Y_z$ von $z$ unabhängig sind und daß $Z_z$ eine lineare Funktion von $z$ ist. Die Bedingung, daß die Spannung entlang den Balken gleichförmig sich ändert, ist somit identisch mit der Bedingung, daß $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden.[1])

Der allgemeinste Verzerrungszustand, der die Bedingungen erfüllt, 1) daß die Spannung den Balken entlang gleichförmig variiert, 2) daß nur an den Endflächen des Balkens Kräfte angreifen, setzt sich zusammen aus Dehnung, die von gewissen an den Enden wirkenden Zugkräften herrührt, Biegung durch an den Endflächen angreifende Transversalkräfte und Kräftepaare und Torsion durch Kräftepaare, die an den Enden um die Zentrallinie als Achse wirken. In jedem Querschnitt hat die resultierende Kraft folgende zu den $(x, y, z)$-Achsen parallelen Komponenten:

$$-EI\varkappa_1, \quad -EI'\varkappa_1', \quad E\varepsilon_0,$$

---

1) Was die Bedeutung dieser Resultate im Hinblick auf die historische Entwicklung der Theorie anbetrifft, siehe *Einleitung*, p. 26.

wo $I = \iint x^2 \, dx \, dy$ und $I' = \iint y^2 dx \, dy$; die Komponenten des resultierenden Kräftepaars, bezogen auf Achsen von der Richtung der $x$- und der $y$-Achse, sind gleich

$$-EI'(\varkappa_0' + \varkappa_1' z), \qquad EI(\varkappa_0 + \varkappa_1 z),$$

seine Komponente um die $z$-Achse ist gleich

$$\mu \tau_0 \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dx \, dy$$

$$+ \mu \varkappa_1 \iint \left\{ x \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} + (2 + \tfrac{1}{2}\sigma) x^2 y - (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^3 \right\} dx \, dy$$

$$+ \mu \varkappa_1' \iint \left\{ x \frac{\partial \chi'}{\partial y} - y \frac{\partial \chi'}{\partial x} - (2 + \tfrac{1}{2}\sigma) x y^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma) y^3 \right\} dx \, dy.$$

Die Lösungen der Probleme, die sich so darbieten, wurden in früheren Kapiteln diskutiert.

## § 239. Gleichförmig belasteter Balken. Zurückführung des Problems auf ein Problem ebener Verzerrung.[1])

Wir wählen die Achsen wie vorhin und nehmen nun an, daß alle Spannungs- und Verzerrungskomponenten sich durch quadratische Funktionen von $z$ ausdrücken, sodaß z. B.

$$X_x = X_x^{(2)} z^2 + X_x^{(1)} z + X_x^{(0)}, \quad e_{xx} = e_{xx}^{(2)} z^2 + e_{xx}^{(1)} z + e_{xx}^{(0)}. \tag{21}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ferner nehmen wir an, daß eine Massenkraft wirkt, deren Komponenten parallel zur $x$- und zur $y$-Achse $X$, $Y$ sind, und daß an der zylindrischen Begrenzung eine Oberflächenspannung angreift, deren Komponenten entsprechend $X_\nu$, $Y_\nu$ sind; diese Größen werden als unabhängig von $z$ vorausgesetzt. In den Gleichgewichtsgleichungen, den Randbedingungen, den Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten und den Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung können dann die Glieder zweiten, ersten und nullten Grades in $z$ gesondert behandelt werden.

Greifen wir zunächst die Glieder heraus, die $z^2$ enthalten, so finden wir genau wie in § 238, daß wir setzen können

$$\left.\begin{aligned} & e_{zz}^{(2)} = \varepsilon_2 - \varkappa_2 x - \varkappa_2' y, \\ & e_{xx}^{(2)} = e_{yy}^{(2)} = -\sigma e_{zz}^{(2)}, \quad e_{xy}^{(2)} = 0, \\ & e_{zx}^{(2)} = \tau_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \quad e_{yz}^{(2)} = \tau_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

wo $\varepsilon_2, \varkappa_2, \varkappa_2', \tau_2$ Konstanten und $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt.

1) Die Theorie stammt von J. H. Michell, *Quart. J. of Math.*, vol. 32 (1901).

Heben wir andererseits die Glieder heraus, die $z$ enthalten, so können wir zeigen, daß $\tau_2$ und $\varepsilon_2$ verschwinden müssen und daß wir setzen können

$$\left.\begin{aligned}
e_{zz}^{(1)} &= \varepsilon_1 - \varkappa_1 x - \varkappa_1' y,\\
e_{xx}^{(1)} &= e_{yy}^{(1)} = -\sigma e_{zz}^{(1)}, \quad e_{xy}^{(1)} = 0,\\
e_{zx}^{(1)} &= \tau_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right) + 2\varkappa_2\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\}\\
&\qquad + 2\varkappa_2'\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial x} + (2+\sigma)xy\right\},\\
e_{yz}^{(1)} &= \tau_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right) + 2\varkappa_2\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}\\
&\qquad + 2\varkappa_2'\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\sigma y^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)x^2\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wo $\varepsilon_1$, $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_1$ Konstanten und $\chi$ und $\chi'$ die beiden Biegungsfunktionen für den Querschnitt.

Zur Bestimmung von $X_x^{(0)}, \ldots$ haben wir die Gleichgewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} + X_z^{(1)} + \varrho X &= 0\\
\frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{(0)}}{\partial y} + Y_z^{(1)} + \varrho Y &= 0\\
\frac{\partial X_z^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_z^{(0)}}{\partial y} + Z_z^{(1)} \qquad &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
X_x^{(0)}\cos(x,\nu) + X_y^{(0)}\cos(y,\nu) - X_\nu &= 0\\
X_y^{(0)}\cos(x,\nu) + Y_y^{(0)}\cos(y,\nu) - Y_\nu &= 0\\
X_z^{(0)}\cos(x,\nu) + Y_z^{(0)}\cos(y,\nu) \qquad &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die dritte der Gleichungen (24) und der Bedingungen (25) sind nur dann verträglich, wenn die Konstante $\varepsilon_1$ von (23) verschwindet.

Ferner sind $e_{xx}^{(0)}, \ldots$ und $X_x^{(0)}, \ldots$ durch die gewöhnlichen Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung mit einander verknüpft, und zudem haben wir die Kompatibilitätsbedingungen für die Verzerrungskomponenten in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial x^2} + 2\sigma(\varkappa_2 x + \varkappa_2' y) &= \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial y^2} + 2\sigma(\varkappa_2 x + \varkappa_2' y) &= \frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial y},\\
2\frac{\partial^2 e_{zz}^{(0)}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial e_{yz}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}^{(1)}}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(0)}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}^{(0)}}{\partial y}\right)+2\sigma\varkappa_1'=0,\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}^{(0)}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}^{(0)}}{\partial y}\right)-2\sigma\varkappa_1=0,\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

und

$$\frac{\partial^2 e_{xx}^{(0)}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}^{(0)}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{xy}^{(0)}}{\partial x\partial y}.\tag{28}$$

Die Gleichungen (26) liefern uns die Form von $e_{zz}^{(0)}$:

$$e_{zz}^{(0)}=\varepsilon_0-\varkappa_0 x-\varkappa_0' y+2\varkappa_2(\chi+xy^2)+2\varkappa_2'(\chi'+x^2y)+\tau_1\Phi;\tag{29}$$

ähnlich wie in § 238 finden wir

$$\left.\begin{aligned}e_{zx}^{(0)}&=\tau_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)+\varkappa_1\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\sigma x^2+(1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\}\\&\qquad+\varkappa_1'\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial x}+(2+\sigma)xy\right\},\\ e_{yz}^{(0)}&=\tau_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)+\varkappa_1\left\{\frac{\partial\chi}{\partial y}+(2+\sigma)xy\right\}\\&\qquad+\varkappa_1'\left\{\frac{\partial\chi'}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\sigma y^2+(1-\tfrac{1}{2}\sigma)x^2\right\},\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

worin $\varepsilon_0$, $\varkappa_0$, $\varkappa_0'$, $\tau_0$ Konstanten und $\Phi$, $\chi$, $\chi'$ die vorhin genannten Funktionen bedeuten.

Es erübrigt noch, $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $X_y^{(0)}$ aus den ersten beiden Gleichungen (24), den ersten beiden der Bedingungen (25), den zugehörigen Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung und der Gleichung (28) zu bestimmen. Diese Bestimmung erfordert tatsächlich die Lösung eines Problems ebener Verzerrung. Setzen wir

$$X_x^{(0)}=\lambda e_{zz}^{(0)}+X_x',\qquad Y_y^{(0)}=\lambda e_{zz}^{(0)}+Y_y',\tag{31}$$

so lauten die Gleichungen des Problems ebener Verzerrung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_x'}{\partial x}+\frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y}+\left[\varrho X+X_z^{(1)}+\lambda\frac{\partial e_{zz}^{(0)}}{\partial x}\right]=0,\\ \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial x}+\frac{\partial Y_y'}{\partial y}+\left[\varrho Y+Y_z^{(1)}+\lambda\frac{\partial e_{zz}^{(0)}}{\partial y}\right]=0;\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

hierzu treten die Gleichungen (28), die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}X_x'=\lambda e_{yy}^{(0)}+(\lambda+2\mu)e_{xx}^{(0)},\qquad Y_y'=\lambda e_{xx}^{(0)}+(\lambda+2\mu)e_{yy}^{(0)},\\ X_y^{(0)}=\mu e_{xy}^{(0)}\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

und die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned}X_x'\cos(x,\nu)+X_y^{(0)}\cos(y,\nu)=[X_\nu-\lambda e_{zz}^{(0)}\cos(x,\nu)],\\ X_y^{(0)}\cos(x,\nu)+Y_y'\cos(y,\nu)=[Y_\nu-\lambda e_{zz}^{(0)}\cos(y,\nu)].\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern in (32) und (34) können als bekannt angesehen werden.

Die hier entwickelte Theorie läßt eine Erweiterung auf den Fall zu, wo die längs des Balkens angreifenden Kräfte sowohl longitudinale wie

transversale Komponenten besitzen, vorausgesetzt daß diese sämtlich von $z$ unabhängig sind.[1]) Die letztere Beschränkung läßt sich jedoch beseitigen, und die Theorie kann weiterhin auf den Fall ausgedehnt werden, daß alle längs des Balkens angreifenden Kräfte durch rationale ganze Funktionen von $z$ dargestellt sind.[2])

## § 240. Die Konstanten der Lösung.

$W$, $W'$ seien die zu der $x$- und der $y$-Achse parallelen Komponenten der gleichförmigen Last, sodaß wir haben

$$W = \iint \varrho X dx dy + \int X_\nu dS,$$

entsprechend $W'$. Aus den Gleichungen (32) und (34) finden wir

$$W = -\iint X_z^{(1)} dx dy, \qquad W' = -\iint Y_z^{(1)} dx dy. \tag{35}$$

Wir können nun die Gleichungen hinschreiben

$$\iint X_z dx dy = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(x Y_z) - x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)\right\} dx dy$$
$$= \int x \{ X_z \cos(x,\nu) + Y_z \cos(y,\nu) \} ds + \iint x \{ Z_z^{(1)} + 2z Z_z^{(2)} \} dx dy$$
$$= -EI(\varkappa_1 + 2z\varkappa_2);$$

entsprechende Gleichungen gelten für $\iint Y_z dx dy$. Somit finden wir

$$2EI\varkappa_2 = W, \qquad 2EI'\varkappa_2' = W'. \tag{36}$$

Die Konstanten $\varkappa_2$, $\varkappa_2'$ bestimmen sich also aus der Last pro Längeneinheit.

Wenn die Massenkräfte und die auf die zylindrische Begrenzung wirkenden Oberflächenspannungen zu einem Kräftepaar um die $z$-Achse Anlaß geben, so ist das Moment dieses Kräftepaars gleich

$$\iint \varrho (xY - yX) dx dy + \int (x Y_\nu - y X_\nu) ds;$$

aus den Gleichungen (32) und (34) folgt, daß dieser Ausdruck gleich

$$-\iint \{ x Y_z^{(1)} - y X_z^{(1)} \} dx dy$$

ist. Setzen wir $\mu e_{zx}^{(1)}$ für $X_z^{(1)}$ und $\mu e_{yz}^{(1)}$ für $Y_z^{(1)}$ ein und benutzen die in (23) für $e_{zx}^{(1)}$ und $e_{yz}^{(1)}$ gegebenen Ausdrücke, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von $\tau_1$. Wenn drillende Kräftepaare längs des Balkens nicht angebracht sind und der Querschnitt zur $x$- und zur $y$-Achse symmetrisch liegt, verschwindet $\tau_1$.

Die Konstanten $\varkappa_2$, $\varkappa_2'$, $\tau_1$ hängen sonach von den auf die Längeneinheit entfallenden resultierenden Kräften und Kräftepaaren ab. Die-

1) J. H. Michell, *loc. cit.* p. 409.
2) E. Almansi, *Rom, Acc. Lincei Rend.* (Ser. 6), t. 10 (1901).

jenigen Glieder der Lösung, die die übrigen Konstanten $\varepsilon_0$, $\varkappa_0$, $\varkappa_0'$, $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_0$ enthalten, stimmen mit den Gliedern der vollständigen Lösung des Problems von § 238 überein. Diese Konstanten hängen daher von den über die Endquerschnitte des Balkens resultierenden Kräften und Kräftepaaren ab. Da die Glieder, die $\varkappa_2$, $\varkappa_2'$, $\tau_1$ allein enthalten, das Vorhandensein von Spannungen auf die Normalschnitte bedingen würden, so müssen die über einen Endquerschnitt resultierenden Kräfte und Kräftepaare sich durch Hinzufügen der von den Gliedern in $\varkappa_2$, $\varkappa_2'$, $\tau_1$ herrührenden Anteile zu den am Schluß von § 238 berechneten Anteilen ergeben. Die übrigen Konstanten $\varepsilon_0, \ldots$ drücken sich dann durch die Last pro Längeneinheit und die an den Enden angreifenden Kräfte und Kräftepaare aus.

Wenn die Funktionen $\Phi$, $\chi$, $\chi'$ bekannt sind und das Problem ebener Verzerrung gelöst ist, kennen wir den Spannungs- und Verzerrungszustand in dem durch gleichförmige, irgendwie verteilte Belastung und durch Kräfte und Kräftepaare an den Enden gebogenen Balken. Wie in den Kapiteln XIV und XV können die an den Enden angreifenden Kräfte und Kräftepaare irgend einen festgesetzten Betrag haben, die Spannungen selbst aber, denen sie statisch gleichwertig sind, müssen in ganz bestimmter Weise verteilt sein.

### § 241. Spannung und Verzerrung der Balkenelemente.

Drei der Verzerrungskomponenten bestimmen sich, ohne daß das Problem ebener Verzerrung gelöst ist. Es sind dies $e_{zz}$, $e_{zx}$, $e_{yz}$. Wir haben

$$\left.\begin{aligned}
e_{zz} &= \varepsilon_0 - (\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2)\,x - (\varkappa_0' + \varkappa_1' z + \varkappa_2' z^2)\,y + 2\varkappa_2(\chi + xy^2) \\
&\qquad + 2\varkappa_2'(\chi' + x^2 y) + \tau_1 \Phi, \\
e_{zx} &= (\tau_0 + \tau_1 z)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) + (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)\left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)\,y^2\right\} \\
&\qquad + (\varkappa_1' + 2\varkappa_2' z)\left\{\frac{\partial \chi'}{\partial x} + (2+\sigma)\,xy\right\}, \\
e_{yz} &= (\tau_0 + \tau_1 z)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) + (\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)\left\{\frac{\partial \chi}{\partial y} + (2+\sigma)\,xy\right\} \\
&\qquad + (\varkappa_1' + 2\varkappa_2' z)\left\{\frac{\partial \chi'}{\partial y} + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)\,x^2 + \tfrac{1}{2}\sigma y^2\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Die Konstante $\varepsilon_0$ ist die Dehnung der Zentrallinie. Wir werden sofort sehen, daß sie im allgemeinen nicht dem resultierenden longitudinalen Zug proportional ist. Die Konstanten $\tau_0$ und $\tau_1$ werden durch die Bemerkung gedeutet, daß $\tau_0 + \tau_1 z$ der Drall des Balkens ist.

Um die mit $\varkappa_0, \ldots$ bezeichneten Konstanten zu deuten, bemerken wir, daß die Krümmung der Zentrallinie in der $(x, z)$-Ebene gleich dem Werte von $\partial^2 u/\partial z^2$ für $x = y = 0$ ist. Nun haben wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x}$$

$$= (\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2) - \tau_1 y + \varkappa_2 \sigma (x^2 - y^2) + 2\varkappa_2' \sigma x y; \qquad (38)$$

die in Rede stehende Krümmung ist also gleich $\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2$. Ebenso würden wir finden, daß die Krümmung der Zentrallinie in der $(y, z)$-Ebene, die sich als Wert von $\partial^2 v/\partial z^2$ für $x = y = 0$ berechnet, gleich $\varkappa_0' + \varkappa_1' z + \varkappa_2' z^2$ ist.

Das Auftreten der Glieder

$$\varepsilon_0 + 2\varkappa_2 (\chi + x y^2) + 2\varkappa_2' (\chi' + x^2 y) + \tau_1 \Phi$$

in dem Ausdruck für $e_{zz}$ zeigt, daß die einfache Beziehung zwischen der Dehnung der Längsfasern und der Krümmung der Zentrallinie, die wir im Falle der Biegung durch Endkräfte vorfanden, beim gegenwärtigen Problem nicht zutrifft.

Von den Spannungskomponenten bestimmen sich nur zwei, nämlich $X_z$ und $Y_z$, ohne daß das Problem ebener Verzerrung gelöst ist. Ihre Resultanten über einen Querschnitt sind bezüglich gleich $-EI(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)$ und $-EI'(\varkappa_1' + 2\varkappa_2' z)$. Das Gesetz, nach dem die diesen Resultanten statisch gleichwertigen Tangentialspannungen $X_z$ und $Y_z$ über den Querschnitt verteilt sind, ist das gleiche wie bei den Saint-Venantschen Lösungen (Kap. XV). Haben wir Drall $\tau_0 + \tau_1 z$, so sind die Spannungen $X_z$ und $Y_z$, die mit dem Drall verbunden sind, in derselben Weise über die Querschnitte verteilt wie beim Torsionsproblem (Kap. XIV).

Die Spannungskomponente $Z_z$ ist nicht gleich $E e_{zz}$, weil die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$ nicht null sind; die Kräfte und Kräftepaare aber, die aus den Spannungen $Z_z$ auf die Elemente eines Querschnitts resultieren, lassen sich durch die Konstanten der Lösung ausdrücken, ohne daß das Problem ebener Verzerrung gelöst ist. Die Resultante der Spannungen $Z_z$ liefert den resultierenden longitudinalen Zug. Die Momente der Spannungen $Z_z$ um die durch den Schwerpunkt gehenden, zur $x$- und zur $y$-Achse parallelen Achsen stellen die diesen Achsen entsprechenden Komponenten der *Biegungsmomente* für die einzelnen Querschnitte dar.

Um den resultierenden longitudinalen Zug auszudrücken, bemerken wir, daß

$$\iint Z_z \, dx\, dy = \iint Z_z^{(0)} dx\, dy = \iint [E e_{zz}^{(0)} + \sigma (X_x^{(0)} + Y_y^{(0)})] \, dx\, dy.$$

Wir können nun die Gleichungen hinschreiben

$$\iint X_x^{(0)} dx\, dy = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x X_x^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial y} (x X_y^{(0)}) - x \left( \frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy$$

$$= \int x \left\{ X_x^{(0)} \cos(x, \nu) + X_y^{(0)} \cos(y, \nu) \right\} ds$$

$$+ \iint x \, (X_z^{(1)} + \varrho X) \, dx\, dy.$$

Das Integral $\iint Y_y^{(0)} dx\,dy$ läßt sich in derselben Weise umformen, und wir finden daher die Formel

$$\iint Z_z\,dx\,dy = \iint [E e_{zz}^{(0)} + \sigma x (X_z^{(1)} + \varrho X) + \sigma y (Y_z^{(1)} + \varrho Y)]\,dx\,dy + \sigma \int (x X_\nu + y Y_\nu)\,ds. \tag{39}$$

Da der resultierende Longitudinalzug für alle Querschnitte der gleiche, und zwar gleich dem vorgeschriebenen am Ende angreifenden Zug ist, so bestimmt diese Gleichung die Konstante $\varepsilon_0$.

Wir gehen zur Berechnung der Biegungsmomente über. Bezeichnet $M$ das Biegungsmoment in der $(x, z)$-Ebene, so haben wir

$$M = -\iint x Z_z\,dx\,dy \tag{40}$$

und daher

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -\iint x (Z_z^{(1)} + 2z Z_z^{(2)})\,dx\,dy = EI(\varkappa_1 + 2z\varkappa_2).$$

Diese Gleichung zeigt, daß $M$ sich in der Form ausdrücken läßt

$$M = EI(\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2) + \text{const.} \tag{41}$$

Ebenso können wir zeigen, daß das Biegungsmoment in der $(y, z)$-Ebene sich folgendermaßen ausdrückt:

$$EI'(\varkappa_0' + \varkappa_1' z + \varkappa_2' z^2) + \text{const.}$$

Wir werden sogleich darlegen, wie die Konstanten sich bestimmen lassen.

## § 242. Beziehung zwischen der Krümmung und dem Biegungsmoment.

Wir betrachten den Fall, wo das eine Ende $z = 0$ befestigt, das andere Ende $z = l$ spannungsfrei und die Belastung statisch gleichwertig ist mit einer im Schwerpunkt des Querschnitts in Richtung der $x$-Achse wirkenden Kraft $W$ pro Längeneinheit.[1]) Das Biegungsmoment $M$ ist gegeben durch die Gleichung

$$M = \tfrac{1}{2} W (l - z)^2 \tag{42}$$

und durch Vergleich mit (41) ergeben sich die Gleichungen

$$\varkappa_1 = -Wl/EI, \qquad \varkappa_2 = \tfrac{1}{2} W/EI. \tag{43}$$

Wäre die additive Konstante auf der rechten Seite von (41) gleich null, so würde die Beziehung zwischen dem Biegungsmoment und der Krümmung genau dieselbe sein, wie bei der gleichförmigen

1) Der wichtige Fall eines an den Enden unterstützten Balkens, der eine Last $W$ pro Längeneinheit trägt, erledigt sich durch Kombination der Lösung für einen Balken mit einem spannungsfreien Ende, der durch dieselbe gleichförmige Belastung gebogen wird, und derjenigen für einen Balken, der durch eine am Ende angreifende Transversalkraft vom Betrage $-\frac{1}{2} Wl$ gebogen wird.

Biegung durch Kräftepaare und bei der Biegung durch eine am Ende angreifende Last. Im allgemeinen verschwindet die fragliche Konstante nicht. Um sie zu bestimmen, bemerken wir, daß der Wert von $M$ für $z = 0$ gleich

$$-\iint x\,[Ee_{zz}^{(0)} + \sigma\,(X_x^{(0)} + Y_y^{(0)})]\,dx\,dy$$

ist und daher

$$M - EI(\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2) = \iint -x[E(e_{zz}^{(0)} + \varkappa_0 x) + \sigma(X_x^{(0)} + Y_y^{(0)})]\,dx\,dy. \quad (44)$$

Wir können nun die Gleichung hinschreiben

$$\iint x\,(X_x^{(0)} + Y_y^{(0)})\,dx\,dy$$
$$= \iint \Big[\frac{\partial}{\partial x}\{\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,X_x^{(0)} + xy\,X_y^{(0)}\} + \frac{\partial}{\partial y}\{\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,X_y^{(0)} + xy\,Y_y^{(0)}\}$$
$$- \Big\{\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\Big(\frac{\partial X_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y}\Big) + xy\Big(\frac{\partial X_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial Y_y^{(0)}}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}\,dx\,dy$$
$$= \int [\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,X_\nu + xy\,Y_\nu]\,ds + \iint [\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,(\varrho X + X_z^{(1)})$$
$$+ xy\,(\varrho Y + Y_z^{(1)})]\,dx\,dy.$$

Wir haben daher das Resultat

$$M - EI(\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2)$$
$$= -\iint Ex(e_{zz}^{(0)} + \varkappa_0 x)\,dx\,dy - \sigma\int[\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,X_\nu + xy\,Y_\nu]\,ds$$
$$- \sigma\iint[\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\,(\varrho X + X_z^{(1)}) + xy\,(\varrho Y + Y_z^{(1)})]\,dx\,dy. \quad (45)$$

Da $M$ durch (42) gegeben ist, so bestimmt diese Gleichung die Konstante $\varkappa_0$. Die rechte Seite von (45) stellt den Wert der additiven Konstanten auf der rechten Seite von (41) dar.

Das Ergebnis, daß das Biegungsmont der Krümmung nicht proportional ist[1]), wenn die Last über die Länge des Balkens verteilt ist, können wir durch Fälle erläutern, wo eine Krümmung ohne ein Biegungsmoment vorhanden ist. Ein solcher Fall liegt bei den Lösungen von § 87 vor, wenn wir nur die $y$- und die $z$-Achse miteinander vertauschen. Danach kann ein Spannungssystem, bei dem alle Spannungskomponenten außer $Y_y$ verschwinden, während $Y_y$ die Form $E\alpha x$ hat, durch Oberflächenspannungen vom Betrage $E\alpha x \cos(y, \nu)$ parallel zur $y$-Achse erhalten werden. Diese Spannungen halten sich an jedem Querschnitt selbst das Gleichgewicht, und ein Biegungsmoment gibt es nicht. Die entsprechende Verschiebung ist gegeben durch die Gleichungen

$$u = -\tfrac{1}{2}\alpha\,(\sigma x^2 + y^2 - \sigma z^2), \quad v = \alpha xy, \quad w = -\sigma\alpha xz,$$

1) Dies Ergebnis wurde zuerst von K. Pearson abgeleitet. Siehe *Einleitung*, Fußnote 92. Die Formel (45) rührt her von J. H. Michell, *loc. cit.* p. 409. Der Betrag der Extra-Krümmung ist für einige spezielle Fälle in § 244 berechnet.

sodaß die Zentrallinie ($x = 0$, $y = 0$) durch die Biegung die Krümmung $\sigma\alpha$ bekommt.

Ein anderes Beispiel liefert der Spannungszustand, der durch die Gleichungen

$$X_x = E\alpha x, \quad Y_y = E\alpha x, \quad X_y = -E\alpha y, \quad X_z = Y_z = Z_z = 0$$

gegeben ist und durch Oberflächenspannungen vom Betrage

$$E\alpha\,\{x\cos(x, \nu) - y\cos(y, \nu)\}, \quad E\alpha\,\{x\cos(y, \nu) - y\cos(x, \nu)\}$$

parallel zur $x$- und zur $y$-Achse aufrecht erhalten werden kann. Diese Spannungen halten sich an jedem Querschnitt selbst das Gleichgewicht, und ein Biegungsmoment tritt nicht auf. Die entsprechende Verschiebung ist gegeben durch die Gleichungen

$$u = \alpha\,\{\tfrac{1}{2}(1-\sigma)x^2 - \tfrac{1}{2}(3+\sigma)y^2 + \sigma z^2\}, \quad v = \alpha(1-\sigma)xy,$$
$$w = -2\alpha\sigma xz,$$

und die Krümmung der Zentrallinie ist $2\sigma\alpha$.

Betrachten wir eine von zwei Normalschnitten des Balkens begrenzte Schicht als bestehend aus einer Reihe zur Balkenrichtung transversaler Fasern und stellen uns vor, diese Fasern würden durch Kräfte, die an den Enden angreifen, gebogen, so ist klar, daß die Zentrallinie des Balkens eine Krümmung erfährt, die von der Verkürzung und Dehnung der Längsfasern herrührt; genau so wie die transversalen Fasern eines durch eine Endlast gebogenen Balkens gekrümmt werden. Die Neigung zu antiklastischer Krümmung, die wir im Falle eines durch Endlasten gebogenen Balkens feststellten, liefert eine Erklärung dafür, daß verteilte Lasten eine gewisse Krümmung hervorrufen, außer derjenigen, die in der gewöhnlichen Weise mit dem Biegungsmoment verknüpft ist. Diese Erklärung legt die Vermutung nahe, daß die hier erörterten Verhältnisse von hervorragender Bedeutung z. B. bei Hängebrücken sind, bei denen eine die Mitte der Fahrbahn entlang bewegte Last von den an den Seiten angebrachten Zugstangen aufgenommen wird.

## § 243. Dehnung der Zentrallinie.

Die Tatsache, daß die Zentrallinie eines durch transversale Last gebogenen Balkens im allgemeinen gedehnt oder verkürzt wird, war seit langem als Ergebnis des Experiments[1]) bekannt; ein derartiges Resultat ist auch von vornherein sehr plausibel. Wir betrachten z. B. den Fall eines Balkens von rechteckigem Querschnitt, der längs der Oberseite belastet ist. Auf die horizontalen Querschnitte muß Druck wirken, der vom Wert null auf der Unterseite bis zu einem endlichen Wert auf der Oberseite zunimmt. Mit diesem Druck muß eine Verkürzung der horizontalen Fasern verbunden sein. Der Wert der Dehnung der horizontalen Zentrallinie bestimmt sich mittels der Formel (39). Da der Spannungszustand nicht durch den vertikalen Druck allein gekennzeichnet ist, so drückt sich

1) Fabré, *Paris C. R.*, t. 46 (1858).

die Dehnung nicht so einfach aus, wie obiges Beweisverfahren schließen lassen möchte.

Das Ergebnis, daß $\varepsilon_0 \neq 0$, kann man auch dahin aussprechen, daß die neutrale Ebene, wenn eine solche existiert, die Zentrallinie nicht enthält. Im allgemeinen würde der Ort der Punkte, in denen $e_{zz}$ verschwindet, d. h. in denen keine Längsdehnung herrscht, als die „neutrale Fläche" zu bezeichnen sein. Ist sie eben, so wird man von der neutralen Ebene sprechen.

## § 244. Erläuterungen und Beispiele zur Theorie.

a) *Form der Lösung des Problems ebener Verzerrung.* Haben wir als Massenkraft das Gewicht des Balkens und sind Oberflächenspannungen nicht vorhanden, so können wir die Lösung des Problems ebener Verzerrung (§ 239) einen Schritt weiter fördern, ohne $\chi$ zu bestimmen. Setzen wir in diesem Falle $X = g$, $Y = 0$, so erkennen wir, daß die Lösung der Spannungsgleichungen (32) sich in folgender Form ausdrücken läßt:

$$\left.\begin{aligned} X_x{}' &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \lambda e_{zz}^{(0)} - g\varrho x - 2\varkappa_2\mu\left[\chi + \tfrac{1}{6}\sigma x^3 + (1 - \tfrac{1}{2}\sigma)xy^2\right], \\ Y_y{}' &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \lambda e_{zz}^{(0)} \qquad\qquad - 2\varkappa_2\mu\left[\chi + (1 + \tfrac{1}{2}\sigma)xy^2\right], \\ X_y{}^{(0)} &= -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

wo $\Omega$ so zu bestimmen ist, daß die Kompatibilitätsbedingung (28) befriedigt ist. Es läßt sich zeigen, daß diese Gleichung zu folgender Gleichung für $\Omega$ führt:

$$\nabla_1{}^4 \Omega = 2\mu\varkappa_2(2 + \sigma)x \qquad (47)$$

Nehmen wir die partikuläre Lösung

$$\Omega = \frac{\mu\varkappa_2(2+\sigma)}{96} x(x^2 + y^2)^2, \qquad (48)$$

so erhalten wir für $X_x{}'$, ... ein Wertesystem, das Oberflächenspannungen erfordert. Wir müssen daher ein zusätzliches Spannungssystem überlagern, das diese Oberflächenspannungen aufhebt und nicht mit Massenkraft verbunden ist; mit anderen Worten, wir müssen eine komplementäre Lösung von $\nabla_1{}^4\Omega = 0$ zu dem in (48) gegebenen Wert von $\Omega$ hinzufügen, und diese Lösung ist so zu bestimmen, daß die Randbedingungen befriedigt werden.

b) *Lösung des Problems ebener Verzerrung für einen Balken von kreisförmigem Querschnitt, der durch sein Eigengewicht gebogen wird.* Ist die Begrenzung ein Kreis $x^2 + y^2 = a^2$, so haben wir

$$\chi = -(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sigma)a^2 x + \tfrac{1}{4}(x^3 - 3xy^2); \qquad (49)$$

die Oberflächenwerte der durch (46) ausgedrückten Spannungskomponenten lassen sich für den Fall, daß $\Omega$ durch (48) gegeben ist, vereinfachen durch die aus (36) folgende Beziehung $g\varrho = \mu\varkappa_2 a^2(1 + \sigma)$. Es ergibt sich, daß diese Werte durch die Gleichungen gegeben sind

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= \mu\varkappa_2 \frac{2+\sigma}{24}(x^3 + 3xy^2) - \lambda e_{zz}^{(0)} - \tfrac{1}{3}\mu\sigma\varkappa_2(x^3 - 3xy^2), \\ Y_y' &= \mu\varkappa_2 \frac{2+\sigma}{24}(5x^3 + 3xy^2) - \lambda e_{zz}^{(0)} + \mu\varkappa_2(1 + \tfrac{3}{4}\sigma)a^2x \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}\mu\sigma\varkappa_2(x^3 - 3xy^2), \\ X_y^{(0)} &= -\mu\varkappa_2 \frac{2+\sigma}{24}(y^3 + 3yx^2). \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Die von den Gliedern in $\mu\varkappa_2 \frac{2+\sigma}{24}$ herrührenden Oberflächenspannungen lassen sich durch Überlagerung des Spannungssystems[1])

$$X_x' = -\frac{2+\sigma}{24}\mu\varkappa_2 a^2 x,\quad Y_y' = -\frac{2+\sigma}{8}\mu\varkappa_2 a^2 x,\quad X_y^{(0)} = \frac{2+\sigma}{24}\mu\varkappa_2 a^2 y \quad (51)$$

zum Verschwinden bringen. Die von dem Glied in $\mu\varkappa_2 a^2 x$ herrührenden Oberflächenspannungen können wir aufheben durch Überlagerung des Spannungssystems

$$X_x' = 0,\quad Y_y' = -\mu\varkappa_2(1 + \tfrac{3}{4}\sigma)a^2x,\quad X_y^{(0)} = 0. \quad (52)$$

Die von den Gliedern in $\mu\sigma\varkappa_2(x^3 - 3xy^2)$ herrührenden Oberflächenspannungen lassen sich durch Überlagerung des Spannungssystems

$$\begin{gathered} X_x' = \mu\sigma\varkappa_2 x(\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{8}y^2 + \tfrac{5}{24}a^2),\quad Y_y' = \mu\sigma\varkappa_2 x(-\tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{3}{8}y^2 + \tfrac{3}{8}a^2), \\ X_y^{(0)} = \mu\sigma\varkappa_2 y\{-\tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{5}{24}(y^2 - a^2)\} \end{gathered} \quad (53)$$

zum Verschwinden bringen. Die Spannungskomponenten $X_x'$, $Y_y'$, $X_y^{(0)}$ sind daher bestimmt, und das Problem ebener Verzerrung ist somit für eine kreisförmige Begrenzung gelöst.

c) *Korrektionsformel für die diesem Fall entsprechende Krümmung.* Im Falle eines Balkens von kreisförmigem Querschnitt, der durch sein Eigengewicht gebogen wird, wird, wie sich zeigen läßt, $\varepsilon_0 = 0$, d. h. die Zentrallinie bleibt ungedehnt, und

$$\varkappa_0 = \frac{2g\varrho}{E}\frac{l^2}{a^2}\left(1 - \frac{7 + 12\sigma + 4\sigma^2}{6(1+\sigma)}\frac{a^2}{l^2}\right). \quad (54)$$

Wollte man die Krümmung nach der gewöhnlichen Regel aus dem Biegungsmoment berechnen, so würde man den zweiten Term in der obigen Klammer vernachlässigen. Die Korrektion, die für die Krümmung bei verteilter Last einzusetzen ist, ist also von folgender Größenordnung

$$\left[\frac{\text{lineare Abmessung des Querschnitts}}{\text{Balkenlänge}}\right]^2.$$

Eine an die Form von (45) anschließende Betrachtung würde zeigen, daß dies Resultat allgemein für einen durch sein Eigengewicht gebogenen Balken gilt.[2])

1) Einige der hier benötigten Lösungen des Problems ebener Verzerrung in einem Kreiszylinder wurden in § 186 gegeben.

2) Lösungen des Problems der Biegung eines Kreiszylinders oder elliptischen Zylinders durch Lasten, die in spezieller Weise verteilt sind, haben Pearson, *Quart. J. of Math.*, vol. 24 (1889), und Pearson und Filon, *Quart. J. of Math.* vol. 31 (1899) mitgeteilt.

d) *Schmaler rechteckiger Balken, der längs der Oberseite belastet ist.* Wir können die Theorie auch auf den Fall eines schmalen Balkens von rechteckigem Querschnitt anwenden, der längs der Oberseite gleichmäßig belastet ist. Wir behandeln das Problem als das eines verallgemeinerten ebenen Spannungszustandes[1]) und sehen vom Eigengewicht des Balkens ab. $2a$ sei die Höhe des Balkens, $2b$ die Breite und $l$ die Länge. Die $z$-Achse falle in die horizontale Zentrallinie und die $x$-Achse in die abwärts gerichtete Vertikale am befestigten Ende, $z = 0$. $W$ bezeichne die Last pro Längeneinheit. Die Mittelwerte der Spannungskomponenten, $\overline{X}_x$, $\overline{Z}_z$, $\overline{X}_z$ drücken sich in der Form aus

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_x &= -\frac{W}{4b} + E\varkappa_2\left(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right),\\ \overline{Z}_z &= -EAx + \tfrac{2}{3}E\varkappa_2x^3 - E(\varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2)\,x,\\ X_z &= -\tfrac{1}{2}E(a^2 - x^2)(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z), \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

wo der Gleichung (42) gemäß sein muß

$$\varkappa_2 = \frac{3W}{8Ea^3b}, \quad \varkappa_1 = -\frac{3Wl}{4Ea^3b}, \quad A = \frac{3Wl^2}{8Ea^3b}\left(1 + \tfrac{2}{5}\frac{a^2}{l^2}\right). \tag{56}$$

Die Krümmung der Zentrallinie ist, wie sich zeigen läßt, gleich

$$A - (2+\sigma)\varkappa_2 a^2 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2,$$

mithin gleich

$$\frac{3W}{8Ea^3b}\left[(l-z)^2 - \left(\tfrac{8}{5} + \sigma\right)a^2\right].$$

Das in $(\tfrac{8}{5} + \sigma)a^2$ multiplizierte Glied stellt die Korrektion dar, den der nach der gewöhnlichen Regel berechnete Wert der Krümmung erfährt.

Die Dehnung der Zentrallinie ist, wie sich zeigen läßt, gleich $\sigma W/4bE$; sie ist genau halb so groß wie die Dehnung, die der Balken erfahren würde, wenn er, an den Enden frei, längs der Unterseite unterstützt wäre und längs der Oberseite dieselbe Last trüge. Die neutrale Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$x\left[3\frac{(l-z)^2}{a^2} + 3\left(\tfrac{2}{5} + \sigma\right) - (2+\sigma)\frac{x^2}{a^2}\right] = 2\sigma a.$$

In beträchtlicher Entfernung vom freien Ende liegt diese Fläche etwa um $\tfrac{2}{3}\sigma a^3/(l-z)^2$ unter der Zentrallinie. Das Resultat, daß die neutrale Fläche auf der den Krümmungsmittelpunkten zugewandten Seite der Zentrallinie verläuft, ist experimentell bestätigt worden.[2])

e) *Zweifach unterstützter Balken.* Wenn wir über das in (55) gewonnene Spannungssystem den von einer Last $-\tfrac{1}{2}W$ am Ende $z = l$ herrührenden Spannungszustand überlagern, so erhalten wir die Lösung für einen schmalen rechteckigen Balken, der durch gleichförmige Last $W$

1) Das Problem wurde diskutiert von J. H. Michell, *Quart. J. of Math.*, vol. 31 (1900), und ebenfalls von L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 201 (1903), und *Proc. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 72 (1904).

2) Siehe eine Arbeit von E. G. Coker, *Edinburgh Roy. Soc. Trans.*, vol 41 (1904), p. 229.

pro Längeneinheit gebogen und an beiden Enden unterstützt ist. Das hinzukommende Spannungssystem ist nach den Resultaten von § 95 durch die Gleichungen gegeben

$$\overline{X}_x = 0, \quad \overline{Z}_z = \tfrac{3}{8}\frac{Wl}{a^3 b}(l - z)\,x, \quad \overline{X}_z = -\tfrac{3}{16}\frac{Wl}{a^3 b}(a^2 - x^2),$$

und die durchschnittliche Spannung im Balken drückt sich aus durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{X}}_x &= -\tfrac{1}{8}\frac{W}{a^3 b}(a - x)^2(2\,a + x), \\ \overline{Z}_x &= \cdot\tfrac{3}{8}\frac{W}{a^3 b}\left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{2}{5}a^2 x + xz(l - z)\right], \\ \overline{X}_z &= -\tfrac{3}{8}\frac{W}{a^3 b}(a^2 - x^2)\left(z - \tfrac{1}{2}l\right). \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

## Kapitel XVII.

### Die Theorie der durchlaufenden Träger.

---

#### § 245. Erweiterung der Theorie der Balkenbiegung.

In früheren Kapiteln haben wir gewisse strenge Lösungen des Problems der Balkenbiegung für spezielle Arten der Belastung untersucht. In dem Falle eines Balkens, der durch eine an einem Ende konzentrierte Last gebogen wird (Kap. XV), fanden wir, daß das „Bernoulli-Eulersche“ Theorem der Proportionalität von Krümmung und Biegungsmoment zutrifft. Beim Problem des Balkens, der durch eine gleichförmig über die Länge verteilte Last gebogen wird (Kap. XVI), fanden wir diesen Satz nicht bestätigt, vielmehr zeigte sich, daß *außer* der Krümmung, die sich nach diesem Theorem ergeben würde, eine weitere konstante Krümmung eintritt, deren Betrag von der Verteilung der die Belastung bildenden Kräfte über den Querschnitt abhängt. Aus diesen Resultaten dürfen wir wohl den Schluß ziehen, daß in einem durch beliebige Kräfte nicht übermäßig gebogenen Balken das Gesetz der Proportionalität von Biegungsmoment und Krümmung in denjenigen Querschnitten, die sich in beträchtlicher Entfernung von Belastungs- und Stützpunkten befinden, mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist, daß aber in der Nähe solcher Stellen eine lokale Krümmung hinzutreten kann. Wir suchten die Umstände zu kennzeichnen, unter denen die hinzukommende Krümmung sehr bedeutend werden kann, und lösten einige Probleme, bei denen sie sich als unbeträchtlich erwies. Aus den erhaltenen Resultaten scheinen wir schließen zu dürfen, daß bei den meisten praktischen Problemen, die sich auf lange Balken beziehen, die hinzutretende Krümmung nicht gerade von großer Bedeutung ist.

Der Spannungs- und Verzerrungszustand im Innern eines durch beliebige Kräfte mäßig gebogenen Balkens kann in allen Punkten, die sich in beträchtlicher Entfernung von Belastungs- und Stützpunkten befinden, mit hinreichender Annäherung als durch die Saint-

Venantsche Lösung (Kap. XV) gegeben angesehen werden[1]); andererseits wird in der Nähe der Mitte eines größeren Abschnitts, über den die Last gleichförmig oder nahezu gleichförmig verteilt ist, die Michellsche Lösung (Kap. XVI) den Zustand mit hinreichender Annäherung darstellen. Dagegen sind wir über den Spannungs- und Verzerrungszustand in der Nähe der Angriffsstelle einer konzentrierten Last oder eines Stützpunktes nicht genauer unterrichtet. In der Umgebung dieser Punkte muß die tatsächliche Verteilung der am Balken angreifenden Kräfte von großem Einfluß sein. Es sind Versuche angestellt worden, um den Verzerrungszustand an solchen Stellen experimentell zu ermitteln. Die Untersuchung von Carus Wilson[2]) bezieht sich auf einen Glasbalken von rechteckigem Querschnitt, der symmetrisch auf zwei Rollen $B$, $C$ gestützt war und durch eine dritte, in der Mitte aufliegende Rolle $A$ gebogen wurde. Der Verzerrungszustand auf der Strecke $AD$ (Fig. 32) wurde mittels polarisierten Lichtes, das horizontal durch den Balken hindurchging, geprüft. Die Versuchsergebnisse wurden von Stokes[3]) mit Hilfe gewisser empirischer Voraussetzungen erklärt. Stokes legte dar, daß, wenn man das Problem als ein zweidimensionales behandelt, dem Druck $W$ in $A$ durch Drucke auf die Balkenseite $BC$ das Gleichgewicht gehalten werden kann, die nach dem Gesetz einer einfachen radialen Druckverteilung (§ 149) mit dem Zentrum $A$ verteilt sind. Ebenso würden die Drucke $\frac{1}{2}W$ in $B$ und $C$ zusammen mit radialem Zug, der, nach $A$ gerichtet, nach demselben Gesetz über die Seite $BC$ verteilt ist, ein im statischen Gleichgewicht befindliches Kräftesystem ergeben. Durch Überlagerung dieser beiden Kräftesysteme erhalten wir eine Anordnung, bei der als einzige Kräfte diejenigen auftreten, die tatsächlich am Balken angreifen. Der Spannungszustand, der von den Kräften des ersten Systems hervorgebracht wird, ist derjenige, den wir in § 150 erhielten. Der Spannungszustand, der von den Kräften des zweiten Systems hervorgerufen wird, läßt sich theoretisch nicht ohne weiteres bestimmen; in jedem Punkt von $AD$ muß er jedoch aus

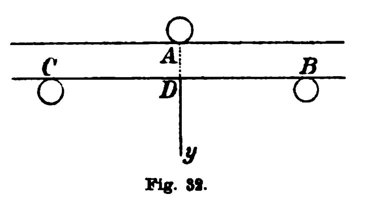


Fig. 32.

---

1) Diese Anschauung wird durch L. Pochhammers Untersuchung über die Verzerrung in einem durch gegebene Kräfte deformierten Kreiszylinder gestützt. Siehe seine *Untersuchungen über das Gleichgewicht des elastischen Stabes*, Kiel 1879.

2) *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 32 (1891).

3) Die Arbeit von Stokes ist in der Abhandlung von Carus Wilson veröffentlicht; wiederabgedruckt ist sie in Stokes' *Math. and Phys. Papers*, vol. 5, p. 238.

einem gewissen vertikalen Druck und einem gewissen horizontalen Zug bestehen. Stokes nahm an, daß jede dieser Spannungskomponenten gleichförmig entlang $AD$ variiert. Der aus den beiden Systemen berechnete vertikale Druck verschwindet in $D$, und der aus dem zweiten System allein berechnete Druck verschwindet in $A$; diese Bedingungen, verbunden mit der Kenntnis der Resultanten der horizontalen Zugspannungen und ihres resultierenden Moments um $A$ reichen zur Bestimmung der Spannung in allen Punkten von $AD$ hin, wenn obige Voraussetzung gemacht wird. Wählen wir $A$ als Koordinatenanfang und $AD$ als $y$-Achse, so finden wir nach diesem Verfahren für die Spannungskomponenten in irgend einem Punkte von $AD$ die folgenden Werte:

$$\text{horizontaler Zug} \quad X_x = \frac{W}{b}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{3a}{b}\right) + \frac{6W}{b^2}\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{\pi}\right) y,$$

$$\text{vertikaler Druck} \quad -Y_y = \frac{2W}{\pi}\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{b^2}\right),$$

wo $b$ die Balkenhöhe und $2a$ die Spannweite $BC$. In denjenigen Punkten, in denen $X_x = Y_y$, ist der Spannungszustand gleichwertig mit einem mittleren Zug, der von Schubspannung nicht begleitet ist. Sollen diese Punkte reell sein, so müssen wir haben $6a/b > 40/\pi$, oder (Spannweite/Höhe) $> 4{,}25$ etwa. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, gibt es zwei solcher Punkte. Die Lage dieser Punkte läßt sich experimentell bestimmen, da sie durch das Fehlen einer doppelt brechenden Eigenschaft des Glases gekennzeichnet sind; es ergab sich, daß die tatsächliche und die berechnete Lage sehr genau übereinstimmen.

Eine allgemeine Theorie zweidimensionaler Probleme dieser Art wurde von Filon[1]) gegeben. Unter den von ihm gelösten Problemen befindet sich das eines Balkens von unendlicher Länge, der auf der einen Seite durch Druck in einem Punkte beansprucht wird. Die Verschiebungs- und Spannungskomponenten erscheinen in der Lösung ausgedrückt durch bestimmte Integrale, und es ist ziemlich schwierig, die Ergebnisse zu deuten. Gelänge es, die Lösung dieses speziellen Problems in geeigneter, durchsichtiger Form darzustellen, so würde man offenbar z. B. die Lösung der von Stokes behandelten Fragen durch Synthese erhalten können. Filon zog aus seiner Arbeit den Schluß, daß der Stokessche Wert für den horizontalen Zug einer Berichtigung bedarf, und zwar in erster Linie in der oberen Hälfte des Balkens, daß aber der Stokessche Wert für den vertikalen Druck

1) *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Ser. A), vol. 201 (1903). Es sei auch verwiesen auf die Thèse von C. Ribière, *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles,* Bordeaux 1888, und auf A. Timpe, *Zeitschr. Math. Phys.* 52 (1905), p. 348.

eine gute Annäherung darstellt. Was die Beziehung zwischen Krümmung und Biegungsmoment anbetrifft, so schloß Filon, daß der Bernoulli-Eulersache Satz annähernd zutrifft, daß aber bei Anwendung auf die Bestimmung der von einer konzentrierten Last herrührenden Durchbiegung ein Term in Betracht kommt, der der sogenannten „vom Schub herrührendeu zusätzlichen Durchbiegung" [§ 235, e)] analog ist. Wir betrachten z. B. einen Balken $BC$, der an beiden Enden unterstützt ist und im Mittelpunkt $A$ eine konzentrierte Last trägt (Fig. 33). Beide Teile des Balkens, $AC$ und $AB$, könnte man als einen in $A$ befestigten Sparren behandeln, der durch eine am anderen Ende angreifende aufwärts gerichtete Kraft $\frac{1}{2} W$ gebogen wird; die Saint-Venantsche Lösung würde jedoch auf die Teile $AB$ und $AC$ nicht streng anwendbar sein, denn die Querschnitte werden zu krummen Flächen verwölbt, die in $A$ nicht auf einander passen. Bei der Saint-Venantschen Lösung des Sparrenproblems ist der mittlere Teil des Querschnitts in $A$ vertikal und die Tangente der Zentrallinie in $A$ bildet mit der Horizontalen einen kleinen Winkel $s_0$ [§ 232, c)]. Filon zog aus seiner Lösung die Schlußfolgerung, daß die Durchbiegung des in der Mitte belasteten Balkens sich näherungsweise nach der Doppelsparrenmethode bestimmen läßt, vorausgesetzt, daß man die Zentrallinie im Belastungspunkte $A$ ein wenig geknickt annimmt, nämlich so, daß $AB$ und $AC$ um denselben kleinen Winkel von der Horizontalen sich erheben. Er berechnete diesen Winkel zu etwa $\frac{3}{4} s_0$.

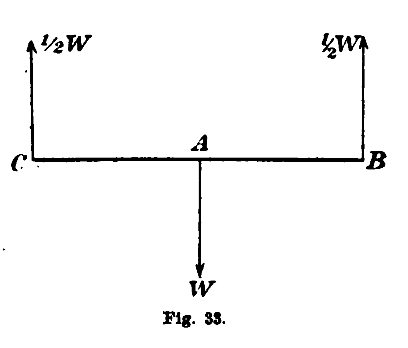


Fig. 33.

Die Korrektion, die sich auf diese Weise für die Durchbiegung in der Mitte ergeben würde, würde im Falle eines schmalen rechteckigen Balkens eine Vergrößerung derselben im Verhältnis $45\, d^2/16\, l^2$ zu eins bedeuten, wo $l$ die Spannweite und $d$ die Höhe des Balkens. Bei einem langen Balken ist daher die Korrektion nicht sehr bedeutend.

Selbstverständlich besagt die hier angeführte Theorie durchaus nicht, daß die Zentrallinie an der Stelle, wo die konzentrierte Last angreift, einen kleinen Knick erleidet. Der strenge Ausdruck für die Verschiebung zeigt in der Tat, daß die Richtung in diesem Punkte stetig ist. Die Theorie stellt nur fest, daß wir eine gute Annäherung für den Wert der Durchbiegung erhalten, wenn wir das — nicht streng zutreffende — Bernoulli-Eulersche Krümmungstheorem annehmen und gleichzeitig eine — tatsächlich nicht vorhandene — Diskontinuität in der Richtung der Zentrallinie voraussetzen.

## § 246. Das Problem der durchlaufenden Träger.[1])

Im folgenden wollen wir die Folgerungen entwickeln, die sich aus der Annahme des Bernoulli-Eulerschen Krümmungstheorems für den Fall eines langen Balkens von kleiner Breite und Höhe ergeben, der auf zwei oder mehr in gleicher Höhe gelegenen Stützpunkten ruht und durch verschiedenartig verteilte Transversallasten gebogen wird. Der Balken werde in einer seiner Hauptebenen mäßig gebogen. Wir wählen irgendwo auf der Verbindungslinie der Stützpunkte den Koordinatenanfang und ziehen die $x$-Achse horizontal nach rechts durch die Stützpunkte, die $y$-Achse vertikal abwärts. Die Krümmung drückt sich mit hinreichender Annäherung durch $d^2y/dx^2$ aus. Die Spannungen, die über einen Normalschnitt von den rechts davon gelegenen Teilen auf die links gelegenen ausgeübt werden, sind statisch gleichwertig mit einer Schubkraft $N$, die parallel zur $y$-Achse wirkt, und einem Kräftepaar $G$ in der $(x, y)$-Ebene. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines starren Körpers, bezogen auf ein von zwei Normalschnitten begrenztes kurzes Balkenstück $\Delta x$, liefern die Gleichung

$$\frac{dG}{dx} + N = 0. \tag{1}$$

Für das Kräftepaar $G$ setzen wir die Gleichung an

$$G = B\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{2}$$

wo $B$ das Produkt des Youngschen Moduls des Materials und des Trägheitsmoments des Normalschnitts, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende, zur $(x, y)$-Ebene senkrechte Achse.[2]) Der Richtungssinn der Kraft und des Kräftepaares, wie er den obigen Festsetzungen entspricht, ist in Fig. 34 eingezeichnet. Außer bei der Berechnung von $B$ sind Breite und Höhe des Balkens überhaupt nicht berücksichtigt.

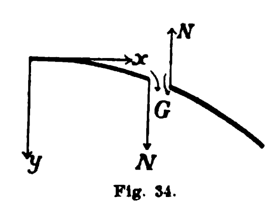


Fig. 34.

Wie bereits bemerkt, nehmen wir bei den zu behandelnden Problemen die Auflagerpunkte in gleicher Höhe an. In diesen Punkten ist die Bedingung $y = 0$ erfüllt. An einem freien Ende des Balkens müssen die Bedingungen $N = 0$, $G = 0$ befriedigt sein. An einem Ende, das auf einer Stütze frei aufliegt, (man bezeichnet es

1) Den Grund zu der Theorie legte Navier. Siehe *Einleitung*, p. 27. Spezielle Fälle sind von verschiedenen Schriftstellern behandelt worden, darunter Weyrauch, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper, Leipzig 1885.

2) $B$ wird oft als die „Biegungssteifigkeit“ (engl. „flexural rigidity“) bezeichnet.

als *gestützt*, engl. *supported*) lauten die Bedingungen: $y = 0$, $G = 0$. An einem Ende, das *eingemauert* oder *eingeklemmt* (engl. *built-in*, franz. *encastré*) ist, ist die Richtung der Zentrallinie als vorgeschrieben anzusehen.[1]) Bei den Problemen, die wir lösen werden, wird sie als horizontal angenommen werden. Die Verschiebung $y$ bestimmt sich durch Gleichsetzen des Biegungsmoments $G$, das irgend einem Querschnitt mit dem Schwerpunkt $P$ entspricht, mit der Summe der bezüglich $P$ genommenen Momente aller Kräfte, die auf ein nach links durch diesen Querschnitt begrenztes Balkenstück wirken.[2]) Dies Verfahren liefert eine Differentialgleichung für $y$, und die Integrationskonstanten bestimmen sich durch die obigen speziellen Bedingungen. In den beiden Balkenabschnitten, die durch den Angriffspunkt einer konzentrierten Last oder durch einen Stützpunkt getrennt werden, stimmen die Ausdrücke, die $y$ als Funktion von $x$ darstellen, nicht überein; in dem Punkte selbst aber müssen diese Ausdrücke denselben Wert haben; mit anderen Worten, die Verschiebung $y$ ist an dieser Stelle stetig. Wir nehmen an, daß die Richtung der Zentrallinie bezw. $dy/dx$ ebenfalls an einer solchen Stelle sich stetig verhält. Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, daß die gleich $d^2y/dx^2$ gesetzte Krümmung in dem Punkte stetig ist. Die Differenz der aus den Verschiebungen zu beiden Seiten des Punktes berechneten Schubkräfte $N$ muß der konzentrierten Last bezw. dem Stützdruck das Gleichgewicht halten; somit verhält sich die Schubkraft und daher auch $d^3y/dx^3$ an einer solchen Stelle unstetig.

## § 247. Zwei Stützpunkte.

Wir betrachten zunächst eine Reihe von Fällen, wo zwei Auflager vorhanden sind, die mit den Balkenenden zusammenfallen. In allen diesen Fällen bezeichnen wir die Spannweite zwischen den Stützen mit $l$.

a) *An den Enden angreifende Kräfte und Kräftepaare.*

Der Balken werde an den Enden $A$ und $B$ durch Kräfte $Y$ und Kräftepaare $M_0$ und $M_1$ beansprucht. Die Kräfte $Y$ müssen gleich und entgegengesetzt gerichtet sein; ist ihre Richtung die in Fig. 35 verzeichnete, so müssen sie sich mittels folgender Gleichung durch $M_1$ und $M_0$ ausdrücken:

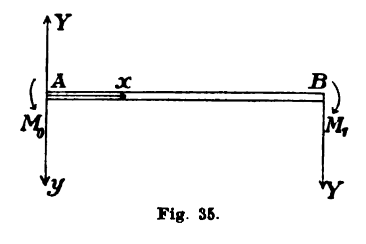


Fig. 35.

1) Man spricht in diesem Falle auch von einem „Zapfenlager" (engl. „clamped end").

2) Diese Summe stimmt natürlich überein mit der Summe der mit umge-

$$lY = M_0 - M_1.$$

Für einen Querschnitt $x$ ist das Biegungsmoment gleich $(l-x)\,Y + M_1$ oder gleich

$$M_0\,(l-x)/l + M_1 x/l.$$

Die Gleichgewichtsgleichung lautet demgemäß

$$B\,\frac{d^2y}{dx^2} = M_0\,\frac{l-x}{l} + M_1\,\frac{x}{l}.$$

Integrieren wir diese Gleichung und bestimmen die Integrationskonstanten so, daß $y$ auf $x=0$ und auf $x=l$ verschwindet, so finden wir, daß die Durchbiegung durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$By = -\tfrac{1}{6}\,l^{-1}x\,(l-x)\,\{M_0\,(2l-x) + M_1\,(l+x)\}. \qquad (3)$$

Die durch diese Gleichung gegebene Durchbiegung können wir als „die von den Kräftepaaren an den Balkenenden herrührende Durchbiegung" bezeichnen.

b) *Gleichförmige Last. Gestützte Enden.*

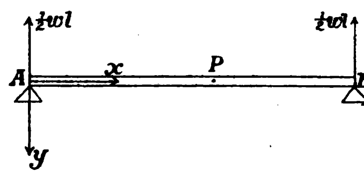


Fig. 36.

$w$ sei das Gewicht des Balkens pro Längeneinheit, dann sind die Stützdrucke je gleich $\tfrac{1}{2}wl$. Das Moment des Gewichts des Teils $BP$ des Balkens um irgend einen Punkt $P$ ist gleich $\tfrac{1}{2}w\,(l-x)^2$; das Biegungsmoment in $P$ (in dem früher dargelegten Sinne gerechnet) ist daher gleich der Summe von diesem Moment und $-\tfrac{1}{2}wl\,(l-x)$, oder gleich

$$-\tfrac{1}{2}wx\,(l-x).$$

Die Gleichgewichtsgleichung ist demgemäß

$$B\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\,wx\,(l-x).$$

Integrieren wir diese Gleichung und bestimmen die Integrationskonstanten so, daß $y$ auf $x=0$ und auf $x=l$ verschwindet, so erhalten wir die Gleichung

$$By = \tfrac{1}{24}\,wx\,(l-x)\,\{l^2 + x\,(l-x)\}. \qquad (4)$$

Wählen wir die Mitte des Balkens als Koordinatenanfang, setzen also $x = \tfrac{1}{2}l + x'$, so finden wir

$$By = \tfrac{1}{24}\,w\,(\tfrac{1}{4}l^2 - x'^2)\,(\tfrac{5}{4}l^2 - x'^2).$$

c) *Gleichförmige Last. Eingemauerte Enden.*

Wir können die Lösung dadurch erhalten, daß wir zu der Lösung im Fall b) eine Lösung von Fall a) in der Weise hinzufügen, daß $dy/dx$

kehrtem Vorzeichen genommenen Momente aller Kräfte, die auf ein nach rechts durch den betr. Querschnitt begrenztes Stück des Balkens wirken.

in $x = 0$ und $x = l$ verschwindet. Aus Symmetriegründen ist offenbar $M_1 = M_0$ und $Y = 0$. Wir haben daher

$$\boldsymbol{B}y = \tfrac{1}{24} wx(l-x)(l^2 + lx - x^2) - \tfrac{1}{2} Mx(l-x),$$

wo $M$ für $M_0$ bzw. $M_1$ geschrieben ist. Die Randbedingungen liefern

$$M = \tfrac{1}{12} wl^2,$$

und die Gleichung für die Durchbiegung wird

$$\boldsymbol{B}y = \tfrac{1}{24} wx^2 (l-x)^2,$$

oder wenn wir die Mitte der Spannweite als Anfangspunkt der $x'$-Koordinate einführen:

$$\boldsymbol{B}y = \tfrac{1}{24} w (\tfrac{1}{4} l^2 - x'^2)^2.$$

d) *Konzentrierte Last. Gestützte Enden.*

In einem Punkte $Q$ von $AB$, für den $x = \xi$, sei eine Last $W$ konzentriert. Wir wollen $\xi'$ statt $l - \xi$ schreiben, sodaß $AQ = \xi$ und $BQ = \xi'$. Die Drucke auf die Stützen $A$ und $B$ sind bezüglich gleich $W\xi'/l$ und gleich $W\xi/l$. In irgend einem Punkte von $AQ$, wo $\xi > x > 0$, ist das Biegungsmoment gleich $-W\xi' x/l$; und in irgend einem Punkte von $BQ$, wo $l > x > \xi$, ist es gleich $-W\xi(l-x)/l$.

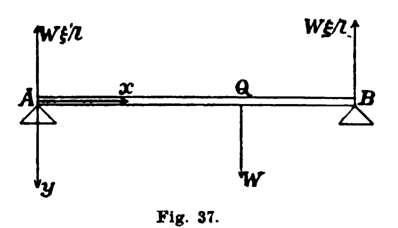


Fig. 37.

Die Gleichgewichtsgleichungen lauten demgemäß

$$\text{auf } AQ: \quad \boldsymbol{B}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W\xi'}{l}x,$$

$$\text{auf } BQ: \quad \boldsymbol{B}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W\xi}{l}(l-x).$$

Wir integrieren sie in der Form

$$\boldsymbol{B}(y - x \operatorname{tg}\alpha) = -\tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi' x^3,$$

$$\boldsymbol{B}\{y - (l-x)\operatorname{tg}\beta\} = -\tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi (l-x)^3,$$

wo $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ die Neigung der Zentrallinie gegen die Horizontale in den Punkten $A$ und $B$ kennzeichnen. Die Stetigkeitsbedingungen für $y$ und $dy/dx$ in $Q$ lauten

$$\boldsymbol{B}\xi \operatorname{tg}\alpha - \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi'\xi^3 = \boldsymbol{B}\xi' \operatorname{tg}\beta - \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi\xi'^3,$$

$$\boldsymbol{B}\operatorname{tg}\alpha - \tfrac{1}{2} l^{-1} W\xi'\xi^2 = -\boldsymbol{B}\operatorname{tg}\beta + \tfrac{1}{2} l^{-1} W\xi\xi'^2.$$

Diese Gleichungen liefern

$$\boldsymbol{B}\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi\xi'(\xi + 2\xi'), \quad \boldsymbol{B}\operatorname{tg}\beta = \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi\xi'(2\xi + \xi').$$

Somit haben wir auf $AQ$, wo $\xi > x > 0$,

$$\boldsymbol{B}y = \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi' \{\xi(\xi + 2\xi')x - x^3\} \qquad (5)$$

und auf $BQ$ wo $l > x > \xi$,

$$By = \tfrac{1}{6} l^{-1} W\xi \{\xi'(2\xi + \xi')(l-x) - (l-x)^3\}. \qquad (6)$$

Wir bemerken, daß die Durchbiegung, die in irgend einem Punkt $P$ stattfindet, wenn die Last in $Q$ angreift, gleich der Durchbiegung in $Q$ ist, wenn dieselbe Last in $P$ angreift.

Die Durchbiegung der Mitte des Balkens infolge seines Eigengewichts wie sie durch die Lösung von Fall b) bestimmt ist, ist dieselbe wie diejenige, die von $\frac{5}{8}$ des in der Mitte konzentrierten Gewichts herrühren würde.

e) *Konzentrierte Last. Eingemauerte Enden.*

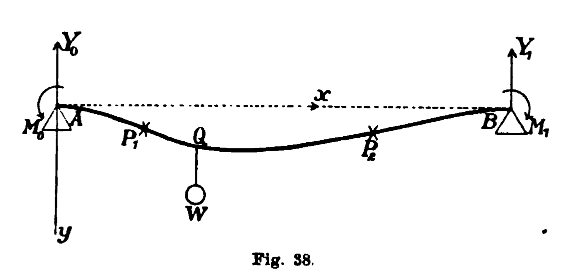



Fig. 38.

Zu den in (5) und (6) gegebenen Werten von $By$ haben wir den in (3) gegebenen Wert von $By$ zu addieren und die Konstanten $M_0$ und $M_1$ durch die Bedingungen zu bestimmen, daß $dy/dx$ in $x = 0$ und $x = l$ verschwindet. Wir finden

$$W\xi'\xi(\xi + 2\xi') - (2M_0 + M_1)l^2 = 0,$$
$$W\xi'\xi(2\xi + \xi') - (M_0 + 2M_1)l^2 = 0;$$

hieraus

$$M_0 = W\xi\xi'^2/l^2, \quad M_1 = W\xi^2\xi'/l^2.$$

Somit haben wir auf $AQ$, wo $\xi > x > 0$,

$$By = \tfrac{1}{6} l^{-3} W\xi'^2 x^2 \{3\xi(l-x) - \xi' x\}$$

und auf $BQ$, wo $l > x > \xi$,

$$By = \tfrac{1}{6} l^{-3} W\xi^2 (l-x)^2 \{3\xi' x - \xi(l-x)\}.$$

Wir bemerken, daß die Durchbiegung, die in $P$ stattfindet, wenn die Last in $Q$ angreift, gleich der Durchbiegung in $Q$ ist, wenn dieselbe Last in $P$ angreift.

Die Wendepunkte sind gegeben durch $d^2y/dx^2 = 0$, und wir finden, daß ein Wendepunkt in $P_1$ auf $AQ$ liegt, wo

$$AP_1 = AQ \cdot AB/(3AQ + BQ).$$

Ebenso liegt ein Wendepunkt in $P_2$ auf $BQ$, wo

$$BP_2 = BQ \cdot AB/(3BQ + AQ).$$

Der Punkt, in dem die Zentrallinie horizontal verläuft, ist gegeben durch $dy/dx = 0$. Liegt ein derartiger Punkt auf $AQ$, so muß er von $A$ den Abstand $2AP_1$ haben; dies ist nur möglich, wenn $AQ > BQ$. Ist

umgekehrt $AQ < BQ$, so liegt der betreffende Punkt auf $BQ$ in einem Abstand von $B$, der gleich $2\,BP_2$ ist.

Die Stützkräfte $Y_0$ und $Y_1$ sind durch die Gleichungen gegeben

$$Y_0 = W\xi'^2(3\,\xi + \xi')/l^3, \quad Y_1 = W\xi^2(\xi + 3\,\xi')/l^3.$$

## § 248. Der Dreimomentensatz.[1])

Es seien $A$, $B$, $C$ drei aufeinander folgende Stützpunkte eines durchlaufenden Trägers, der auf einer Reihe in gleicher Höhe liegender Auflager ruht; $M_A$, $M_B$, $M_C$ seien die Biegungsmomente in $A$, $B$, $C$. Die Schubkräfte zu beiden Seiten des Stützpunktes $B$ bezeichnen wir mit $B_0$ und $B_1$, entsprechend diejenigen bei den übrigen Stützpunkten. Der Stützdruck in $B$ ist gleich $B_0 + B_1$. Nun bestimmt sich $B_0$ durch die Beziehung, die aus dem Gleichgewicht der Spanne $AB$ für die um $A$ genommenen Momente folgt, und $B_1$ durch die der Spanne $BC$ entsprechende Beziehung zwischen den Momenten um $C$. Der Druck $B_0 + B_1$ läßt sich daher durch die Biegungsmomente in $A$, $B$, $C$ ausdrücken, wenn die Art der Belastung der einzelnen Spannen bekannt ist. Andererseits können wir die Durchbiegung in der Spanne $AB$ dadurch erhalten, daß wir die Durchbiegung, die von der Belastung dieser Spanne bei gestützten Enden herrührt, addieren zu derjenigen, die von den Biegungsmomenten an den Enden herrührt [§ 247, a)]. Die Durchbiegung in der Spanne $BC$ läßt sich nach demselben Verfahren bestimmen. Die Stetigkeitsbedingung für die Richtung der Zentrallinie in $B$ stellt dann eine Relation dar, die die Biegungsmomente in $A$, $B$, $C$ miteinander verknüpft. Eine ähnliche Relation gilt für irgend drei andere aufeinander folgende Stützpunkte. Diese Relation wird als Dreimomentensatz bezeichnet. Mit Hilfe dieser Relation und der speziellen Bedingungen, die im ersten und im letzten Stützpunkt gelten, können die Biegungsmomente in allen Stützpunkten berechnet werden.

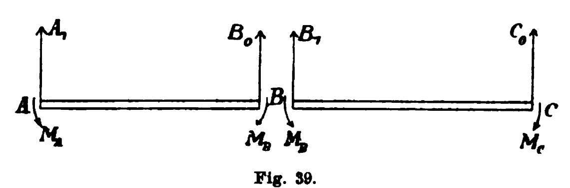


Fig. 39.

Um diese Theorie analytisch auszudrücken, wählen wir irgendwo

1) Der Satz wurde von Clapeyron aufgestellt. Siehe Einleitung, p. 28. Verschiedene Autoren haben Verallgemeinerungen desselben angegeben, u. a. M. Lévy, *Statique graphique*, t. 2, Paris 1886, der den Fall behandelt, wo die Stützpunkte nicht in gleicher Höhe liegen; R. R. Webb, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 6 (1886), der den Fall veränderlicher Biegungssteifigkeit behandelt; K. Pearson, *Messenger of Math.*, vol. 19 (1890), der den Fall behandelt, daß die Stützen etwas nachgeben.

auf der Verbindungslinie der Stützpunkte einen Koordinatenanfang, ziehen die $x$-Achse horizontal nach rechts und die $y$-Achse vertikal nach unten. Die Stützpunkte seien gegeben durch $x = a, b, c, \ldots$ Die Spannweiten, $b - a, c - b, \ldots$ bezeichnen wir mit $l_{AB}, l_{BC}, \ldots$ Wir untersuchen eine Reihe von Fällen.

a) *Gleichförmige Last.*

Es sei $w$ die Last pro Längeneinheit. Die Durchbiegung in $AB$ ist nach den Resultaten von § 247, a) und b) durch die Gleichungen gegeben

$$By = \tfrac{1}{24} w (x-a)(b-x)\{(b-a)^2 + (x-a)(b-x)\}$$
$$- \tfrac{1}{6}(x-a)(b-x)\{M_B(b+x-2a)\, M_A(2b-x-a)\}/(b-a).$$

Eine ähnliche Gleichung läßt sich für die Durchbiegung in $BC$ hinschreiben. Die Bedingung dafür, daß die beiden Werte von $dy/dx$ in $x = b$ einander gleich sind, ist

$$-\tfrac{1}{24} w (b-a)^3 + \tfrac{1}{6}(2M_B + M_A)(b-a)$$
$$= \tfrac{1}{24} w (c-b)^3 - \tfrac{1}{6}(2M_B + M_C)(c-b),$$

und die Dreimomentengleichung lautet daher

$$l_{AB}(M_A + 2M_B) + l_{BC}(2M_B + M_C) = \tfrac{1}{4} w (l_{AB}^3 + l_{BC}^3). \qquad (7)$$

Um den Stützdruck in $B$ zu bestimmen, bilden wir die Momentengleichung für $AB$ bezüglich $A$ und für $BC$ bezüglich $C$. Wir haben

$$B_0 l_{AB} - \tfrac{1}{2} w l_{AB}^2 - M_B + M_A = 0,$$
$$B_1 l_{BC} - \tfrac{1}{2} w l_{BC}^2 - M_B + M_C = 0.$$

Diese Gleichungen liefern $B_0$ und $B_1$, und der Stützdruck in $B$ ist $B_0 + B_1$. Auf diese Weise lassen sich alle Stützdrucke berechnen.

b) *Gleiche Spannweiten.*

Sind die Spannweiten einander gleich, so läßt sich Gleichung (4) als lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung in der Form schreiben

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = \tfrac{1}{2} w l^2;$$

die Lösung ist von der Form

$$M_n = \tfrac{1}{12} w l^2 + A\alpha^n + B\beta^n,$$

wo $A$ und $B$ Konstante und $\alpha$ und $\beta$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + 4x + 1 = 0$ bedeuten, sodaß

$$\alpha = -2 + \sqrt{3}, \quad \beta = -2 - \sqrt{3}.$$

Die Konstanten $A$ und $B$ sind aus den Werten von $M$ an der ersten und an der letzten Stütze zu bestimmen.

c) *Gleichförmige Belastung der einzelnen Spannen.*

Es bezeichne $w_{AB}$ die Last pro Längeneinheit auf der Spanne $AB$ und $w_{BC}$ diejenige auf $BC$. Ebenso wie in Fall a) finden wir dann die Dreimomentengleichung in der Form

$$l_{AB}(M_A + 2\,M_B) + l_{BC}(2\,M_B + M_C) = \tfrac{1}{4}\,w_{AB}l_{AB}^3 + \tfrac{1}{4}\,w_{BC}l_{BC}^3.$$

d) *Konzentrierte Last auf einer Spanne.*

Eine Last $W$ sei in einem Punkte $Q$ von $BC$, der durch $x = \xi$ gegeben ist, konzentriert. Die Durchbiegung in $AB$ ist gemäß den Resultaten von § 247, a) ausgedrückt durch die Gleichung

$$\begin{aligned}By = -\tfrac{1}{6}(x-a)(b-x)\{M_A(2b-x-a)\\ + M_B(b+x-2a)\}/(b-a),\end{aligned}$$

diejenige in $BQ$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}By = \tfrac{1}{6}\,W[(\xi-b)(c-\xi)(2c-b-\xi)(x-b)\\ -(c-\xi)(x-b)^3]/(c-b)\\ -\tfrac{1}{6}(x-b)(c-x)\{M_B(2c-x-b)+M_C(c+x-2b)\}/(c-b).\end{aligned}$$

Die Stetigkeitsbedingung für $dy/dx$ in $x = b$ ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}(M_A + 2\,M_B)(b-a) = \tfrac{1}{6}\,W(\xi-b)(c-\xi)(2c-b-\xi)/(c-b)\\ -\tfrac{1}{6}(2\,M_B + M_C)(c-b),\end{aligned}$$

und die Dreimomentengleichung für $A$, $B$, $C$ lautet daher

$$l_{AB}(M_A + 2\,M_B) + l_{BC}(2\,M_B + M_C) = W l_{BQ} l_{QC}(1 + l_{QC}/l_{BC}), \quad (8)$$

wo $l_{BQ}$ und $l_{QC}$ die Abstände des Punktes $Q$ von $B$ und $C$. Entsprechend ergibt sich, wenn $D$ der nächste Stützpunkt jenseits $C$ ist, die Dreimomentengleichung für $B$, $C$, $D$:

$$l_{BC}(M_B + 2\,M_C) + l_{CD}(2\,M_C + M_D) = W l_{BQ} l_{QC}(1 + l_{BQ}/l_{BC}). \quad (9)$$

## § 249. Graphische Lösung des Problems der durchlaufenden Träger.[1]

Die Gleichgewichtsgleichung (2), d. i. $B\dfrac{d^2y}{dx^2} = G$, ist von derselben Form wie die Gleichung der Kurve, deren Gestalt eine belastete Schnur oder Kette annimmt, wenn die auf die Längeneinheit der horizontalen Projektion entfallende Last mit $-G$ proportional ist. Denn wenn $T$ die Spannung der Schnur, $m$ die Last pro Längeneinheit der horizontalen Projektion und $ds$ das Bogenelement der Kettenlinie bezeichnet, so lauten die Gleichgewichtsgleichungen, bezogen auf ein den Festsetzungen von § 246 entsprechendes Achsensystem, folgendermaßen:

$$T\frac{dx}{ds} = \text{const.} = \tau \text{ etwa}, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + m\frac{dx}{ds} = 0;$$

---

1) Das Verfahren geht zurück auf Mohr. Siehe *Einleitung*, Fußnote 99.

durch Elimination von $T$ führen diese zu der Gleichung

$$\tau \frac{d^2 y}{dx^2} + m = 0.$$

Die Form der Kurve, in die die Zentrallinie des Balkens in jeder Spanne übergeht, ist somit die einer Kettenlinie oder Seilkurve, wie sie durch Kräfte, die für ein Stück $\delta x$ der Spanne mit $G\delta x$ proportional sind, bestimmt ist; dabei ist vorausgesetzt, daß die Seilkurve durch die Endpunkte der Spanne hindurchgeführt ist. Die Kräfte $G\delta x$ müssen aufwärts oder abwärts gerichtet sein, je nachdem $G$ positiv oder negativ ist.

Die Tangenten einer solchen Seilkurve in den Endpunkten einer Spanne können wir finden, ohne die Seilkurve selbst zu bestimmen, denn sie hängen nur von der statischen Resultanten und dem Moment der gedachten Kräfte $G\delta x$ ab. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir die Enden der Spanne mit $x = 0$ und $x = l$ und integrieren die Gleichung (2) in der Form

$$x\frac{dy}{dx} - y = \int_0^x x\frac{G}{B}\,dx, \quad (l-x)\frac{dy}{dx} + y = -\int_x^l (l-x)\frac{G}{B}\,dx;$$

hieraus erhalten wir die Gleichung

$$l\frac{dy}{dx} = \int_0^x x\frac{G}{B}\,dx - \int_x^l (l-x)\frac{G}{B}\,dx,$$

woraus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\int_0^l \frac{(l-x)\,G}{lB}\,dx, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_l = \int_0^l \frac{xG}{lB}\,dx.$$

Diese Werte hängen nur von der Resultanten und dem resultierenden Moment der Kräfte $G\delta x$ ab, die Richtung der Zentrallinie des Balkens an den Enden des Balkens würden wir demnach auch so bestimmen können, daß wir nicht für die Kräfte $G\delta x$, sondern für ein statisch gleichwertiges Kräftesystem die Seilkurve zeichnen.

Das Biegungsmoment $G$ in einem beliebigen Punkt einer Spanne $AB$ können wir bestimmen, indem wir das aus den Biegungsmomenten an den Enden für die unbelastete Spanne berechnete Kräftepaar hinzufügen zu dem Kräftepaar, das bei „gestützten“ Enden aus der Belastung der Spanne sich berechnet. Das Biegungsmoment, das von den Kräftepaaren an den Enden der Spanne herrührt, stellt sich graphisch dar durch die Ordinaten der Linie $A'B'$ in Fig. 40, wo $AA'$ und $BB'$ in irgend einem passenden Maßstab die Biegungsmomente in $A$ und $B$ repräsentieren. Das Biegungsmoment, das von der gleichförmigen Belastung der Spanne herrührt, ist gleich

$-\frac{1}{2}wx(l-x)$, wie in § 247, b) und wird durch die Ordinaten einer Parabel, Fig. 41, veranschaulicht. Das aus einer konzentrierten Last entspringende Biegungsmoment ist gleich $-Wx(l-\xi)/l$, wenn $\xi > x > 0$, und gleich $-W(l-x)\xi/l$, wenn $l > x > \xi$ [vgl. § 247, d)];

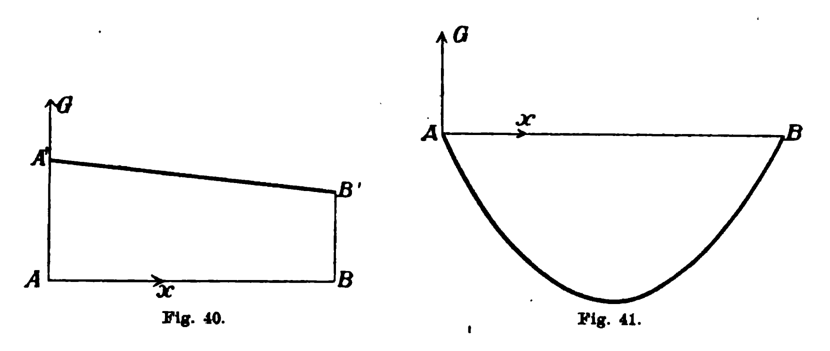



Fig. 40. Fig. 41.

es wird durch die Ordinate einer gebrochenen Linie dargestellt, Fig. 42. Das von der Belastung der Spanne herrührende Biegungsmoment möge allgemein durch die Ordinate der dick ausgezogenen Kurve in Fig. 43 dargestellt werden.

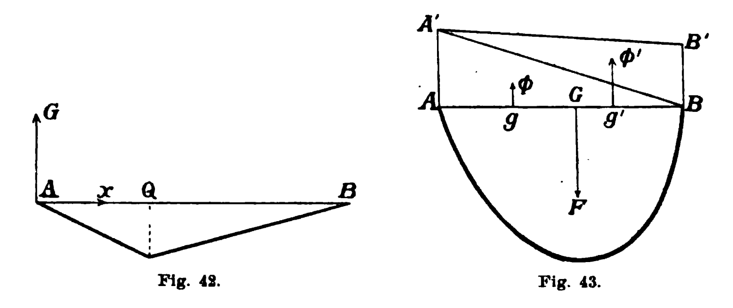



Fig. 42. Fig. 43.

Die fingierten Kräfte $G\delta x$ sind statisch gleichwertig mit folgendem Kräftesystem: 1) einer Kraft $\Phi$, die durch den Inhalt des Dreiecks $AA'B$ repräsentiert wird und im Punkte $g$ im Abstand $\frac{1}{3}AB$ von $A$ nach oben wirkt, 2) einer Kraft $\Phi'$, die durch den Inhalt des Dreiecks $A'BB'$ dargestellt ist und im Punkte $g'$ im Abstand $\frac{2}{3}AB$ von $A$ nach oben wirkt, 3) einer Kraft $F$, die durch den von $AB$ und der dick gezogenen Linie (Fig. 43) begrenzten Flächeninhalt repräsentiert wird und im Schwerpunkt dieses Flächenstücks nach unten angreift. Die Wirkungslinie von $F$ treffe $AB$ im Punkte $G$. Wenn die Spanne gleichförmig belastet ist, so ist $F=\frac{1}{6}wl^3$, und $G$ ist der Mittelpunkt von $AB$. Wenn eine Einzellast angreift, so ist $F=\frac{1}{2}W\xi(l-\xi)$ und $G$ liegt im Abstand $\frac{1}{3}(l+\xi)$ von $A$.

Die Kraft $F$ und der Punkt $G$ ist für jede Spanne bekannt,

ebenso sind die Punkte $g, g'$ bekannt. Die Kräfte $\Phi, \Phi'$ sind unbekannt, da sie den Biegungsmomenten in den Stützpunkten proportional sind; doch sind diese Kräfte durch gewisse Relationen verknüpft. Wir bezeichnen die Stützpunkte der Reihe nach mit $A_0, A_1, \ldots$, das der ersten Spanne entsprechende gleichwertige Kräftesystem mit $\Phi_1$, $\Phi_1'$, $F_1$, das der zweiten entsprechende System mit $\Phi_2$, $\Phi_2'$, $F_2$ usw. Die Biegungsmomente in den Stützpunkten seien $M_0, M_1, M_2, \ldots$ Dann ist z. B. $\Phi_1' : \Phi_2 = M_1 \cdot A_0A_1 : M_1 \cdot A_1A_2$, somit ist das Verhältnis $\Phi_1' : \Phi_2$ bekannt. Ebenso ist das Verhältnis $\Phi_2' : \Phi_3$ bekannt usw.

Wären die Kräfte $\Phi, \Phi'$ sowohl wie $F$ für irgend eine Spanne bekannt, so würden wir zu ihnen ein Seilpolygon konstruieren können, dessen äußerste Seiten durch die Endpunkte der Spanne hindurchgeführt werden könnten. Da die Richtung der Zentrallinie des Balkens in den Stützpunkten stetig ist, so liegen die äußersten Seiten der Seillinien, die von dem gemeinsamen Endpunkt zweier aufeinander folgender Spannen auslaufen, in derselben Geraden. Die Seilpolygone, die zu den verschiedenen Spannen gehören, bilden daher ein einziges Seilpolygon, das dem System aller Kräfte $\Phi, \Phi'$, $F$ entspricht.

### § 250. Ausführung des graphischen Verfahrens.

Die obigen Resultate ermöglichen es uns, das eben genannte Seileck zu konstruieren und die Kräfte $\Phi$ bzw. die Biegungsmomente in den Stützpunkten zu bestimmen, wenn die Biegungsmomente im ersten und im letzten Auflager gegeben sind. Wir betrachten den Fall, daß diese beiden Biegungsmomente gleich null sind, d. h., daß die Balkenenden „gestützt“ sind.[1]) Die Seiten des Seilecks bezeichnen wir mit 1, 2, 3, ..., sodaß die Seiten 1, 3, 6, ... durch die Stützpunkte $A_0, A_1, A_2, \ldots$ gehen.

Wir betrachten das von den Seiten 2, 3, 4 gebildete Dreieck. Zwei seiner Ecken liegen auf festen Geraden, nämlich den durch $g_1'$ und $g_2$ gehenden Vertikalen. Dann liegt auch die dritte Ecke $V_1$ auf einer festen Geraden. Denn die Seite 3 könnte durch die Kräfte $\Phi_1'$ und $\Phi_2$ und die Seilspannungen in 2 und 4 im Gleichgewicht gehalten werden, daher fällt $V_1$ in die Wirkungslinie der Resultanten von $\Phi_1'$ und $\Phi_2$; diese Linie ist aber nichts anderes als die Vertikale durch den Punkt $\alpha_1$, wo $\alpha_1 g_2 = A_1 g_1'$ und $\alpha_1 g_1' = A_1 g_2$ (da $\Phi_1' : \Phi_2 = A_1 g_1' : A_1 g_2$).

---

1) Die im Text gegebene Schilderung des graphischen Verfahrens erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Weitere Einzelheiten findet der Leser bei M. Lévy, *loc. cit.* p. 431. Auch wäre eine Arbeit von Perry und Ayrton in den *Proc. Roy. Soc.*, vol. 29 (1879) einzusehen. Eine äußerst klare Darstellung der Theorie enthält die in der *Einleitung*, Fußnote 99, angezogene Abhandlung von Canevazzi.

Der Punkt $C_2$ andererseits, in dem die Seite 2 die durch $A_0$ gehende Vertikale trifft, bestimmt sich durch die Bedingung, daß das von den Seiten 1 und 2 und der Strecke $A_0C_2$ gebildete Dreieck für den

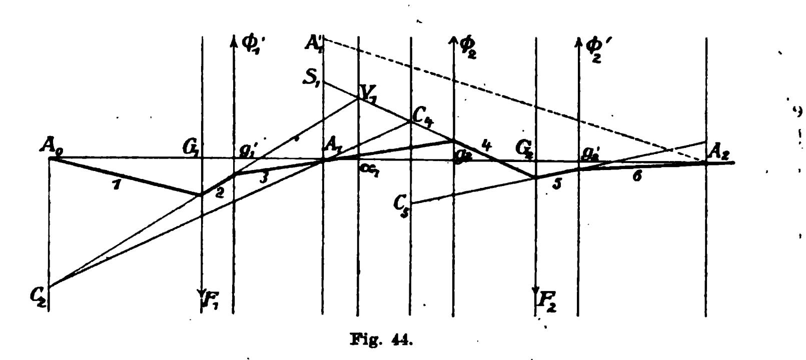



Fig. 44.

Schnittpunkt der Seiten 1 und 2 ein Kräftedreieck bedeutet, so zwar, daß $A_0C_2$ in dem gewählten Kräftemaßstab die bekannte Kraft $F_1$ darstellt. Da die Ecken des von den Seiten 2, 3, 4 gebildeten Dreiecks auf drei festen Parallelen liegen und die Seiten 2 und 3 durch die festen Punkte $C_2$ und $A_1$ gehen, so muß die Seite 4 durch einen festen Punkt $C_4$ gehen; dieser läßt sich dadurch konstruieren, daß man zwei Dreiecke zeichnet, die den gestellten Bedingungen genügen.

Der Punkt $C_2$, um den es sich oben zunächst handelt, kann willkürlich angenommen werden; ist er aber einmal gewählt, so stellt $A_0G_1$ die konstante Horizontalkomponente der Seilspannungen in demselben Maßstab dar, in dem $A_0C_2$ die Kraft $F_1$ repräsentiert.

Auf dieselbe Weise können wir zeigen, daß die Ecken des von den Seiten 5, 6, 7 gebildeten Dreiecks auf drei festen Vertikalen liegen, und daß seine Seiten durch drei feste Punkte gehen. Die Vertikale, auf der der Schnittpunkt $V_2$ der Geraden 5 und 7 liegt, geht durch den Punkt $\alpha_2$, wo $\alpha_2 g_3 = A_2 g_2'$ und $\alpha_2 g_2' = A_3 g_3$. Der feste Punkt $C_5$, durch den die Seite 5 geht, befindet sich auf der Vertikalen durch $C_4$ und zwar in einem solchen Abstand von $C_4$, daß die Seiten 4 und 5 mit $C_4C_5$ für den Schnittpunkt von 4 und 5 ein Kräftedreieck ergeben. Die Strecke $C_4C_5$ stellt dann die Kraft $F_2$ in einem Maßstab dar, der verschieden ist von demjenigen, in dem $A_0C_2$ die Kraft $F_1$ repräsentiert; denn in dem Maßstab, in dem $C_4C_5$ die Kraft $F_2$ darstellt, wird die konstante Horizontalkomponente der Seilspannung durch die horizontale Projektion von $G_2C_4$ repräsentiert. Da $C_4$ bekannt ist, so ist das Verhältnis der in Rede stehenden Maße bestimmt, und somit ist $C_5$ ermittelt. Die Seite 6 geht durch den festen Punkt $A_2$, und der feste Punkt $C_7$, durch den die Seite 7 geht, läßt sich in derselben Weise konstruieren, wie vorhin $C_4$ ermittelt wurde.

Auf diese Weise konstruieren wir zwei Serien von Punkten, $C_2, C_5, \ldots, C_{3\varkappa-1}, \ldots$ und $C_4, C_7, \ldots, C_{3\varkappa+1}, \ldots$ Ebenfalls konstruieren wir die Punktserie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varkappa, \ldots$, wo $\alpha_\varkappa g_\varkappa' = A_\varkappa g_{\varkappa+1}$ und $\alpha_\varkappa g_{\varkappa+1} = A_\varkappa g_\varkappa'$. Mit Hilfe dieser Punktserien können wir das verlangte Seileck konstruieren.

Es seien $n$ Spannen vorhanden, das Ende $A_n$ sei ebenso wie $A_0$ einfach gestützt. Die Verbindungslinie von $C_{3n-1}$ und $A_n$ stellt die letzte Seite $(3n-1)$ des Seilpolygons dar, weil die Kraft $\Phi_n'$ ebenso wie $\Phi_1$ gleich null ist. Die Seite $(3n-2)$ schneidet die Seite $(3n-1)$ auf der Wirkungslinie von $F_n$ und geht durch den Punkt $C_{3n-2}$. Die Vertikale durch $\alpha_{n-1}$ treffe sie im Punkte $V_{n-1}$. Dann stellt die Gerade $V_{n-1}C_{3n-4}$ die Seite $(3n-4)$ dar. Die Seite $(3n-3)$ bestimmt sich als Verbindungslinie des Punktes, in dem die Seite $(3n-2)$ die Vertikale durch $g_n$ schneidet mit dem Punkte, in dem die Seite $(3n-4)$ die Vertikale durch $g'_{n-1}$ trifft. Diese Seite $(3n-3)$ geht wegen der Art der Konstruktion der Punkte $C$ notwendig durch $A_{n-1}$. Auf diese Weise fortschreitend können wir das Seil konstruieren.

Ist das Seilpolygon gefunden, so können wir die Biegungsmomente in den Auflagerpunkten aus der Figur entnehmen. Beispielsweise schneide die Seite 4 die Vertikale durch $A_1$ in $S_1$. Dann stellen $A_1S_1$ und die Seiten 3 und 4 für den Schnittpunkt von 3 und 4 ein Kräftedreieck dar. Die Horizontalprojektion der nicht-vertikalen Seiten dieses Dreiecks ist gleich $\frac{1}{3}A_1A_2$. Somit stellt $A_1S_1$ die Kraft $\Phi_2$ in demselben Maßstab dar wie $\frac{1}{3}A_1A_2$ die Horizontalkomponente der Seilspannung. $A_1S_1/A_1A_2$ repräsentiert also die Kraft $\Phi_2$ in einem konstanten Maßstab. $\Phi_2$ stellt aber, ebenfalls in einem konstanten Maßstab, das Produkt von $M_1$ und $A_1A_2$ dar. Demnach repräsentiert $A_1S_1/A_1A_2^2$ das Biegungsmoment in $A_1$ in einem konstanten Maßstab. In gleicher Weise ergibt sich, wenn die Seite $(3\varkappa+1)$ die Vertikale durch $A_\varkappa$ im Punkte $S_\varkappa$ trifft, daß $A_\varkappa S_\varkappa/A_\varkappa A_{\varkappa+1}^2$ das Biegungsmoment in $A_\varkappa$ darstellt.

# Kapitel XVIII.

## Allgemeine Theorie der Drillung und Biegung dünner Stäbe.

§ 251. Außer dem Problem der durchlaufenden Träger gibt es viele physikalische und technische Probleme, die sich als Probleme langer dünner Stäbe behandeln lassen und in diesem Sinne einer angenäherten Lösung fähig sind. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der allgemeinen Theorie des Verhaltens derartiger Körper befassen, indem wir die Anwendungen der Theorie für spätere Kapitel vorbehalten. Das Neue und Besondere, was bei dieser Theorie in Betracht zu ziehen ist, liegt darin, daß die gegenseitigen Verschiebungen eines langen dünnen Stabes durchaus nicht klein zu sein brauchen, die Verzerrungen aber gleichzeitig in allen Teilen des Stabes so klein sein können, daß die mathematische Theorie anwendbar ist. Dieser Umstand macht einige spezielle kinematische Untersuchungen notwendig, die die in Kapitel I erledigte allgemeine Analyse der Verzerrung ergänzen.

### § 252. Kinematik dünner Stäbe.[1])

Im ungespannten Zustand sei der Stab zylindrisch oder prismatisch, sodaß homologe Strecken verschiedener Querschnitte einander parallel sind. Wird der Stab einfach gedrillt und nicht zugleich gebogen, so werden Linienelemente verschiedener Querschnitte, die im ungespannten Zustand parallel sind, gegeneinander geneigt. Wir greifen eine Schar von Linienelementen heraus, die im ungespannten Zustand einander parallel sind und, von den Schwerpunkten der Querschnitte auslaufend, in die Richtung der Hauptträgheitsachsen fallen. Die Richtungen zweier solcher Elemente, die in Querschnitten liegen, deren Abstand gleich $\delta s$ ist, mögen im verzerrten Zustand den Winkel $\delta f$ einschließen. Dann mißt $\lim_{\delta s = 0} \delta f / \delta s$ den *Drall* (engl. „*twist*").

1) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 94ff., und Kirchhoff, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 56 (1859) = *Ges. Abhandlungen* (Leipzig 1882), p. 285 = *Vorlesungen über math. Physik, Mechanik*, Vorlesung 28.

Wird der Stab gebogen, so kann der Drall nicht ganz so einfach gemessen werden. Wir wollen annehmen, daß die Zentrallinie in eine krumme Linie von der Krümmung $1/\varrho$ und der Windung $1/\Sigma$ übergeht. Wir wählen ein festes (x, y, z)-Koordinatensystem, und zwar sei die z-Achse der Zentrallinie im ungespannten Zustand parallel, die x- und die y-Achse seien den von den Schwerpunkten ausgehenden Hauptträgheitsachsen der Querschnitte im gleichen Zustand parallel. $P$ sei ein beliebiger Punkt der Zentrallinie, und im ungespannten Zustand mögen drei Linienelemente im Stabe von $P$ nach den Richtungen der (x, y, z)-Achsen auslaufen. Wenn der Stab deformiert wird, so bleiben diese Linienelemente im allgemeinen nicht rechtwinklig zu einander; mit ihrer Hilfe können wir jedoch ein System orthogonaler $(x, y, z)$-Achsen konstruieren. Der Anfangspunkt dieses Systems ist durch den Ort $P_1$ von $P$ nach der Verschiebung gegeben, die $z$-Achse ist die Tangente der verzerrten Zentrallinie in $P_1$, und die $(x, z)$-Ebene enthält das Linienelement, das im ungespannten Zustand von $P$ in der Richtung der x-Achse ausläuft. Die $(x, z)$-Ebene stellt eine „Hauptebene" des Stabes dar. Der Richtungssinn der $x$-Achse kann willkürlich gewählt werden. Die $z$-Achse wird in der Richtung positiv gerechnet, in der die Bogenlänge der Zentrallinie, von einem festen Punkte derselben aus gemessen, zunimmt; der Richtungssinn der $y$-Achse bestimmt sich dann durch die Bedingung, daß die $(x, y, z)$-Achsen ein rechtshändiges System bilden. Das in der oben bezeichneten Weise für einen Punkt der Zentrallinie konstruierte Achsensystem bezeichnen wir als die „Torsion-Biegungs-Hauptachsen" (engl. „principal torsion-flexure axes") des Stabes in diesem Punkte.

Es sei $P'$ ein Punkt der Zentrallinie in der Nähe von $P$, $P_1'$ der Ort desselben nach der Verschiebung. Die Länge $\delta s_1$ des Bogenstücks $P_1 P_1'$ der verzerrten Zentrallinie wird sich etwas von der Länge $\delta s$ von $PP'$ unterscheiden. Ist $\varepsilon$ die *Dehnung* der Zentrallinie in $P_1$, so haben wir

$$\lim_{\delta s = 0} (\delta s_1/\delta s) = 1 + \varepsilon. \tag{1}$$

Die Dehnung $\varepsilon$ kann gleich null sein. Sie muß, wenn die mathematische Elastizitätstheorie anwendbar sein soll, eine kleine Größe von der Größenordnung der Verzerrungen sein, mit denen die Theorie sich befaßt.

Die Spitze eines Dreikants zu einander senkrechter Achsen $(x, y, z)$ bewege sich mit der Geschwindigkeit eins längs der verzerrten Zentrallinie des Stabes, und die drei Achsen mögen stets die Richtung der Torsion-Biegungs-Hauptachsen des Stabes in der Spitze des Dreikants haben. Wir wollen die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Dreikant dreht, nach den instantanen Achsenrichtungen in Komponenten zerlegen. Wir bezeichnen diese Komponenten mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$. Dann

sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ die *Komponenten der Krümmung* der verzerrten Zentrallinie in $P_1$, und $\tau$ ist der *Drall* des Stabes in $P_1$.

Wir können diese Aussage als Definition des Dralls und der Krümmungskomponenten ansehen. Offenbar deckt sich die neue Definition des Dralls mit derjenigen, die wir oben im Falle eines nichtgebogenen Stabes aufstellten, und ersichtlich sind $\varkappa$, $\varkappa'$ die (geometrisch definierten) Krümmungen der Projektionen der verzerrten Zentrallinie auf die $(y, z)$- und die $(x, z)$-Ebene; die Resultante von $\varkappa$ und $\varkappa'$ ist daher ein Vektor von der Richtung der Binormalen der verzerrten Zentrallinie und vom Betrage $1/\varrho$ der Krümmung dieser Kurve.

## § 253. Kinematische Formeln.

Wir untersuchen an erster Stelle die Beziehung zwischen dem Drall des Stabes und der Windung seiner verzerrten Zentrallinie. Es mögen $l, m, n$ die Richtungskosinus der Binormalen dieser Kurve in $P_1$, bezogen auf die Torsion-Biegungs-Hauptachsen in $P_1$, und $l'$, $m'$, $n'$ die Richtungskosinus der Binormalen in $P_1'$, bezogen auf die Torsion-Biegungs-Hauptachsen in $P_1'$, bezeichnen. Die Grenzwerte $\lim\limits_{\delta s_1 = 0} (l' - l)/\delta s_1, \ldots$ bezeichnen wir dann mit $dl/ds_1, \ldots$ Ferner mögen $l + \delta l, \ldots$ die Richtungskosinus der Binormalen in $P_1'$, bezogen auf die Torsion-Biegungs-Hauptachsen in $P_1$, bezeichnen. Wir haben dann die Formeln[1])

$$\lim_{\delta s_1 = 0} \delta l/\delta s_1 = dl/ds_1 - m\tau + n\varkappa',$$

$$\lim_{\delta s_1 = 0} \delta m/\delta s_1 = dm/ds_1 - n\varkappa + l\tau,$$

$$\lim_{\delta s_1 = 0} \delta n/\delta s_1 = dn/ds_1 - l\varkappa' + m\varkappa.$$

Die Windung $1/\Sigma$ der verzerrten Zentrallinie ist gegeben durch die Formel

$$1/\Sigma^2 = \lim_{\delta s_1 = 0} [(\delta l)^2 + (\delta m)^2 + (\delta n)^2]/(\delta s_1)^2;$$

das Vorzeichen von $\Sigma$ bestimmt sich durch die gegenseitige Lage der positiven Richtungen der Hauptnormale, der Binormale und der Tangente der Kurve. Wir nehmen an, die (in Fig. 45 mit $n$ bezeichnete) Hauptnormale sei nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtet, die Tangente sei im Sinne wachsender Bogenlänge $s_1$ gezogen und die (in Fig. 45 mit $b$ bezeichnete) Binormale sei so gerichtet,

1) Vgl. E. J. Routh, *Dynamics of a system of rigid bodies* (London 1884), Teil II, Kap. I.

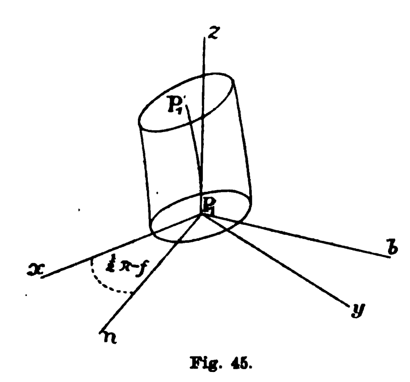



Fig. 45.

daß die Hauptnormale, die Binormale und die Tangente, in dieser Reihenfolge genommen, den Achsen eines rechtshändigen Systems parallel sind. Wir können nun setzen

$$l = \varkappa\varrho = -\cos f,$$

$$m = \varkappa'\varrho = \sin f, \quad n = 0,$$

wo $\varrho$ der Krümmungsradius; dann ist $\frac{1}{2}\pi - f$ der Winkel zwischen der Hauptebene $(x, z)$ des Stabes und der Hauptnormalen der verzerrten Zentrallinie. Substituieren wir in den Ausdruck für $1/\Sigma^2$ und verfahren nach obiger Verabredung, so erhalten wir die Gleichung

$$\tau = \frac{df}{ds_1} + \frac{1}{\Sigma}, \tag{2}$$

wo

$$\operatorname{tg} f = -(\varkappa'/\varkappa). \tag{3}$$

Die Notwendigkeit, einen Winkel wie $f$ in die Theorie einzuführen, wurde zuerst von Saint-Venant bemerkt.[1]) Von den Autoren, die vorher den Gegenstand behandelt hatten, war nur der Fall, daß $f$ verschwindet oder konstant ist, betrachtet worden. Die Linienelemente, die im deformierten Stabe von der verzerrten Zentrallinie in Richtung der Hauptnormalen dieser Kurve auslaufen, fallen im ungespannten Zustand nahezu mit einer Schar zur Zentrallinie senkrechter Linien zusammen. Wenn $f$ verschwindet oder konstant ist, so sind diese Linienelemente im ungespannten Zustand parallel. Von einem gebogenen und gedrillten Stabe, in dem $f$ verschwindet oder konstant ist, können wir sagen: der Stab würde, wenn die Biegung allein rückgängig gemacht würde, prismatisch werden; ist $f$ veränderlich, so würde der Stab, wenn die Biegung allein rückgängig gemacht würde, ein gedrilltes Prisma vorstellen, und der Drall würde gleich $df/ds_1$ sein.

Um nun $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$ zu berechnen, denken wir die $(x, y, z)$-Achsen in $P_1$ mit einem *beliebigen* festen Koordinatensystem $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ durch folgendes Orthogonalschema verknüpft:

| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| $x$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

(4)

1) *Paris C. R.*, t. 17 (1843).

es bedeuten also z. B. $l_1$, $m_1$, $n_1$ die Richtungskosinus der $x$-Achse in $P_1$, bezogen auf die festen Achsen. Wir haben die neun Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} dl/ds_1 = l_2\tau - l_3\varkappa', & dl_2/ds_1 = l_3\varkappa - l_1\tau, \\ dm_1/ds_1 = m_2\tau - m_3\varkappa', & dm_2/ds_1 = m_3\varkappa - m_1\tau, \\ dn_1/ds_1 = n_2\tau - n_3\varkappa', & dn_2/ds_1 = n_3\varkappa - n_1\tau, \\ \multicolumn{2}{c}{dl_3/ds_1 = l_1\varkappa' - l_2\varkappa,} \\ \multicolumn{2}{c}{dm_3/ds_1 = m_1\varkappa' - m_2\varkappa,} \\ \multicolumn{2}{c}{dn_3/ds_1 = n_1\varkappa' - n_2\varkappa;} \end{array}\right\} \quad (5)$$

dieselben drücken die Bedingungen aus, daß die (x, y, z)-Achsen fest sind, während die $(x, y, z)$-Achsen sich mit der Winkelgeschwindigkeit $(\varkappa, \varkappa', \tau)$ bewegen.[1] Wir erhalten daraus Gleichungen wie z. B.

$$\varkappa = l_3 \frac{dl_2}{ds_1} + m_3 \frac{dm_2}{ds_1} + n_3 \frac{dn_2}{ds_1}.$$

Die Differentiationen nach $s_1$ können, da $\varepsilon$ klein ist, durch Differentiationen nach $s$ ersetzt werden, vorausgesetzt daß die linken Seiten der Gleichungen mit $1 + \varepsilon$ multipliziert werden. Wenn $\varkappa, \varkappa', \tau$ selbst klein sind und Größen von der Ordnung $\varepsilon\varkappa$ vernachlässigt werden können, so ist der Faktor $1 + \varepsilon$ durch eins zu ersetzen. Werden $\varkappa, \varkappa', \tau$ nicht als kleine Größen angesehen, so können wir für ihre Werte eine erste Annäherung erhalten, indem wir $1 + \varepsilon$ durch eins ersetzen. Um $\varkappa, \varkappa', \tau$ abzuschätzen, können wir demnach den Unterschied zwischen $ds_1$ und $ds$ außer Acht lassen und unsere Formeln folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= l_3 \frac{dl_2}{ds} + m_3 \frac{dm_2}{ds} + n_3 \frac{dn_2}{ds}, \\ \varkappa' &= l_1 \frac{dl_3}{ds} + m_1 \frac{dm_3}{ds} + n_1 \frac{dn_3}{ds}, \\ \tau &= l_2 \frac{dl_1}{ds} + m_2 \frac{dm_1}{ds} + n_2 \frac{dn_1}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Richtungskosinus $l_1, \ldots$ können durch drei Winkel $\theta, \Psi, \Phi$ ausgedrückt werden, wie in der Theorie der Bewegung eines starren Körpers üblich ist. Es sei $\theta$ der Winkel, den die $z$-Achse in $P_1$ mit der festen z-Achse bildet, $\Psi$ der Winkel, den eine zu diesen Achsen parallele Ebene mit der festen (x, z)-Ebene einschließt, und $\Phi$ der Winkel, den die Hauptebene (x, z) des Stabes in $P_1$ mit der Ebene z$P_1 z$ bildet. Die in Rede stehenden Richtungskosinus drücken sich dann aus durch die Gleichungen

1) Vgl. E. J. Routh, *loc. cit.* p. 441.

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= -\sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi\cos\theta, & m_1 &= \cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Phi\cos\theta,\\
l_2 &= -\sin\Psi\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi\cos\theta, & m_2 &= \cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\sin\Phi\cos\theta,\\
l_3 &= \sin\theta\cos\Psi, & m_3 &= \sin\theta\sin\Psi,\\
n_1 &= -\sin\theta\cos\Phi, & &\\
n_2 &= \sin\theta\sin\Phi, & &\\
n_3 &= \cos\theta. & &
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

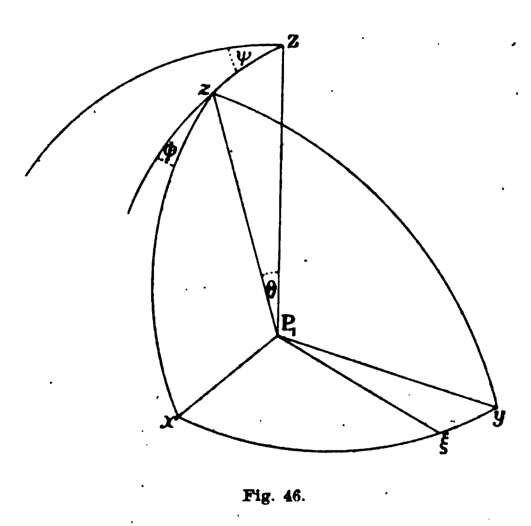


Fig. 46.

Die Beziehungen zwischen $d\theta/ds$, $d\Psi/ds$, $d\Phi/ds$ und $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$ ergeben sich ohne weiteres aus Fig. 46, da $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$ die Projektionen auf die Torsion-Biegungs-Hauptachsen in $P_1$ von einem Vektor darstellen, der mit den in gewissen Geraden gelegenen Vektoren $d\theta/ds$, $d\Psi/ds$, $d\Phi/ds$ gleichwertig ist. Die Gerade $P_1\xi$, in die $d\theta/ds$ fällt, steht senkrecht zur Ebene $\mathrm{z}P_1z$, und $d\Psi/ds$ und $d\Phi/ds$ sind in den Geraden $P_1\mathrm{z}$ und $P_1z$ gelegen. Wir haben daher die Gleichungen

$$\varkappa = \frac{d\Phi}{ds}\sin\Phi - \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\cos\Phi, \quad \varkappa' = \frac{d\theta}{ds}\cos\Phi + \frac{d\psi}{ds}\sin\theta\sin\Phi,$$

$$\tau = \frac{d\Phi}{ds} + \frac{d\psi}{ds}\cos\theta. \tag{8}$$

## § 254. Gleichungen des Gleichgewichts.

Wenn der Stab deformiert wird, so drückt sich die Wirkung desjenigen Teils, der auf der einen Seite eines Querschnitts liegt, auf den andern Teil in der gewohnten Weise durch Spannungen aus, die auf die Flächeneinheit des Querschnitts bezogen sind. Diese Spannungen sind statisch gleichwertig mit einer im Schwerpunkt des Querschnitts angreifenden Kraft und einem Kräftepaar. Da die $z$-Achse in diesem Punkt in die Richtung der Zentrallinie fällt, so sind die Spannungen auf den Querschnitt mit $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ zu bezeichnen. Die zu den $(x, y, z)$-Achsen parallelen Komponenten der Resultanten und des resultierenden Moments dieser Spannungen sind $N$, $N'$, $T$ und $G$, $G'$, $H$, wo

$$\left.\begin{aligned} N&=\iint X_z\,dx\,dy, & N'&=\iint Y_z\,dx\,dy, & T&=\iint Z_z\,dx\,dy,\\ G&=\iint yZ_z\,dx\,dy, & G'&=\iint -xZ_z\,dx\,dy, & H&=\iint (xY_z-yX_z)\,dx\,dy;\end{aligned}\right\}(9)$$

dabei sind die Integrationen über den Querschnitt erstreckt. Die Kräfte $N$, $N'$ sind „Schubkräfte", die Kraft $T$ ist die „Zugbeanspruchung", die Kräftepaare $G$, $G'$ sind die „Biegungsmomente", das Kräftepaar $H$ ist das „Drillungsmoment". Die Kräfte $N$, $N'$, $T$ wollen wir die *Spannungsresultanten* (engl. *stress-resultants*), und die Kräftepaare $G$, $G'$, $H$ die *Spannungsmomente* (engl. *stress-couples*) nennen.

Die am Stabe angreifenden Kräfte messen wir durch ihre Resultante und ihr resultierendes Moment pro Längeneinheit der Zentrallinie; hierbei können wir die Dehnung dieser Linie außer Betracht lassen. Die Kräfte, die an dem Stück des Stabes angreifen, das von den durch $P_1$ und $P_1'$ gelegten Querschnitten begrenzt wird, mögen statisch sich auf eine Kraft $P_1$ und ein Kräftepaar reduzieren; die Komponenten dieser Kraft und dieses Kräftepaars, bezogen auf die Torsion-Biegungs-Hauptachsen in $P_1$, bezeichnen wir mit $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ bezw. $[K]$, $[K']$, $[\Theta]$. Wenn $P_1'$ mit $P_1$ zur Deckung gebracht wird, so verschwinden alle diese Größen, die Quotienten $[X]/\delta s, \ldots$ können jedoch endliche Grenzwerte haben. Wir schreiben

$$\lim_{\delta s=0}[X]/\delta s = X, \ldots, \quad \lim_{\delta s=0}[K]/\delta s = K, \ldots;$$

dann sind $X$, $Y$, $Z$ die Komponenten der Kraftresultanten in $P_1$ pro Längeneinheit der Zentrallinie, und $K$, $K'$, $\Theta$ sind die Komponenten des resultierenden Moments.

Die Kräfte, die an dem von zwei Querschnitten begrenzten Stabstück angreifen, halten nun der Resultanten und dem resultierenden Moment der Spannungen auf diese Querschnitte das Gleichgewicht. Das Zeichen $\delta$ beziehe sich auf den Betrag, um den der zum Querschnitt durch $P_1'$ gehörende Wert einer Größe den zum Querschnitt durch $P_1$ gehörenden Wert übersteigt. x, y, z seien die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten von $P_1$, x′, y′, z′ diejenigen eines Punktes der Zentrallinie zwischen $P_1$ und $P_1'$. Nach Schema (4) können wir ohne weiteres die Gleichungen des Gleichgewichts hinschreiben, z. B.

$$\delta\,(l_1 N + l_2 N' + l_3 T) + \int_s^{s+\delta s} (l_1 X + l_2 Y + l_3 Z)\,ds = 0$$

und

$$\delta(l_1 G + l_2 G' + l_3 H) + \delta y\,\{(n_1 N + n_2 N' + n_3 T) + \delta(n_1 N + n_2 N' + n_3 T)\} \\ - \delta z (m_1 N + m_2 N' + m_3 T) + \delta(m_1 N + m_2 N' + m_3 T)\}$$

$$+ \int_s^{s+\delta s} \{(y' - y)(n_1 X + n_2 Y + n_3 Z) - (z' - z)(m_1 X + m_2 Y + m_3 Z)\} ds$$

$$+ \int_s^{s+\delta s} (l_1 K + l_2 K + l_3 \Theta) = 0.$$

Wir dividieren die linken Seiten dieser Gleichungen durch $\delta s$ und gehen zur Grenze über, indem wir $\delta s$ unbegrenzt abnehmen lassen. Diese Operation erfordert die Ausführung gewisser Differentiationen. Die Ableitungen von $l_1, \ldots$ sind durch die Gleichungen (5) ausgedrückt, da die Dehnung der Zentrallinie zu vernachlässigen ist. Wir lassen die festen (x, y, z)-Achsen mit den Torsion-Biegungs-Hauptachsen des Stabes in $P_1$ zusammenfallen. Nach Ausführung der Differentiationen setzen wir dann $l_1 = 1$, $m_1 = 0$ usw. Die Grenzwerte von $\delta x/\delta s$, $\delta y/\delta s$, $\delta z/\delta s$ sind 0, 0, 1. Die Grenzwerte der Größen

$$(\delta s)^{-1} \int_s^{s+\delta s} (l_1 X + l_2 Y + l_3 Z)\, ds, \ldots, \quad (\delta s)^{-1} \int_s^{s+\delta s} (l_1 K + l_2 K' + l_3 \Theta) ds, \ldots$$

sind $X$, $Y$, $Z$ und $K$, $K'$, $\Theta$. Die Grenzwerte der Größen

$$(\delta s)^{-1} \int_s^{s+\delta s} (y' - y)(n_1 X + n_2 Y + n_3 Z)\, ds, \ldots$$

sind null. Wir erhalten daher für die Gleichgewichtsgleichungen folgende Form[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{ds} - N'\tau + T\varkappa' + X &= 0, \\ \frac{dN'}{ds} - T\varkappa + N\tau + Y &= 0, \\ \frac{dT}{ds} - N\varkappa' + N'\varkappa + Z &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{ds} - G'\tau + H\varkappa' - N' + K &= 0, \\ \frac{dG'}{ds} - H\varkappa + G\tau + N + K' &= 0, \\ \frac{dH}{ds} - G\varkappa' + G'\varkappa + \Theta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Außer diesen Gleichungen haben wir im allgemeinen gewisse

1) Die Gleichungen wurden von Clebsch, *Elastizität*, § 50, aufgestellt, waren aber tatsächlich bereits in der Arbeit von Kirchhoff, *loc. cit.* p. 489, enthalten.

spezielle Bedingungen, die an den Enden des Stabes gelten. Es kann sich dabei um Befestigungsbedingungen oder darum handeln, daß die an den Enden des Stabes angreifenden Kräfte und Kräftepaare gegeben sind. Im letzteren Falle sind die Endwerte der Spannungsresultanten und Spannungsmomente vorgeschrieben. Diese speziellen Bedingungen dienen zur Bestimmung der Konstanten, die bei der Integration der Gleichgewichtsgleichungen eingeführt werden.

## § 255. Die übliche Näherungstheorie.

Die Gleichgewichtsgleichungen enthalten neun unbekannte Größen: $N$, $N'$, $T$, $G$, $G'$, $H$, $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$. Könnte man drei weitere Gleichungen zwischen diesen Größen finden, so würden wir offenbar eine hinreichende Zahl von Gleichungen zur Bestimmung der Krümmung und des Dralls des Stabes und der Spannungsresultanten und Spannungsmomente haben. Die übliche Näherungstheorie — eine Verallgemeinerung der „Bernoulli-Eulerschen“ Theorie — geht aus von der Annahme, daß die Spannungsmomente mit der Krümmung und dem Drall des Stabes durch Gleichungen von folgender Form verknüpft sind:

$$G = A\varkappa, \quad G' = B\varkappa', \quad H = C\tau, \tag{12}$$

wo $A$, $B$, $C$ Konstanten sind, die von der Elastizität des Materials und der Gestalt des Querschnitts abhängen. Von den in verhältnismäßig einfachen Fällen erhaltenen Resultaten her ist die Art dieser Abhängigkeit bekannt. Für isotropes Material würden wir haben

$$A = E\omega k^2, \quad B = E\omega k'^2,$$

wo $E$ der Youngsche Modul des Materials, $\omega$ der Flächeninhalt des Querschnitts und $k$, $k'$ die Trägheitsradien des Querschnitts, bezogen auf die $x$- und die $y$-Achse, d. h. die Hauptachsen im Schwerpunkt. In demselben Falle würde $C$ die in Kap. XIV betrachtete Drillungssteifigkeit sein. Besitzt der Querschnitt des Stabes kinetische Symmetrie, sodaß $A = B$, so sind die Biegungsmomente $G$, $G'$, wie sie durch die Formeln (12) ausgedrückt sind, gleichwertig mit einem einzigen Kräftepaar, dessen Achse die Binormale der verzerrten Zentrallinie und dessen Betrag $B/\varrho$ ist, wo $\varrho$ der Krümmungsradius dieser Kurve.

Die Theorie ist offenbar unvollständig, solange nicht gezeigt ist, daß die Formeln (12) wenigstens annähernd richtig sind. Eine Untersuchung dieser Frage, die sich zum Teil auf die Arbeiten von Kirchhoff und von Clebsch stützt[1]), wird nachstehend dargelegt werden.

1) Siehe *Einleitung*, p. 29.

## § 256. Natur des Verzerrungszustandes in einem gebogenen und gedrillten Stab.

In der Kirchhoffschen Theorie der dünnen Stäbe spielen gewisse kinematische Gleichungen eine große Rolle. Mit diesen Gleichungen hat es einige Schwierigkeit, und die folgende direkte, wenn auch etwas langwierige Untersuchung schlagen wir vor als Ersatz für den kinematischen Teil der Kirchhoffschen Theorie. Ein dünner Stab werde gebogen, sodaß die Zentrallinie eine gewisse Krümmung besitzt, und gedrillt, sodaß der „Drall“ einen gewissen Wert hat; wir suchen die etwaigen Beschränkungen festzustellen, die sich dadurch für die Verzerrung in dem Stabe ergeben. Der größeren Allgemeinheit halber nehmen wir an, daß die Zentrallinie auch eine gewisse Dehnung erfährt.

Wir können uns nun sicherlich einen Zustand des Stabes vorstellen, bei dem die Querschnitte eben und zur Zentrallinie senkrecht bleiben und in ihrer Ebene keine Verzerrung erfahren; jeder Querschnitt möge überdies in der Normalebene der Zentrallinie so orientiert sein, daß der Drall, wie er oben definiert wurde, den vorgeschriebenen Wert hat. Um diesen Zustand des Stabes auszudrücken, bezeichnen wir mit $x$, $y$ die Koordinaten eines Punktes $Q$, der in einem Querschnitt mit dem Schwerpunkt $P$ liegt, bezogen auf die Hauptachsen dieses Querschnitts in $P$. Wird der Querschnitt in der oben dargelegten Weise als Ganzes verschoben, so rückt der Punkt $P$ nach $P_1$, und die Koordinaten von $P_1$, bezogen auf beliebige feste Achsen, mögen mit $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$ bezeichnet werden. Die Hauptachsen des Querschnitts in $P$ rücken in die Lage der $x$- und der $y$-Achse in $P_1$, wie sie in § 252 definiert wurden. Der oben beschriebene Stabzustand ist daher so beschaffen, daß die auf die festen Achsen bezogenen Koordinaten des Punkes $Q_1$, in den $Q$ verschoben ist, lauten

$$\mathrm{x} + l_1 x + l_2 y, \quad \mathrm{y} + m_1 x + m_2 y, \quad \mathrm{z} + n_1 x + n_2 y,$$

wo $l_1, \ldots$ die durch Schema (4) definierten Richtungskosinus.

Jeder Stabzustand, der die richtige Dehnung und Krümmung der Zentrallinie und den richtigen Drall in sich schließt, läßt sich aus dem eben beschriebenen Zustand durch eine Verschiebung ableiten, die im Falle eines dünnen Stabes sehr klein ist, denn ein Punkt jedes Querschnitts und eines der durch jede Tangente der Zentrallinie gelegten Ebenenelemente bleiben unverschoben. Es seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Komponenten dieser hinzukommenden Verschiebung des Punktes $Q$, bezogen auf die $(x, y, z)$-Achsen im Punkte $P_1$. Die auf die festen Achsen bezogenen Koordinaten der Endlage von $Q$ sind

$$\mathrm{x} + l_1 (x + \xi) + l_2 (y + \eta) + l_3 \zeta, \quad \mathrm{y} + m_1 (x + \xi) + m_2 (y + \eta) + m_3 \zeta,$$
$$\mathrm{z} + n_1 (x + \xi) + n_2 (y + \eta) + n_3 \zeta. \tag{13}$$

Um die Verzerrung in dem Stabe zu berechnen, nehmen wir in der Nähe von $Q$ einen Punkt $Q'$ an. Im unverzerrten Zustand wird $Q'$ im allgemeinen in einem andern als dem durch $P$ gelegten Normalschnitt liegen. Er befinde sich etwa in dem durch $P'$ gelegten Normalschnitt, sodaß der Bogen $PP' = \delta s$. Die Koordinaten von $Q'$, bezogen auf die Hauptachsen des durch $P'$ gelegten Querschnitts in $P'$, seien $x + \delta x$, $y + \delta y$. Dann sind $\delta x$, $\delta y$, $\delta s$ die Projektionen des Linienelements $QQ'$ auf die festen Achsen. $r$ sei die Länge dieses Elements, und wir schreiben

$$\delta x = lr, \quad \delta y = mr, \quad \delta s = nr,$$

sodaß $l$, $m$, $n$ die Richtungskosinus der Geraden $QQ'$, bezogen auf die festen Achsen. Für die Koordinaten der Endlage von $Q'$ gelten ähnliche Formeln wie (13), und wir können daher die Länge $r_1$ der die Endlagen von $Q$, $Q'$ verbindenden Strecke durch $r$ und $l$, $m$, $n$ ausdrücken. Da die Richtung $l$, $m$, $n$ willkürlich ist, so liefert uns das Resultat die sechs Verzerrungskomponenten.

Bei Berechnung von $r_1$ müssen wir alle Größen, die $r$ enthalten, bis auf Glieder erster Ordnung genau ausdrücken, die höheren Potenzen von $r$ dagegen können wir vernachlässigen. Um die Ausdrücke für die Koordinaten der Endlage von $Q'$ zu erhalten, sehen wir zu, welche Änderungen die einzelnen Glieder von (13) erleiden. Die Größen $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$, $l_1, \ldots$ sind nur Funktionen von $s$, die Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ jedoch sind Funktionen von $x$, $y$, $s$. Demnach müssen wir in (13)

$$\mathrm{x} \text{ durch } \mathrm{x} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s} nr, \quad \mathrm{y} \text{ durch } \mathrm{y} + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial s} nr, \quad \mathrm{z} \text{ durch } \mathrm{z} + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial s} nr,$$

$$l_1 \text{ durch } l_1 + \frac{\partial l_1}{\partial s} nr, \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x \text{ durch } x + lr, \quad y \text{ durch } y + mr,$$

$$\xi \text{ durch } \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} lr + \frac{\partial \xi}{\partial y} mr + \frac{\partial \xi}{\partial s} nr, \ldots$$

ersetzen.

Ferner sind die Größen $\partial \mathrm{x}/\partial s, \ldots$ gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial s} = (1+\varepsilon)\, l_3, \quad \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial s} = (1+\varepsilon)\, m_3, \quad \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial s} = (1+\varepsilon)\, n_3,$$

und die Größen $\partial l_1/\partial s, \ldots$ sind gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{\partial l_1}{\partial s} = (1+\varepsilon)\,(l_2 \tau - l_3 \varkappa'), \ldots$$

. . . . . . . . . . . . .

wo die Koeffizienten von $(1+\varepsilon)$ die rechten Seiten der Gleichungen (5).

Hieraus folgt, daß die Differenz der x-Koordinaten der Endlagen von $Q$ und $Q'$ folgenden Wert hat:

$$r\Big[(1+\varepsilon)\,l_3 n + l_1\left\{\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)l + \frac{\partial\xi}{\partial y}m + \frac{\partial\xi}{\partial s}n\right\} + (1+\varepsilon)(l_2\tau - l_3\varkappa')\,n\,(x+\xi)$$
$$+ l_2\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}l + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)m + \frac{\partial\eta}{\partial s}n\right\} + (1+\varepsilon)(l_3\varkappa - l_1\tau)\,n\,(y+\eta)$$
$$+ l_3\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}l + \frac{\partial\zeta}{\partial y}m + \frac{\partial\zeta}{\partial s}n\right\} + (1+\varepsilon)(l_1\varkappa' - l_2\varkappa)\,n\,\zeta\Big].$$

Entsprechende Ausdrücke haben wir für die Differenzen der y- und der z-Koordinaten; $l_1$, $l_2$, $l_3$ sind darin durch $m_1$, $m_2$, $m_3$ bezw. durch $n_1$, $n_2$, $n_3$ ersetzt. Da (4) ein Orthogonalschema darstellt, so erhalten wir, wenn wir diese Ausdrücke quadrieren und addieren,

$$r^2\left[\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)l + \frac{\partial\xi}{\partial y}m + \frac{\partial\xi}{\partial s}n + (1+\varepsilon)\,n\left\{\varkappa'\zeta - \tau(y+\eta)\right\}\right]^2$$
$$+ r^2\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}l + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)m + \frac{\partial\eta}{\partial s}n + (1+\varepsilon)\,n\left\{\tau(x+\xi) - \varkappa\zeta\right\}\right]^2$$
$$+ r^2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}l + \frac{\partial\zeta}{\partial y}m + \frac{\partial\zeta}{\partial s}n + (1+\varepsilon)\,n\left\{1 + \varkappa(y+\eta) - \varkappa'(x+\xi)\right\}\right]^2, \tag{14}$$

und dies ist gleich $r_1^2$. Wir haben somit $r_1^2$ in Form einer homogenen quadratischen Funktion von $l$, $m$, $n$ ausgedrückt.

Da nun die Verzerrungen klein sind, so ist $r_1$ nahezu gleich $r$, und wir können schreiben

$$r_1^2 = r^2(1+2e),$$

wo $e$ die Dehnung in der Richtung $l$, $m$, $n$. Ferner werden wir haben

$$e = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{yz}mn + e_{zx}nl + e_{xy}lm,$$

wo die Größen $e_{xx}, \ldots$ die sechs Verzerrungskomponenten. Der Koeffizient von $l$ in der ersten Zeile des Ausdrucks (14) muß ungefähr gleich eins sein, und die Koeffizienten von $m$ und $n$ in derselben Zeile müssen nahezu null sein. Entsprechendes gilt mutatis mutandis für die Koeffizienten von $l$, $m$, $n$ in den beiden anderen Zeilen. Wir erhalten sonach folgende Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten:

$$e_{xx} = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{15}$$

und

$$\left.\begin{aligned} e_{zx} &= \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial s} + (1+\varepsilon)\left\{\varkappa'\zeta - \tau(y+\eta)\right\}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial s} + (1+\varepsilon)\left\{\tau(x+\xi) - \varkappa\zeta\right\}, \\ e_{zz} &= \varepsilon + \frac{\partial\zeta}{\partial s} + (1+\varepsilon)\left\{\varkappa(y+\eta) - \varkappa'(x+\xi)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Bei Ableitung der Formeln (15) und (16) haben wir nur solche Annäherungen eingeführt, die sich aus der Überlegung ergeben, daß die Verzerrungen „klein“ sind, daß insbesondere die Dehnung $\varepsilon$ der Zentrallinie klein sein muß. Ohne weitere Überlegungen erkennen

wir jedoch, daß die einzelnen Glieder von (16), so wie sie da stehen, nicht sämtlich von derselben Größenordnung sind. In erster Linie ist klar, daß die Terme $-\tau y$, $\tau x$, $\varkappa y$, $-\varkappa' x$ klein sein müssen; mit anderen Worten: die linearen Abmessungen des Querschnitts müssen klein sein im Verhältnis zum Krümmungsradius der Zentrallinie oder zum reziproken Wert des Dralls. Die Glieder $\varkappa'\zeta$, $\tau\eta \ldots$ sind ebenfalls klein. Wir können daher die Produkte aus $\varepsilon$ und diesen kleinen Größen vernachlässigen und die Gleichungen folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} e_{zx} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau y + \frac{\partial \xi}{\partial s} - \tau\eta + \varkappa'\zeta, \\ e_{yz} &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau x + \frac{\partial \eta}{\partial s} - \varkappa\zeta + \tau\xi, \\ e_{zz} &= \varepsilon - \varkappa' x + \varkappa y + \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \varkappa'\xi + \varkappa\eta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Nun wird die Lage des Anfangspunktes des $(x, y)$-Systems und die der Hauptebene $(x, z)$ von der Verschiebung $(\xi, \eta, \zeta)$ nicht betroffen; diese Verschiebung unterliegt daher den Bedingungen:

1) $\xi$, $\eta$, $\zeta$ verschwinden mit $x$ und $y$ für alle Werte von $s$.
2) $\partial\eta/\partial x$ verschwindet mit $x$ und $y$ für alle Werte von $s$.

Hieraus können wir, vorausgesetzt daß die Verzerrung im Stabe überall klein ist, schließen, daß die notwendigen Formen der Verzerrungskomponenten durch die Gleichungen (15) und (17) gegeben sind, wo die Funktionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ den Bedingungen 1) und 2) unterliegen.

## § 257. Näherungsformeln für die Verzerrung.

Wir haben nun die Vereinfachungen einzuführen, die aus dem Umstand entspringen, daß der Stab „dünn" ist. Die Größen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ lassen sich in Potenzreihen nach $x$ und $y$ entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten Funktionen von $s$ sind; diese Entwicklungen müssen für hinreichend kleine Werte von $x$ und $y$, d. h. für einen Teil des Stabes in der Umgebung der Zentrallinie[1]) zutreffen. Konstante Glieder treten in diesen Reihen nicht auf, weil $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mit $x$ und $y$ verschwinden. Ferner müssen $\partial\xi/\partial x$ und $\partial\xi/\partial y$ kleine Größen von der Größenordnung zulässiger Verzerrungen sein; daher müssen die Koeffizienten derjenigen Glieder von $\xi$, die in $x$ und $y$ linear sind,

1) Die Entwicklungen brauchen nicht für den ganzen Querschnitt gültig zu sein. Durch das Versagen der Cauchyschen Theorie der Torsion eines Prismas von rechteckigem Querschnitt (*Einleitung*, Fußnote 85) wird dies zur Genüge erläutert. Was jedoch die relative Größenordnung von Gliedern wie $\tau y$ und $\tau\eta$ anbetrifft, so dürfte es für die im Text benutzte Schlußweise wenig ausmachen, daß der Geltungsbereich der Entwicklungen nur ein beschränkter ist.

von dieser Größenordnung sein. Daraus folgt, daß $\xi$ selbst von höherer Ordnung klein sein muß, nämlich von der Ordnung des Produkts der kleinen Größe $\partial\xi/\partial x$ und der kleinen Koordinate $x$. Ähnliche Überlegungen lassen sich auf $\eta$ und $\zeta$ anwenden. Ein erster Schritt, die Gleichungen (17) zu vereinfachen, wird also darin bestehen, daß Terme wie $-\tau\eta$, $\varkappa'\zeta$ gestrichen werden. Ist dies geschehen, so haben wir die Formeln[1]):

$$e_{zx} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \tau y + \frac{\partial\xi}{\partial s},\quad e_{yz} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \tau x + \frac{\partial\eta}{\partial s},\quad l_{zz} = \varepsilon - \varkappa' x + \varkappa y + \frac{\partial\zeta}{\partial s}, \tag{18}$$

Diese stellen zusammen mit (15) Näherungswerte für die Verzerrungskomponenten dar.

Wir bemerken andererseits, daß eine ähnliche Betrachtung, wie sie eben für $\xi$ herangezogen wurde, auch auf $\partial\xi/\partial s$ anwendbar ist; diese Größe muß die Größenordnung des Produkts aus der kleinen Größe $\partial^2\xi/\partial x\partial s$ und der kleinen Koordinate $x$, oder was dasselbe ist, die Größenordnung des Produkts aus der kleinen Größe $\partial\xi/\partial x$ und dem kleinen Bruch $x/l$ haben, wo $l$ eine mit der Stablänge vergleichbare (bezw. übereinstimmende) Strecke. Somit ist $\partial\xi/\partial s$ im allgemeinen klein gegen $\partial\xi/\partial x$. Ähnliche Überlegungen lassen sich auf $\partial\eta/\partial s$ und $\partial\zeta/\partial s$ anwenden.[2]) Der zweite Schritt zur Vereinfachung der Formeln (17) besteht darin, daß wir $\partial\xi/\partial s$, $\partial\eta/\partial s$, $\partial\zeta/\partial s$ fortlassen; wir erhalten dann die Formeln[3])

$$e_{zx} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \tau y,\quad e_{yz} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \tau x,\quad e_{zz} = \varepsilon - \varkappa' x + \varkappa y. \tag{19}$$

Endlich bemerken wir, daß in den bereits angeführten Saint-Venantschen Lösungen $\varepsilon$ verschwindet und daß bei mehreren in Kap. XVI erhaltenen Lösungen $\varepsilon$ klein ist gegen $\varkappa' x$. Bei vielen

---

1) Es sei bemerkt, daß Saint-Venants Formeln für die Torsion eines Prismas sich den Formeln (15) und (18) unterordnen, wenn $\xi = \eta = 0$ gesetzt wird; seine Formeln für die Biegung durch eine am Ende angreifende Last ergeben sich aus diesen, wenn wir setzen

$$\xi = -\sigma\varkappa xy + \tfrac{1}{2}\sigma\varkappa'(x^2 - y^2),\quad \eta = \sigma\varkappa' xy + \tfrac{1}{2}\sigma\varkappa(x^2 - y^2).$$

In jedem Fall muß $\zeta$ passend bestimmt werden.

2) Für das Resultat liefern, soweit $\partial\xi/\partial s$ und $\partial\eta/\partial s$ in Frage kommen, die eben angeführten Saint-Venantschen Formeln ein Beispiel. Bei den Saint-Venantschen Lösungen ist $\zeta$ gleich

$$\tau\Phi - \frac{d\varkappa'}{ds}(\chi + xy^2) + \frac{d\varkappa}{ds}(\chi' + x^2 y),$$

wo $\chi$ und $\chi'$ die Biegungsfunktionen und $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt. Die Funktionen $\chi$ und $\chi'$ sind klein von der Ordnung $a^2 x$, wo $a$ eine passende lineare Abmessung des Querschnitts. In diesem Fall ist $\zeta$ tatsächlich unabhängig von $s$.

3) Es sind dies die Kirchhoffschen Formeln.

wichtigen Problemen ist $\varepsilon$ klein gegen Größen wie $\tau x$ oder $\varkappa' x$. Wenn dies der Fall ist, können wir in der Vereinfachung der Formeln (17) noch einen Schritt weiter gehen, indem wir $\varepsilon$ fortlassen. Sie würden dann lauten

$$e_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau y, \quad e_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau x, \quad e_{zz} = -\varkappa' x + \varkappa y. \qquad (20)$$

Hiermit müssen wir die Formeln (15) kombinieren, und in dem erhaltenen Formelsystem werden wir, unsern Darlegungen entsprechend, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als nahezu unabhängig von $s$ annehmen.

Somit ergibt sich, daß von den Verzerrungen in einem gebogenen und gedrillten Stabe die wichtigsten folgende sind: 1) eine Dehnung der Längsfasern, die mit der Krümmung der Zentrallinie in der in § 232 b) angegebenen Weise verknüpft ist, 2) Schubverzerrungen von der Art der Verzerrungen, die bei dem in Kap. XIV behandelten Torsionsproblem auftreten, 3) eine gegenseitige Verschiebung der Elemente eines Querschnitts parallel zur Querschnittsebene. Die letzte der eben genannten Verzerrungen ist für verschiedene benachbarte Querschnitte annähernd die gleiche.

## § 258. Ausführungen zur üblichen Näherungstheorie.

Um die Spannungsresultanten und Spannungsmomente zu bestimmen, brauchen wir die Werte der Spannungskomponenten $X_z$, $Y_z$, $Z_z$. Da

$$Z_z = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left\{ \sigma (e_{xx} + e_{yy}) + (1-\sigma) e_{zz} \right\},$$

wo $E$ der Youngsche Modul und $\sigma$ die Poissonsche Konstante des Materials, so kann der Wert von $Z_z$ erst ermittelt werden, wenn die durch die Formeln (15) gegebenen Querdehnungen $e_{xx}$, $e_{yy}$ und die durch die dritte der Formeln (17), (18), (19) oder (20) gegebene Längsdehnung $e_{zz}$ gefunden ist. Um die Spannungskomponenten vollständig auszudrücken, brauchen wir die Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, und wir können diese nur dadurch ermitteln, daß wir für ein kleines Stabstück die Gleichgewichtsgleichungen bei gewissen auf der zylindrischen oder prismatischen Begrenzungsfläche geltenden Bedingungen lösen. Schwingt der Stab, so wären die Gleichungen der kleinen Bewegung zu lösen. Wir können jedoch angenäherte Werte der Spannungsresultanten und Spannungsmomente finden, indem wir die einzelnen Schritte der im letzten Paragraphen angewendeten Schlußweise wiederholen.

Wenn Massenkräfte und kinetische Reaktionen fehlen und die anfänglich zylindrische Begrenzungsfläche des Stabes spannungsfrei ist, so wird das von zwei benachbarten Querschnitten begrenzte Stück durch die auf die Enden wirkenden Spannungen im Gleichgewicht

gehalten. Nach den Schlußformeln (15) und (20) unseres Näherungsverfahrens sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ von $s$ unabhängig, und in dem betrachteten Stabstück können auch $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$ als unabhängig von $s$ angesehen werden. Dieser Stabteil kann daher als ein Prisma gelten, das durch Spannungen an den Enden so verzerrt gehalten wird, daß die Verzerrung und somit auch die Spannung in entsprechenden Punkten der einzelnen Querschnitte dieselbe ist. Wie der Satz von § 237 zeigt, müssen in einem solchen Prisma die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ verschwinden, und da $e_{zz}$ durch die dritte der Gleichungen (20) gegeben ist, müssen wir haben

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sigma(\varkappa' x - \varkappa y), \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{21}$$

Weiterhin müssen die Spannungskomponenten $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ durch die Saint-Venantschen Formeln gegeben sein:

$$X_z = \mu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right), \quad Y_z = \mu\tau\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right), \quad Z_z = -E(\varkappa' x - \varkappa y), \tag{22}$$

wo $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt (§ 216). Die Spannungsmomente sind dann durch die Formeln (12), § 255, gegeben. Die Spannungsresultanten verschwinden bei diesem Grad der Annäherung.

Wenn wir $\varepsilon$ beibehalten, also die Formeln (15) und (19) zugrunde legen, so ändern sich die Formeln für die Spannungsmomente nicht, und die Schubkräfte verschwinden wie vorhin. Zu dem Ausdruck $\sigma(\varkappa' x - \varkappa y)$ auf der rechten Seite von (21) müssen wir das Glied $-\sigma\varepsilon$ hinzufügen, und die Zugbeanspruchung ist durch die Formel gegeben

$$T = E\omega\varepsilon, \tag{23}$$

wo $\omega$ der Flächeninhalt des Querschnitts.

Lassen wir die Annahme fallen, daß $\xi$, $\eta$, $\zeta$ von $s$ unabhängig sind, so können wir die Annäherung weiter treiben, indem wir die Verzerrungen längs eines kleinen Stabstücks nicht konstant, sondern gleichförmig veränderlich annehmen. Wenn Massenkräfte fehlen und die anfangs zylindrische Begrenzungsfläche spannungsfrei ist, so können, wie der Satz von § 238 zeigt, nur die Saint-Venantschen Lösungen in Frage kommen. Die Spannungsmomente und die Zugbeanspruchung sind durch dieselben Formeln wie vorhin gegeben, aber die Schubkräfte verschwinden nicht.

Im allgemeinen Falle, wo nicht nur an den Enden, sondern auch anderswo am Stabe Kräfte angreifen, müßten wir die Formeln (17) für die Verzerrungen beibehalten, und die Formeln (21) treffen nicht mehr zu. Wie wir aus den Untersuchungen von Kap. XVI wissen, gelten die Formeln (12) und (23) nicht streng, wenn auch vielleicht

angenähert. Die anzubringenden Korrektionen hängen von der Verteilung der äußeren Kräfte über die Querschnitte ab.

Aus dieser Erörterung schließen wir, daß die Formeln (12) und (23) in denjenigen Teilen des Stabes, die von Belastungs- oder Stützpunkten weiter entfernt sind, gute Näherungswerte für die Spannungsmomente und die Zugbeanspruchung liefern, daß sie aber in der Nähe solcher Stellen ziemlich unzuverlässig sind.

Da die Gleichungen (10) und (11) zusammen mit den Formeln (12) alle Spannungsresultanten sowohl wie die Krümmung und den Drall bestimmen, so bestimmt die Formel (23) die Dehnung $\varepsilon$.

Unter gewöhnlichen Umständen ist $\varepsilon$ klein gegen Größen wie $\varkappa x$, die die Dehnung von nicht in die Zentrallinie fallenden Längsfasern infolge der Biegung darstellen. Dies ergibt sich folgendermaßen: Die Größenordnung von $T$ ist im allgemeinen dieselbe wie die von $N$ bezw. $N'$, also den Gleichungen (11) zufolge gleich der von $\partial G/\partial s$. Die Größenordnung von $\varepsilon$ ist daher gleich der von $(E\omega)^{-1}(\partial G/\partial s)$. Nun ist $\varkappa$ von der Größenordnung $G/E\omega a^2$, wo $a$ eine geeignete lineare Querschnittsabmessung, und die Größenordnung von $\varkappa x$ ist daher gleich der von $(E\omega)^{-1}(G/a)$. $\varkappa x$ ist also im allgemeinen eine viel größere Zahl als $\varepsilon$.

Bei jedem Problem, bei dem wir es mit einer beträchtlichen Biegung oder Drillung zu tun haben, können wir in erster Annäherung die Zentrallinie als ungedehnt ansehen.

Die potentielle Energie des Stabes pro Längeneinheit findet sich aus den Gleichungen (21) und (22) leicht zu

$$\tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\varkappa'^2 + C\tau^2). \tag{24}$$

Sind Krümmung und Drall null, so ist die potentielle Energie gleich

$$\tfrac{1}{2}E\omega\varepsilon^2.$$

## § 259. Von Hause aus krumme Stäbe.[1])

Der Stab möge im ungespannten Zustand sowohl Krümmung wie Drall besitzen: die Zentrallinie sei eine krumme Linie, und die von den Schwerpunkten der Querschnitte ausgehenden Hauptachsen bilden mit den Hauptnormalen dieser Kurve Winkel, die von Punkt zu Punkt längs der Kurve sich ändern. Die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachsen eines Querschnitts und die Tangente der Zentrallinie in diesem Punkt bilden ein Dreikant orthogonaler Achsen $(x_0, y_0, z_0)$; die $z_0$-Achse falle in die Richtung der Tangente. Wir nehmen an, der Anfangspunkt dieses Koordinatensystems bewege sich längs der Kurve mit der Geschwindigkeit eins. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Dreikants, bezogen auf die instantanen Lagen der Achsen, seien $\varkappa_0, \varkappa_0', \tau_0$. Dann sind $\varkappa_0, \varkappa_0'$ die Kom-

1) Die Theorie ist im wesentlichen von Clebsch, *Elastizität*, § 55, ausgebildet. In allgemeinen Umrissen ist sie angedeutet von Kirchhoff, *loc. cit.*, p. 439.

ponenten der Anfangskrümmung, und $\tau_0$ ist der Anfangsdrall. Ist $1/\Sigma_0$ die Windung der Zentrallinie in einem ihrer Punkte und $\frac{1}{2}\pi - f_0$ der Winkel, den die $(x_0, z_0)$-Hauptebene in diesem Punkte mit der Hauptnormalen der Zentrallinie einschließt, so haben wir die Formeln

$$\operatorname{tg} f_0 = -\varkappa_0'/\varkappa_0, \quad \tau_0 = 1/\Sigma_0 + df_0/ds; \tag{25}$$

die den Formeln (2) und (3), § 253, entsprechen.

Wenn nun der Stab gebogen und gedrillt wird, so können wir in jedem Punkt der verzerrten Zentrallinie in derselben Weise wie in § 252 ein System von „Torsion-Biegungs-Hauptachsen“ konstruieren, sodaß die $z$-Achse mit der Tangente der verzerrten Zentrallinie in dem betreffenden Punkte zusammenfällt und die $(x, z)$-Ebene dasjenige Linienelement enthält, das im ungespannten Zustand von diesem Punkte auslaufend in die Richtung der $x_0$-Achse fällt. Mittels dieses Koordinatensystems bestimmen wir ebenso wie früher die Krümmungskomponenten der verzerrten Zentrallinie und den Drall des Stabes. Wir bezeichnen die Krümmungskomponenten mit $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$ und den Drall mit $\tau_1$.

Die Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich nach dem Verfahren von § 254 in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN}{ds} - N'\tau_1 + T\varkappa_1' + X &= 0, \\ \frac{dN'}{ds} - T\varkappa_1 + N\tau_1 + Y &= 0, \\ \frac{dT}{ds} - N\varkappa_1' + N'\varkappa_1 + Z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{ds} - G'\tau_1 + H\varkappa_1' - N' + K &= 0, \\ \frac{dG'}{ds} - H\varkappa_1 + G\tau_1 + N + K' &= 0, \\ \frac{dH}{ds} - G\varkappa_1' + G'\varkappa_1 + \Theta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Durch geeignete Kräfte würde der Stab gerade gerichtet und in prismatischer Form gehalten werden können, und nach der üblichen Näherungstheorie (§ 255) würden die Spannungsmomente für irgend einen Querschnitt gleich $-A\varkappa_0$, $-B\varkappa_0'$, $-C\tau_0$ sein. Den geraden prismatischen Stab würden wir durch Biegung und Drillung in den durch $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_1$ bezeichneten Zustand überführen können, und demselben Näherungsansatz entsprechend würden die hinzutretenden Momente gleich $A\varkappa_1$, $B\varkappa_1'$, $C\tau_1$ sein. Wenn also der Stab aus dem durch $\varkappa_0$, $\varkappa_0'$, $\tau_0$ definierten Zustand in den durch $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_1$ bezeichneten Zustand übergeführt wird, so treten folgende Spannungs-

momente auf[1]):

$$G = A(\varkappa_1 - \varkappa_0), \quad G' = B(\varkappa_1' - \varkappa_0'), \quad H = C(\tau_1 - \tau_0). \tag{28}$$

Wie aus der Erörterung in § 258 hervorgeht, ist die Anwendbarkeit dieser Formeln in dem Falle, wo den Stab entlang Kräfte angreifen, weniger verbürgt als in dem Falle, wo nur an den Enden Kräfte und Kräftepaare angebracht sind.

Wir bemerken, daß selbst wenn der Querschnitt des Stabes kinetische Symmetrie besitzt, sodaß $A = B$, die Biegungsmomente nicht gleichwertig sind mit einem einzigen Kräftepaar um die Binormale der verzerrten Zentrallinie, außer wenn $\varkappa_1'/\varkappa_0' = \varkappa_1/\varkappa_0$. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat das Biegungsmoment den Betrag $B(1/\varrho_1 - 1/\varrho_0)$, wo $\varrho_1$ und $\varrho_0$ die Krümmungsradien der Zentrallinie im gespannten und im ungespannten Zustand.

Das obige Verfahren zur Berechnung der Spannungsmomente setzt voraus, daß das Verhältnis der Stabdicke zum Krümmungsradius und zum reziproken Wert des Dralls von der Größenordnung der in der mathematischen Elastizitätstheorie betrachteten kleinen Verzerrungen ist. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann der Stab gerade gerichtet und drillungsfrei gehalten werden, ohne Verzerrungen zu erfahren, die diese Größenordnung überschreiten. Die Formeln (28) selbst sind jedoch in ihrer Bedeutung als Näherungsformeln für die Spannungsmomente nicht an jene Bedingung gebunden. Wir können die Frage nach dem Verfahren von § 256 in Angriff nehmen und die Anfangskrümmung und den Anfangsdrall durch folgende Gleichungen in die Rechnung einführen:

$$lr = \delta x - y\tau_0\delta s, \quad mr = \delta y + x\tau_0\delta s, \quad nr = \delta s(1 - \varkappa_0' x + \varkappa_0 y)$$

oder

$$\delta x = r\left(l + n\frac{\tau_0 y}{1+\gamma}\right), \quad \delta y = r\left(m - n\frac{\tau_0 x}{1+\gamma}\right), \quad \delta s = \frac{rn}{1+\gamma},$$

wo $\gamma$ für $\varkappa_0 y - \varkappa_0' x$ steht. Statt (14) würden wir dann finden

$$\begin{aligned} r_1^2 = r^2\Big[&\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)l + \frac{\partial \xi}{\partial y}m + \frac{n}{1+\gamma}\left\{\frac{\partial \xi}{\partial s} + \tau_0\left(y\frac{\partial \xi}{\partial x} - x\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\right\} \\ &+ \frac{(1+\varepsilon)n}{1+\gamma}\left\{-(\tau_1 - \tau_0)y - \tau_1\eta + \varkappa_1'\zeta\right\}\Big]^2 \\ + r^2\Big[&\frac{\partial \eta}{\partial x}l + \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)m + \frac{n}{1+\gamma}\left\{\frac{\partial \eta}{\partial s} + \tau_0\left(y\frac{\partial \eta}{\partial x} - x\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right\} \\ &+ \frac{(1+\varepsilon)n}{1+\gamma}\left\{(\tau_1 - \tau_0)x - \varkappa_1\zeta + \tau_1\xi\right\}\Big]^2 \\ + r^2\Big[&\frac{\partial \zeta}{\partial x}l + \frac{\partial \zeta}{\partial y}m + (1+\varepsilon)n + \frac{n}{1+\gamma}\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial s} + \tau_0\left(y\frac{\partial \zeta}{\partial x} - x\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\right\} \\ &+ \frac{(1+\varepsilon)n}{1+\gamma}\left\{(\varkappa_1 - \varkappa_0)y - (\varkappa_1' - \varkappa_0')x - \varkappa_1'\xi + \varkappa_1\eta\right\}\Big]^2. \end{aligned}$$

Bei Ableitung von Näherungsausdrücken für die Verzerrungskompo-

1) Diese Formeln verdankt man Clebsch. Auf ganz anderem Wege wurden sie abgeleitet von A. B. Basset, *Amer. J. of Math.*, vol. 17 (1895).

nenten werde mit $[\gamma]$ irgend eine Größe von der Ordnung des Quotienten (Dicke)/(Krümmungsradius) oder (Dicke)/(reziproker Wert des Dralls), berechnet für den Anfangs- oder den Endzustand, und mit $[e]$ irgend eine Größe von der Ordnung der Verzerrung bezeichnet. So sind $\tau_0 y$ und $\tau_1 y$ von der Größenordnung $[\gamma]$; $\partial \xi/\partial x$ und $(\varkappa_1 - \varkappa_0) y$ sind von der Ordnung $[e]$. Streichen wir in obigem Ausdruck für $r_1^2$ alle Glieder von der Ordnung des Produktes $[\gamma][e]$ und ebenso alle Glieder von der Ordnung $[e]^2$, so erhalten wir statt (19) die Formeln

$$e_{zx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - (\tau_1 - \tau_0) y, \quad e_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\tau_1 - \tau_0) x, \quad e_{zz} = \varepsilon + (\varkappa_1 - \varkappa_0) y - (\varkappa_1' - \varkappa_0') x.$$

Aus ihnen würden sich die Formeln (28) in derselben Weise ableiten lassen wie (12) aus (19), und sie würden denselben Beschränkungen unterliegen.

## Kapitel XIX.

## Probleme des Gleichgewichts dünner Stäbe.

### § 260. Kirchhoffs kinetische Analogie.

Wir gehen zu den Anwendungen der im letzten Kapitel entwickelten Theorie über und beginnen mit dem Beweis eines Kirchhoffschen Satzes[1]), wonach die Gleichungen des Gleichgewichts eines dünnen Stabes, der im ungespannten Zustand gerade und prismatisch ist und durch Kräfte und Kräftepaare an den Enden allein gebogen und gedrillt wird, übereinstimmen mit den Bewegungsgleichungen eines schweren starren Körpers, der sich um einen festen Punkt dreht.

Da nur an den Enden des Stabes Kräfte und Kräftepaare angreifen, so verschwinden die Größen $X, Y, Z$ und $K, K', \Theta$ in den Gleichungen (10) und (11) von § 254. Die Gleichungen (10) dieses Paragraphen gehen über in

$$\frac{dN}{ds} - N'\tau + T\varkappa' = 0, \quad \frac{dN'}{ds} - T\varkappa + N\tau = 0, \quad \frac{dT}{ds} - N\varkappa' + N'\varkappa = 0, \tag{1}$$

die die Konstanz der Resultanten von $N$, $N'$, $T$ nach Größe und Richtung ausdrücken; in der Tat stimmt diese Resultante nach Größe Richtung und Richtungssinn überein mit der Kraft, die an dem Ende des Stabes, das dem größten Wert von $s$ entspricht, angreift. Wir bezeichnen diese Kraft mit $R$.

Die Gleichungen (11) von § 254 gehen nach Einführung der Relationen (12), § 255, und Streichen von $K, K', \Theta$ über in

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\varkappa}{ds} - (B-C)\varkappa'\tau &= N', \\ B\frac{d\varkappa'}{ds} - (C-A)\tau\varkappa &= -N, \\ C\frac{d\tau}{ds} - (A-B)\varkappa\varkappa' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die rechts stehenden Glieder sind gleich den Momenten einer im Punkte $(0, 0, 1)$ angreifenden Kraft $-R$ um die $(x, y, z)$-Achsen. Wir können

---

1) G. Kirchhoff, *loc. cit.* p. 489.

daher die Gleichungen (2) deuten als die Bewegungsgleichungen eines Kreisels, d. h. eines schweren starren Körpers, der sich um einen festen Punkt dreht. In dieser Analogie entspricht der Wirkungslinie der Kraft $R$ (die in dem mit dem größten Wert von $s$ zusammenfallenden Stabende angreift) die aufwärts gezogene Vertikale, $s$ bedeutet die Zeit, und die Größe von $R$ stellt das Gewicht des Körpers dar, $A, B, C$ bedeuten die Trägheitsmomente des Körpers, bezogen auf die Hauptachsen in dem festen Punkt, $(\varkappa, \varkappa', \tau)$ stellt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die instantane Lage dieses Achsendreikants dar. Der Schwerpunkt des Körpers liegt auf der $C$-Achse im Abstand 1 von dem festen Punkt; und diese Achse, die zur Zeit $s$ den festen Punkt mit dem Schwerpunkt verbindet, ist nach Richtung und Richtungssinn identisch mit der (im Sinne wachsender Bogenlänge $s$ gezogenen) Tangente der Zentrallinie des Stabes in dem Punkte $P_1$, der von dem einen Ende den Bogenabstand $s$ hat. Der Körper bewegt sich so, daß seine Hauptachsen in dem festen Punkte zur Zeit $s$ den Torsion-Biegungs-Hauptachsen des Stabes in $P_1$ parallel sind.

Eliminieren wir $N$ und $N'$ aus der dritten der Gleichungen (1) mittels der Gleichungen (2), so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{dT}{ds} + A\varkappa\frac{d\varkappa}{ds} + B\varkappa'\frac{d\varkappa'}{ds} + (A - B)\tau\varkappa\varkappa' = 0$$

oder, wie aus der dritten der Gleichungen (2) folgt,

$$\frac{d}{ds}\left\{T + \tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\varkappa'^2 + C\tau^2)\right\} = 0;$$

dies liefert die Gleichung

$$T + \tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\varkappa'^2 + C\tau^2) = \text{const.} \tag{3}$$

Diese Gleichung ist gleichwertig mit der Formel, die das Energieintegral der Bewegungsgleichungen bei der kinetischen Analogie darstellt.

## § 261. **Ausdehnung des Satzes von der kinetischen Analogie auf Stäbe, die von Hause aus krumm sind.**[1]

Der Kirchhoffsche Satz läßt sich auf Stäbe ausdehnen, die im ungespannten Zustand Krümmung und Drall besitzen, vorausgesetzt daß die Komponenten $\varkappa_0$, $\varkappa_0'$ der Anfangskrümmung und der Anfangsdrall $\tau_0$, wie sie in § 259 definiert wurden, konstant sind. Dies ist der Fall, wenn der Stab im ungespannten Zustand gerade, aber nicht prismatisch ist, so zwar, daß homologe transversale Strecken verschiedener Querschnitte auf einer Schraubenfläche liegen; oder wenn die Zentrallinie ein Kreisbogen und der Stab drallfrei ist; oder wenn die Zentrallinie ein Stück einer Schraubenlinie ist und der Stab einen Anfangsdrall von der Art besitzt,

1) J. Larmor, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 15 (1884).

daß er prismatisch sein würde, wenn nur die Biegung rückgängig gemacht würde.

Wird der Stab durch Kräfte und Kräftepaare, die an seinen Enden allein angreifen, gebogen und gedrillt, sodaß die Krümmungskomponenten und der Drall, wie sie in § 259 definiert wurden, gleich $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$, $\tau_1$ werden, so genügen die Spannungsresultanten $N$, $N'$, $T$ den Gleichungen

$$\frac{dN}{ds} - N'\tau_1 + T\varkappa_1' = 0, \quad \frac{dN'}{ds} - T\varkappa_1 + N\tau_1 = 0, \quad \frac{dT}{ds} - N\varkappa_1' + N'\varkappa_1 = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichungen drücken aus, daß $N$, $N'$, $T$ für jeden Querschnitt die zu den Torsion-Biegungs-Hauptachsen parallelen Komponenten einer Kraft sind, die nach Größe und Richtung konstant ist. Wir bezeichnen diese Kraft wie früher mit $R$. Da die Spannungsmomente für einen Querschnitt gleich $A(\varkappa_1 - \varkappa_0)$, $B(\varkappa_1' - \varkappa_0')$, $C(\tau_1 - \tau_0)$ sind, so haben wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{d\varkappa_1}{ds} - B(\varkappa_1' - \varkappa_0')\tau_1 + C(\tau_1 - \tau_0)\varkappa_1' &= N',\\
B\frac{d\varkappa_1'}{ds} - C(\tau_1 - \tau_0)\varkappa_1 + A(\varkappa_1 - \varkappa_0)\tau_1 &= -N,\\
C\frac{d\tau_1}{ds} - A(\varkappa_1 - \varkappa_0)\varkappa_1' + B(\varkappa_1' - \varkappa_0')\varkappa_1 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Das kinetische Analogon ist ein starrer Körper, der sich um einen festen Punkt dreht und einen Gyrostaten bezw. ein Schwungrad trägt, das um eine im Körper feste Achse rotiert. Der Schwerpunkt des Schwungrades fällt mit dem festen Punkt zusammen. Die Richtungskosinus $l$, $m$, $n$ der Schwungradsachse, bezogen auf die Hauptachsen des Körpers in jenem Punkte, und das Trägheitsmoment $h$ des Schwungrades, bezogen auf diese Achse, sind durch die Gleichungen gegeben

$$-A\varkappa_0 = hl, \quad -B\varkappa_0' = hm, \quad -C\tau_0 = hn. \tag{6}$$

Die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers, bezogen auf die Hauptachsen in dem festen Punkt, ist gleich $(\varkappa_1, \varkappa_1', \tau_1)$, und die übrigen Größen sind wie früher zu deuten.

## § 262. Das Problem der Elastica.[1])

Eine erste Anwendung des Satzes von § 260 knüpft sich an das Problem der Bestimmung der Formen, die ein im ungespannten Zustand gerader und prismatischer dünner Stab, der nur an den Enden durch Kräfte und Kräftepaare beansprucht wird, annehmen kann, wenn der Drall null ist und der Stab in einer Hauptebene gebogen

1) Das Problem der *Elastica* wurde zuerst von Euler gelöst. Siehe *Einleitung,* p. 3. Die systematische Anwendung des Satzes von der kinetischen Analogie auf dies Problem wurde durchgeführt von W. Heß, *Math. Ann.*, Bd. 25 (1885). Zahlreiche Spezialfälle wurden untersucht von L. Saalschütz, *Der belastete Stab,* Leipzig 1880.

wird, sodaß die Zentrallinie eine ebene Kurve wird. Das kinetische Analogon ist dann ein starres Pendel vom Gewicht $R$, das sich um eine feste horizontale Achse dreht. Die Bewegung des Pendels ist durch die Energiegleichung und die Anfangsbedingungen vollständig bestimmt. Ebenso ist die Form der Zentrallinie des Stabes durch die betreffende Form der Gleichung (3) und die Bedingungen an den Enden völlig bestimmt.

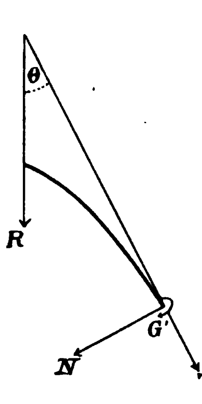


Fig. 47.

Die Biegungsebene sei die Ebene, für die die Biegungssteifigkeit gleich $B$ ist. Dann verschwinden $\varkappa$ und $\tau$, und als Spannungsmoment haben wir das Biegungsmoment $G' = B\varkappa'$ in der Biegungsebene. Spannungsresultanten sind eine Zugbeanspruchung $T$ und eine Schubkraft $N$; letztere ist nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtet. $\theta$ sei der Winkel, den die im Sinne wachsender Bogenlänge gezogene Tangente in einem Punkte der Zentrallinie mit der Wirkungslinie der Kraft $R$ einschließt, die an demjenigen Ende angreift, von dem aus $s$ gemessen wird (Fig. 47). Wir haben dann $T = -R\cos\theta$ und $\varkappa' = -d\theta/ds$, und die Gleichung (3) wird

$$-R\cos\theta + \tfrac{1}{2}B(d\theta/ds)^2 = \text{const.} \tag{7}$$

Beim kinetischen Analogon ist $B$ das Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf die Drehungsachse, und der Schwerpunkt liegt im Abstand eins von dieser Achse. Die Gerade, die den Aufhängepunkt mit dem Schwerpunkt zur Zeit $s$ verbindet, bildet mit der abwärts gerichteten Vertikalen den Winkel $\theta$.

Gleichung (7) kann sehr einfach mittels der Gleichgewichtsgleichungen erhalten werden. Diese Gleichungen lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$T = -R\cos\theta,\quad N = -R\sin\theta,\quad \frac{dG'}{ds} + N = 0;$$

hieraus ergibt sich, wenn man $G' = -B(d\theta/ds)$ setzt, die Gleichung

$$B(d^2\theta/ds^2) + R\sin\theta = 0, \tag{8}$$

und Gleichung (7) stellt das erste Integral dieser Gleichung dar.

Die Kurve, in die die Zentrallinie durch die Biegung übergeht, die sogenannte *Elastica*, bestimmt sich mit Hilfe der Gleichung (7). Die Resultate gestalten sich verschieden, je nachdem Wendepunkte vorhanden sind oder nicht. In einem Wendepunkt verschwindet $d\theta/ds$, mithin auch das Biegungsmoment, sodaß der Stab durch Kräfte an den Enden ohne Moment in Form einer *Elastica mit Wendepunkt* gehalten werden kann. Die Endpunkte selbst sind dann Wendepunkte, und es ist klar, daß alle Wendepunkte auf der Wir-

kungslinie der Endkraft $R$, der *Angriffslinie* (engl. *line of thrust*), liegen. Das kinetische Analogon zur Elastica mit Wendepunkt ist ein *schwingendes Pendel.* Da die Zeit zwischen zwei instantanen Ruhelagen des Pendels konstant, nämlich gleich der halben Schwingungsdauer ist, so sind die Wendepunkte gleichmäßig über die Zentrallinie des Stabes verteilt. Um eine *Elastica ohne Wendepunkt* zu erhalten, hat man sowohl Kräftepaare wie Kräfte an den Enden anzubringen. Das kinetische Analogon ist ein rotierendes Pendel. In dem besonderen Falle, wo Kräfte an den Enden nicht angreifen, biegt sich der Stab zu einem Kreisbogen. Das kinetische Analogon ist in diesem Falle ein starrer Körper, der um eine durch den Schwerpunkt gehende horizontale Achse sich dreht.

Ist die Zentrallinie des Stabes im ungespannten Zustand ein Kreis und Anfangsdrall nicht vorhanden, so ist das kinetische Analogon (§ 261) ein Pendel, auf dessen Achse ein Schwungrad symmetrisch aufgesetzt ist. Die Bewegung des Pendels ist unabhängig von der des Schwungrads, und entsprechend sind die möglichen Formen der Zentrallinie des durch Endkräfte und -momente verbogenen Stabs dieselben wie für einen von Hause aus geraden Stab. Nur die Größe des Endmoments ist infolge der anfänglichen Krümmung eine andere.

## § 263. Einteilung der Formen der Elastica.

a) *Elastica mit Wendepunkt.*

Wir messen $s$ von einem Wendepunkt aus und bezeichnen mit $\alpha$ den Wert von $\theta$ im Wendepunkt $s = 0$. Wir schreiben Gleichung (7) in der Form

$$\tfrac{1}{2} B \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + R(\cos\alpha - \cos\theta) = 0. \tag{9}$$

Um sie zu integrieren, führen wir Jacobische elliptische Funktionen eines Argumentes $u$ vom Modul $k$ ein, die durch die Gleichungen

$$u = s\sqrt{R/B}, \quad k = \sin\tfrac{1}{2}\alpha \tag{10}$$

gegeben sind. Dann haben wir

$$\frac{d\theta}{du} = 2k\,\mathrm{cn}(u + K), \quad \sin\tfrac{1}{2}\theta = k\,\mathrm{sn}(u + K), \tag{11}$$

wo $K$ die reelle Viertelperiode der elliptischen Funktionen. Um die Gestalt der Kurve zu bestimmen, führen wir ein festes $(x, y)$-Achsensystem ein, und zwar falle die x-Achse mit der Angriffslinie zusammen. Wir haben dann die Gleichungen

$$dx/ds = \cos\theta, \quad dy/ds = \sin\theta,$$

und diese Gleichungen ergeben

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{B}{R}}\left[-u + 2\left\{E \operatorname{am}(u+K) - E \operatorname{am} K\right\}\right], \\ y &= -2k\sqrt{\frac{B}{R}} \operatorname{cn}(u+K), \end{aligned}\right| \tag{12}$$

wo $E \operatorname{am} u$ das elliptische Integral zweiter Gattung bedeutet, das sich durch die Formel

$$E \operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\, du$$

ausdrückt, und die Integrationskonstanten so bestimmt sind, daß x und y mit $s$ verschwinden. Die Wendepunkte sind gegeben durch $\cos\theta = \cos\alpha$ oder $\operatorname{sn}^2(u+K) = 1$, das Bogenstück zwischen zwei aufeinander folgenden Wendepunkten ist daher gleich $2\sqrt{B/R}\cdot K$, und die Wendepunkte sind gleichmäßig in Abständen

$$2\sqrt{B/R}\,(2\,E \operatorname{am} K - K)$$

über die x-Achse verteilt.

Die Punkte, in denen die Tangente zur Angriffslinie parallel ist, sind durch $\sin\theta = 0$ oder $\operatorname{sn}(u+K)\operatorname{dn}(u+K) = 0$ gegeben, sodaß $u$ ein ungerades Vielfaches von $K$. Hieraus folgt, daß die Kurve aus einer Reihe von *Bogen* besteht, die durch die Wendepunkte voneinander getrennt sind und durch die Punkte, in denen die Tangente zur Angriffslinie parallel ist, in gleiche *Halbbogen* zerlegt werden.

Die Änderung der Form der Kurve mit wachsendem Winkel $\alpha$ ist aus den Figuren 48—55 zu ersehen. Ist $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, so ist x für kleine Werte von $u$ negativ und hat absolut genommen den größten Wert, wenn $u$ den kleinsten positiven Wert hat, der der Gleichung $\operatorname{dn}^2(u+K) = \frac{1}{2}$ genügt. Diesen Wert bezeichnen wir mit $u_1$. Derjenige Wert von $u$, für den x verschwindet, ist durch die Gleichung $u = 2\{E \operatorname{am}(u+K) - E \operatorname{am} K\}$ gegeben. Wenn $u$ diesen Wert überschreitet, ist x positiv, und für $u = 2K - u_1$ hat x ein Maximum. Die Figuren 50—52 stellen Fälle dar, wo $x_K$ bezüglich größer, gleich oder kleiner als $|x_{u_1}|$ ist. Fig. 53 zeigt den Fall, wo $x_K = 0$ oder $2\,E \operatorname{am} K = K$. Dies tritt ungefähr für $\alpha = 130^0$ ein. In diesem Falle liegen alle Doppelpunkte und Wendepunkte im Koordinatenanfang, und die Kurve kann aus mehreren genau kongruenten übereinander liegenden Stücken bestehen. Fig. 54 stellt einen Fall dar, wo $2\,E \operatorname{am} K < K$ oder $x_K < 0$; die Kurve rückt in der negativen Richtung der x-Achse vor. Den Grenzfall, wo $\alpha = \pi$, zeigt Fig. 55: der (unendlich lange) Stab bildet eine einzige Schleife, und das Pendel der kinetischen Analogie führt, genau von der instabilen Gleichgewichtslage aus schwingend, gerade eine vollständige Umdrehung aus.

b) *Elastica ohne Wendepunkt.*

Wenn keine Wendepunkte vorhanden sind, schreiben wir Gleichung (7) in der Form

$$\tfrac{1}{2} B\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = R\cos\theta + R\left(1 + 2\,\frac{1-k^2}{k^2}\right), \tag{13}$$

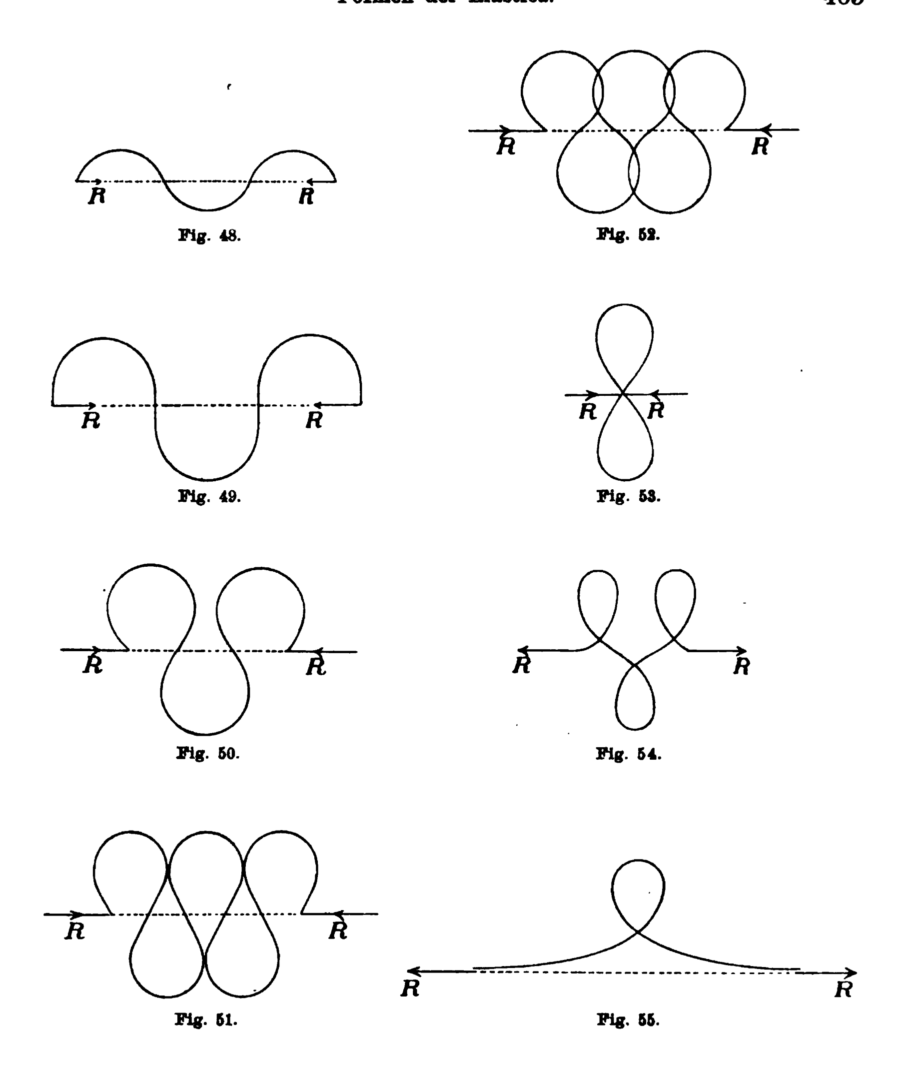



Fig. 48. Fig. 49. Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52. Fig. 53. Fig. 54. Fig. 55.

wo $k$ kleiner als eins ist, und führen Jacobische elliptische Funktionen vom Modul $k$ und vom Argument $u$ ein, wo

$$u = k^{-1} s \sqrt{R/B}. \tag{14}$$

Wir messen $s$ von einem Punkte aus, wo $\theta$ verschwindet. Dann haben wir

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{B}{R}}\,\mathrm{dn}\,u, \quad \sin \tfrac{1}{2}\theta = \mathrm{sn}\,u, \tag{15}$$

und die Koordinaten x und y drücken sich in $u$ durch folgende Gleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned} x &= k\sqrt{\frac{B}{R}}\left[\left(1-\frac{2}{k^2}\right)u+\frac{2}{k^2}\,E\,\mathrm{am}\,u\right],\\ y &= -\frac{2}{k}\sqrt{\frac{B}{R}}\,\mathrm{dn}\,u;\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

hierin sind die Integrationskonstanten so gewählt, daß x mit $s$ verschwindet; die x-Achse verläuft zur Wirkungslinie von $R$ parallel und zwar in einem solchen Abstande, daß die Kraft $R$ und das Moment $-B/(d\theta/ds)$, die an den Enden des Stabes angebracht werden müssen, statisch gleichwertig sind mit einer längs der x-Achse wirkenden Kraft $R$. Die Kurve besteht aus einer Reihe von Schleifen, die sämtlich auf einer Seite von der Achse liegen. Die Form der Kurve ist in Fig. 56 dargestellt.

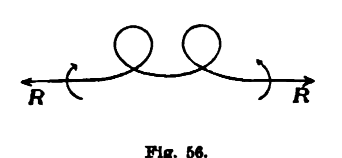


Fig. 56.

§ 264. **Knicken eines langen dünnen Ständers unter vertikaler Last.**[1])

Die Grenzform der *Elastica* für sehr kleines $\alpha$ erhalten wir, wenn wir in Gleichung (8) $\theta$ statt $\sin\theta$ schreiben. Wir haben dann in erster Annäherung

$$\theta = \alpha\cos\{s\sqrt{R/B}\},\quad x = s,\quad y = \alpha\sqrt{B/R}\sin\{x\sqrt{R/B}\}, \tag{17}$$

sodaß die Kurve annähernd eine Sinuskurve von kleiner Amplitude ist. Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Wendepunkten ist gleich $\pi\sqrt{B/R}$. Es zeigt sich also, daß ein langer gerader Stab durch Kräfte, die an den Enden in Richtung der Anfangslage des Stabs angreifen, gebogen werden kann, falls die Länge $l$ und die Kraft $R$ durch die Ungleichung

$$l^2 R > \pi^2 B \tag{18}$$

verknüpft sind.

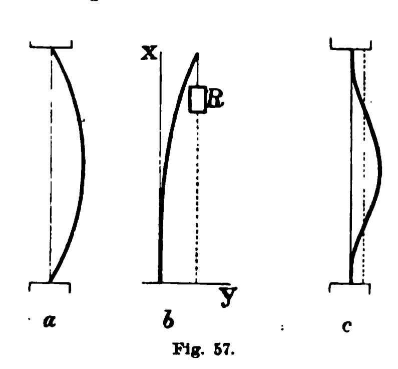


Fig. 57.

Wenn an dem einen Ende die Stabrichtung in der Kraftrichtung festgehalten wird, so ist die Länge gleich dem doppelten Abstand zweier aufeinander folgenden Wendepunkte, und statt der Ungleichung (18) haben wir

$$l^2 R > \tfrac{1}{4}\pi^2 B. \tag{19}$$

Wenn beide Stabenden in derselben geraden Linie festgehalten werden, so ist die Länge gleich dem doppelten Abstand zweier aufeinander

1) Die Theorie geht aus von Euler. Siehe *Einleitung*, p. 4.

folgenden Wendepunkte, und statt der Ungleichung (18) haben wir

$$l^2 R > 4\pi^2 B. \qquad (20)$$

Diese drei Fälle sind in Fig. 57 veranschaulicht.

Wir können diese Ergebnisse auch sehr leicht ableiten, ohne von der allgemeinen Theorie der *Elastica* auszugehen. Wir nehmen den zweiten Fall, betrachten also einen vertikal gestellten langen dünnen Stab, der an der Spitze ein Gewicht $R$ trägt, während das untere Ende vertikal festgehalten wird.[1]) Die x-Achse sei die durch den tiefsten Punkt gezogene, nach oben gerichtete Vertikale, die y-Achse die durch denselben Punkt gehende, in der Biegungsebene verlaufende Horizontale (Fig. 57 b). Wird der Stab nur sehr schwach gebogen, so lautet die Gleichung des Gleichgewichts des von einem beliebigen Querschnitt und dem belasteten Ende begrenzten Stabstücks mit hinreichender Annäherung

$$-B\frac{d^2 y}{dx^2} + R(y_1 - y) = 0,$$

wo $y_1$ die Verschiebung des belasteten Endes. Diejenige Lösung dieser Gleichung, die den Bedingungen genügt, daß y mit x verschwindet, und daß $y = y_1$ für $x = l$, ist

$$y = y_1\left[1 - \frac{\sin\{(l-x)\sqrt{R/B}\}}{\sin\{l\sqrt{R/B}\}}\right],$$

und diese Lösung läßt $dy/dx$ mit x verschwinden, wenn $\cos\{l\sqrt{R/B}\} = 0$. Der kleinste Wert von $l$, durch den die Bedingungen sich befriedigen lassen, ist daher $\frac{1}{2}\pi\sqrt{B/R}$.

Aus obigem schließen wir, daß der Stab in dem durch Fig. 57 b dargestellten Fall, wenn die Länge etwas größer als $\frac{1}{2}\pi\sqrt{B/R}$ oder die Last etwas größer als $\frac{1}{4}\pi^2 B/l^2$ ist, unter der Last sich so biegt, daß die Zentrallinie die Form des Halbbogens einer Sinuslinie von kleiner Amplitude annimmt. Ist die Länge des Stabes kleiner als die kritische Länge, so verkürzt er sich lediglich unter Einwirkung der Last. Ist die Länge größer als die kritische Länge, so würde der Stab, wenn er genau zylindrisch wäre und die Last genau zentral angriffe, lediglich zusammengedrückt werden; das Gleichgewicht eines derartig zusammengedrückten Stabes ist aber *instabil*. Um dies darzutun, haben wir nur zu zeigen, daß die potentielle Energie des Systems bei Biegung kleiner ist als bei Verkürzung.

### § 265. Berechnung der Verzerrungsenergie des Ständers.

Die Länge $l$ sei etwas größer als $\frac{1}{2}\pi\sqrt{B/R}$. Es bezeichne $\omega$ den Inhalt des Querschnitt des Stabes und $E$ den Youngschen Modul des

1) Wir vernachlässigen das Eigengewicht des Stabes. Das Problem der Biegung eines vertikalen Stabes durch sein eigenes Gewicht werden wir in § 276 behandeln.

Stoffes. Wenn der Stab einfach zusammengedrückt wird, so beträgt die Verkürzung $R/E\omega$, das belastete Ende sinkt um das Stück $Rl/E\omega$, und der daher rührende Verlust an potentieller Energie ist gleich $R^2 l/E\omega$. Die potentielle Energie, die beim Übergang vom ungespannten zum gepreßten Zustand verloren geht, beträgt daher $\frac{1}{2} R^2 l/E\omega$.

Wenn der Stab sich biegt und die Form des Halbbogens einer *Elastica* von kleinem Winkel $\alpha$ annimmt, so ist die potentielle Energie, die durch das Herabsinken der Last verloren geht, gleich $R(l - \int \cos\theta\, ds)$, wo die Integration den Stab entlang erstreckt ist. Die potentielle Energie der Biegung ist gleich $\frac{1}{2} B \int (d\theta/ds)^2 ds$ oder gleich $R\int(\cos\theta - \cos\alpha)\,ds$. Die Zugbeanspruchung hat für jeden Querschnitt den Betrag $E\omega\varepsilon$, wo $\varepsilon$ die Dehnung der Zentrallinie, andererseits ist sie gleich $-R\cos\theta$, und die potentielle Energie der Kontraktion ist daher gleich $\frac{1}{2} E\omega \int (R\cos\theta/E\omega)^2 ds$ oder gleich $\frac{1}{2}(R^2/E\omega)\,\{l - \int \sin^2\theta\, ds\}$. Mithin beträgt der Verlust an potentieller Energie beim Übergang vom ungespannten in den gebogenen Zustand

$$R\,\{l(1+\cos\alpha) - 2\int\cos\theta\, ds\} - \tfrac{1}{2}(R^2/E\omega)\,\{l - \int\sin^2\theta\, ds\}.$$

Der Überschuß der potentiellen Energie des zusammengedrückten Stabes über die des gebogenen Stabes ist daher gleich

$$R\,\{l(1+\cos\alpha) - 2\int\cos\theta\, ds\} + \tfrac{1}{2}(R^2/E\omega)\int\sin^2\theta\, ds - lR^2/E\omega. \tag{21}$$

Wir haben nun

$$\int\cos\theta\, ds = \sqrt{B/R}\,(2\,E\,\mathrm{am}\,K - K) = l\,(2\,K^{-1}E\,\mathrm{am}\,K - 1),$$

da ja $l = K\sqrt{B/R}$. Ferner haben wir

$$K = \tfrac{1}{2}\pi\,(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \cdots),\quad E\,\mathrm{am}\,K = \tfrac{1}{2}\pi\,(1 - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{3}{64}k^4 - \cdots)$$

und daher

$$2\,K^{-1}E\,\mathrm{am}\,K - 1 = 1 - k^2 - \tfrac{1}{8}k^4\cdots$$

Der obige Ausdruck (21) ist daher gleich

$$Rl\,\{\tfrac{1}{4}k^4 - R/E\omega\} + \tfrac{1}{2}(R^2/E\omega)\int\sin^2\theta\, ds \tag{22}$$

Bezeichnen wir die Strecke $\frac{1}{2}\pi\sqrt{B/R}$ mit $l_0$, so haben wir

$$l_0(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \cdots) = l,$$

mithin annähernd $k^2 = 4\,(l/l_0 - 1)$, sodaß

$$\tfrac{1}{4}k^4 - R/E\omega = 4\,(l/l_0 - 1)^2 - R/E\omega;$$

dies ist positiv, falls

$$l > l_0\,\{1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{R/E\omega}\}$$

oder

$$l > l_0 + \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{B/E\omega}.$$

Die Größe $B$ ist das Produkt aus $E\omega$ und dem Quadrat des Träg-

heitsradius des Querschnitts, der bezogen ist auf eine durch den Schwerpunkt gehende, zur Biegungsebene senkrechte Achse. Bezeichnen wir diesen Trägheitsradius mit $c$, so finden wir, daß die potentielle Energie des zusammengedrückten Stabes jedenfalls größer ist als die des gebogenen Stabes, wenn

$$l > l_0 + \tfrac{1}{4}\pi c. \tag{23}$$

Das Glied $\frac{1}{4}\pi c$ liefert eine Korrektion für die nach der üblichen Formel berechnete kritische Länge; sie ist natürlich in allen Fällen, wo die Theorie dünner Stäbe anwendbar ist, belanglos. Eine andere Korrektion von derselben Ordnung würde sich ergeben, wenn der besondere Zustand der Teile des Stabes in der Nähe der Enden in Rücksicht gezogen würde. Wenn die Kräfte, die das untere Ende festhalten, so verteilt sind, daß die Verzerrung in der Nähe desselben durch die Theorie dünner Stäbe richtig dargestellt wird, so bleibt der Endquerschnitt als Ganzes nicht fest, und die Spannungen an diesem Ende leisten eine gewisse Arbeit [vgl. § 235 f)]. Wird er andererseits festgehalten, so treten nahe am Ende „lokale Störungen" auf, und die hinzukommende Energie, die von ihnen abhängt, müßte noch in Betracht gezogen werden. Ähnliche lokale Störungen werden in der Nähe des belasteten Endes auftreten.

## § 266. Knickfestigkeit.

Sowohl im Falle des kurzen und einfach zusammengedrückten als auch im Falle des langen und gebogenen Stabes ist vorausgesetzt, daß es sich um elastische Verzerrungen handelt, d. h. um Verzerrungen, die bei Entfernung der Last verschwinden. Soll die in § 264 dargelegte Eulersche Theorie der Knickung eines langen dünnen Ständers praktische Bedeutung haben, so muß natürlich die Last, die den Ungleichungen vom Typus (19) zufolge erforderlich ist, um Biegung zu bewirken, kleiner sein als diejenige, die bleibende Formänderung durch Zerdrücken hervorrufen würde. Diese Bedingung ist nun erfüllt, wenn die Höhe des Ständers groß ist gegen die linearen Abmessungen des Querschnitts. Eine genaue Berechnung des kleinsten dieser Bedingung genügenden Wertes des Verhältnisses der Höhe zum Durchmesser scheitert an dem Umstand, daß über die Bruchbedingungen im allgemeinen (Kap. IV) und über das Eintreten des Zerdrückens (§ 189) nichts Genaues bekannt ist.

Praktisch kommen für die Bedingungen des Knickens eines belasteten Stabes oder Ständers noch andere Erwägungen in Frage. Wenn die Last nicht genau zentral angreift oder wenn ihre Richtung nicht genau mit der des Stabes zusammenfällt, so ist die Vertikallast noch von einem Biegungsmoment oder einer Querkraft begleitet. Die von der Last $R$ herrührende Verkürzung ist gleich $R/E\omega$. Wenn die Last nicht genau zentrisch angreift, so ist das Biegungsmoment von der Größenordnung $Rc$, wo $c$ eine lineare Querschnittsabmessung; die von dem Biegungsmoment herrührende Dehnung der

Längsfaser ist von der Ordnung $Rc^2/B$, kann also sehr wohl (numerisch) zwei- oder dreimal so groß sein wie die Verkürzung $R/E\omega$. Das Biegungsmoment kann daher den Stab schon knicken, wenn die Last noch kleiner ist als diejenige, die ihn zerdrückt. Bildet andererseits die Angriffslinie einen kleinen Winkel $\beta$ mit der Zentrallinie, so liefert die Querkraft $R \sin \beta$ in einem Abstand, der mit der Stablänge $l$ vergleichbar ist, ein Biegungsmoment, das mit $lR \sin \beta$ vergleichbar ist; die von diesem Biegungsmoment herrührende Dehnung einer Längsfaser ist vergleichbar mit $lRc \sin \beta / B$. Somit vermag bereits ein geringer Richtungsunterschied zwischen Angriffslinie und Zentrallinie einen einigermaßen langen Ständer zum Knicken zu bringen. Die hier geschilderten Unsicherheitsmöglichkeiten lassen sich am besten mittels der Saint-Venantschen Biegungstheorie (Kap. XV) untersuchen; aber aus einem Grunde, den wir bereits erwähnten, besteht wenig Aussicht auf eine genaue Ermittlung der in Frage kommenden Sicherheitsbedingungen.

Natürlich sind Überlegungen, wie sie hier für den Vorgang des Knickens eines belasteten Stabes auseinander gesetzt sind, auch auf andere Knickprobleme anwendbar. Daß sie herangezogen werden müssen, hat E. Lamarle[1]) betont. Kritische und ergänzende Ausführungen zu seiner Arbeit hat K. Pearson gegeben.[2]) Neuerdings sind die Fragen der Knickfestigkeit Gegenstand einer größeren Diskussion gewesen.[3])

## § 267. Elastische Stabilität.

Die Möglichkeit einer geradlinigen Form und einer gebogenen Form bei gleicher Endlast steht mit dem Theorem von § 118 nicht in Widerspruch; denn der dünne Stab kann, ohne Verzerrungen zu erfahren, die größer sind als die in der mathematischen Elastizitätstheorie betrachteten, so deformiert werden, daß die relativen Verschiebungen seiner Teile nicht klein sind.[4])

Die Theorie der Stabilität elastischer Systeme, wie sie durch die Ausführungen in den §§ 264, 265 an einem Beispiel gekennzeichnet ist, läßt sich mit der Poincaréschen Theorie des „Verzweigungsgleichgewichts“[5]) in Zusammenhang bringen. Die Form des Stabes

1) „Mém. sur la flexion du bois“, *Ann. des traveaux publics de Belgique*, t. 4 (1846).

2) Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, p. 678ff.

3) Es sei verwiesen auf die Arbeiten von J. Kübler, C. J. Kriemler, L. Prandtl in der *Zeitschr. d. V. deutscher Ingenieure*, Bd. 44 (1900), von Kübler und Kriemler in der *Zeitschr. Math. Phys.*, Bde. 45—47 (1900—1902), und die Dissertation von Kriemler, „Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren ... auf Biegung beanspruchter Stäbe ...“ (Karlsruhe 1902).

4) Vgl. G. H. Bryan, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 6 (1888).

5) *Acta Mathematica*, t. 7 (1885).



ist bestimmt durch die Dehnung $\varepsilon$ am belasteten Ende und die Gesamtkrümmung $\alpha$; und diese Größen hängen von der Last $R$ ab, wenn die Länge $l$ und die Biegungssteifigkeit $B$ als konstant angesehen werden. Wir können den Zustand des Stabes durch einen Punkt mit den Koordinaten $\varepsilon$ und $\alpha$ darstellen, und wenn $R$ variiert, beschreibt der Punkt eine Kurve. Wenn $R$ kleiner ist als die kritische Last, so verschwindet $\alpha$, und der Gleichgewichtszustand, definiert durch $\varepsilon$ als Funktion von $R$, ist stabil. Wenn $R$ den kritischen Wert überschreitet, so würde ein möglicher Gleichgewichtszustand immer noch durch $\alpha = 0$ gegeben sein; es gibt jedoch noch einen andern möglichen Gleichgewichtszustand, bei dem $\alpha$ nicht verschwindet, und bei diesem Zustand sind $\alpha$ und $\varepsilon$ bestimmte Funktionen von $R$; die Gleichgewichtszustände für wechselnde Werte von $R$ sind daher durch Punkte einer gewissen Kurve dargestellt. Diese Kurve läuft von demjenigen Punkte der Geraden $\alpha = 0$ aus, der die Dehnung oder vielmehr die Verkürzung unter der kritischen Last darstellt. Poincaré bezeichnet einen derartigen Punkt als einen „Verzweigungspunkt", und er zeigt, daß in einem solchen Punkt im allgemeinen ein „Stabilitätswechsel" stattfindet; für gegenwärtiges Beispiel besagt dies folgendes: Zustände, die durch Punkte auf der Geraden $\alpha = 0$ dargestellt sind, in denen $\varepsilon$ die Dehnung unter der kritischen Last numerisch überschreitet, sind instabil, und die Stabilität geht vom Verzweigungspunkte aus auf diejenigen Zustände über, die durch Punkte auf der Kurve, für die $\alpha \neq 0$, dargestellt sind.

## § 268. Stabilität der Elastica mit Wendepunkt.

Wenn das untere Ende des belasteten Stabes in vertikaler Stellung festgehalten wird und die Länge $l$ etwas größer ist als $\frac{3}{2}\pi\sqrt{B/R}$, so ist eine Sinuskurve von kleiner Amplitude mit zwei Wendepunkten eine mögliche Form der Zentrallinie (Fig. 58 b). Eine andere mögliche Form ist eine *Elastica*, wie sie in Fig. 58 c dargestellt ist. Im allgemeinen sind, wenn $n$ eine ganze Zahl, die der Bedingung

$$\tfrac{1}{2}(2n+1)\pi > l\sqrt{R/B} > \tfrac{1}{2}(2n-1)\pi \tag{24}$$

genügt, $n$ Formen außer der instabilen geradlinigen Form möglich, und sie bestehen bezüglich aus $1, 3, \ldots, 2n-1$ Halbbogen verschiedener Kurven der *Elastica*-Familie. Die Formen dieser Kurven sind bezüglich durch die Gleichungen

$$K = l\sqrt{R/B} \times [1, \tfrac{1}{3}, \ldots 1/(2n-1)] \tag{25}$$

gegeben. Wir wollen zeigen, daß alle diese Formen instabil sind außer derjenigen, zu der das größte $K$, d. h. die kleinste Zahl von Wendepunkten gehört.[1])

1) Zu dem entgegengesetzten Resultat gelangt L. Saalschütz, *Der belastete*

Sehen wir ab von der praktisch bedeutungslosen potentiellen Energie, die von der Dehnung oder Verkürzung der Zentrallinie herrührt, so können wir den Verlust an potentieller Energie beim Übergang vom ungespannten Zustand zur gebogenen Form, welche $n+1$ Wendepunkte aufzeigt, in derselben Weise wie in § 265 berechnen und erhalten

$$R\left[l(1+\cos\alpha)-2\int_0^l \cos\theta\, ds\right], \tag{26}$$

oder

$$(2r+1)\sqrt{BR}\,(4K_r-4E_r-2K_r k_r^2), \tag{27}$$

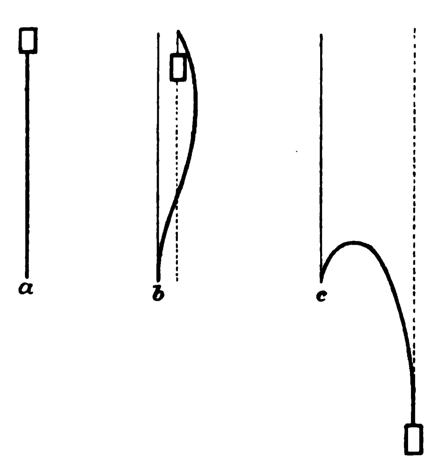



Fig. 58.

wo $E_r$ für $E \operatorname{am} K_r$ geschrieben ist und der Index $r$ die Zahl $(r+1)$ der Wendepunkte feststellt. Wir vergleichen die potentiellen Energien, die den Formen mit $r+1$ und $s+1$ Wendepunkten entsprechen; $s$ sei größer als $r$. Da

$$(2r+1)K_r=(2s+1)K_s, \tag{28}$$

so ist die potentielle Energie des Stabes mit $s+1$ Wendepunkten die größere, falls

$$(2s+1)(2E_s+K_s k_s^2)>(2r+1)(2E_r+K_r k_r^2).$$

Da nun

$$E \operatorname{am} K=(1-k^2)\left(K+k\frac{dK}{dk}\right),$$

so lautet diese Bedingung

$$(1-k_s^2)\left(1+\frac{2k_s}{K_s}\frac{dK_s}{dk_s}\right)>(1-k_r^2)\left(1+\frac{2k_r}{K_r}\frac{dK_r}{dk_r}\right). \tag{29}$$

---

*Stab* (Leipzig 1880), doch halte ich seine Beweisführung nicht für überzeugend. Das im Text angegebene Resultat deckt sich mit dem Ergebnis, das J. Larmor, *loc. cit.* p. 460, mittels eines anderen Verfahrens erhält.

Da aber

$$\frac{d}{dk}\left[(1-k^2)\left(1+\frac{2k}{K}\frac{dK}{dk}\right)\right] = -\frac{2k(1-k^2)}{K}\left(\frac{dK}{dk}\right)^2,$$

so folgt, daß $(1-k^2)\left(1+\frac{2k}{K}\frac{dK}{dk}\right)$ mit wachsendem $k$ abnimmt. Wenn nun $s > r$, so ist $K_s < K_r$ und $k_s < k_r$; demnach ist die Ungleichung (29) erfüllt.

In dem in Fig. 58 dargestellten Fall handelt es sich um drei mögliche Formen: a) die instabile geradlinige Form, b) die gebogene Form mit zwei Wendepunkten, c) die gebogene Form mit einem Wendepunkt. Für die Form c) ist der Winkel $\alpha$ gegeben durch $K = \frac{3}{2}\pi$ und liegt zwischen $175^0$ und $176^0$.

Die Folgerung, daß die stabile Form die mit einem einzigen Wendepunkte ist, steht mit der Poincaréschen Theorie des Stabilitätswechsels in einem Verzweigungspunkt nicht im Widerspruch, da diejenigen Kurven in der $(\varepsilon, \alpha)$-Ebene, welche Formen mit zwei oder mehr Wendepunkten darstellen, nicht von der Linie abzweigen, welche Formen mit einem Wendepunkt repräsentieren, sondern von der Geraden $\alpha = 0$, welche geradlinige Formen darstellt.

Die Instabilität derjenigen Formen der Elastica, die zwischen den Enden eine größere als die kleinstmögliche Zahl von Wendepunkten besitzen, ist als Erfahrungstatsache wohl bekannt. Jeder besondere Fall läßt sich in derselben Weise untersuchen wie der oben behandelte spezielle Fall, bei dem die Tangente an dem einen Ende in Richtung der Angriffslinie festgehalten wird. Eine derartige Untersuchung vermag jedoch nicht die Frage zu entscheiden, ob irgend eine spezielle Form für Verschiebungen stabil ist, bei denen die Zentrallinie aus ihrer Ebene herausbewegt wird. Diese Frage ist noch nicht vollständig gelöst. Einen besonderen Fall werden wir in § 272 e) behandeln.

## § 269. Durch Endkräfte und -momente gebogener und gedrillter Stab.

Wir nehmen nun das allgemeine Problem von § 260 wieder auf und drücken die Richtungen der Torsion-Biegungs-Hauptachsen in einem Punkte $P_1$ der verzerrten Zentrallinie mittels der in § 253 definierten Winkel $\theta, \Psi, \Phi$ aus. Als feste Richtung $P_1 z$ in Fig. 46 jenes Paragraphen wählen wir die Richtung der Kraft, die an demjenigen Ende des Stabes angreift, dem der größte Wert von $s$ entspricht. Die Spannungsresultanten $N, N', T$ sind gleichwertig mit einer in dieser Richtung wirkenden Kraft $R$, mithin gleich

$$(N, N', T) = R(-\sin\theta\cos\Phi,\ \sin\theta\sin\Phi,\ \cos\theta). \qquad (30)$$

Gleichung (3), § 260, geht über in

$$\tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\varkappa'^2 + C\tau^2) + R\cos\theta = \text{const.} \qquad (31)$$

Da die an den Stabenden angreifenden Kräfte kein Moment um die Gerade $P_1 z$ ergeben, so ist die Summe der Komponenten der Spannungsmomente um eine Achse, die durch den Schwerpunkt eines Querschnitts zu dieser Geraden parallel läuft, gleich der entsprechen-

den Summe für denjenigen Endquerschnitt, dem der größte Wert von $s$ angehört. Wir haben daher die Gleichung

$$-A\varkappa \sin\theta \cos\Phi - B\varkappa' \sin\theta \sin\Phi + C\tau \cos\theta = \text{const.} \qquad (32)$$

Die entsprechende Gleichung beim Kreiselproblem drückt die Konstanz der Impulskomponente des Kreisels um eine durch den festen Punkt gehende vertikale Achse aus.

Die Gleichungen (31) und (32) stellen zwei Integrale der Gleichungen (2), § 260, dar; könnten wir ein drittes Integral bekommen, so würden $d\theta/ds$, $d\Psi/ds$, $d\Phi/ds$ sich durch $\theta$, $\Psi$, $\Phi$ ausdrücken lassen, und wir könnten die möglichen Formen ermitteln, in denen der Stab gehalten werden kann. Im allgemeinen Falle ist ein drittes Integral nicht bekannt; wenn aber die beiden Biegungssteifigkeiten $A$ und $B$ einander gleich sind, so läßt die dritte dieser Gleichungen sofort das Integral zu

$$\tau = \text{const.} \qquad (33)$$

Die Größen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\tau$ drücken sich mittels der Gleichungen (8), § 253, durch $\theta$, $\Psi$, $\Phi$, $d\theta/ds, \ldots$ aus, und die Gleichungen (31), (32), (33) lassen sich so integrieren[1]), daß $\theta$, $\Psi$, $\Phi$ als Funktionen von $s$ ausgedrückt erscheinen, und die Form der Zentrallinie bestimmt sich dann durch die Gleichungen

$$\frac{d\mathrm{x}}{ds} = \sin\theta\cos\Psi, \quad \frac{d\mathrm{y}}{ds} = \sin\theta\sin\Psi, \quad \frac{d\mathrm{z}}{ds} = \cos\theta,$$

wo x, y, z auf feste Achsen bezogene Koordinaten.

Wir wollen nicht weiter auf diese allgemeine Theorie eingehen, sondern einige wichtige Spezialfälle betrachten.

## § 270. Zu einer Schraubenlinie gebogener Stab.[2])

Die *gleichmäßige Bewegung* eines symmetrischen Kreisels, dessen Figurenachse mit der nach oben gerichteten Vertikalen einen konstanten Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ einschließt, stellt das Analogon einer gewissen Konfiguration eines gebogenen und gedrillten Stabes dar, für den $A = B$. Setzen wir $\theta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, $d\theta/ds = 0$, so folgt aus (8), § 253,

$$\varkappa = -\frac{d\Psi}{ds}\cos\alpha\cos\Phi, \quad \varkappa' = \frac{d\Psi}{ds}\cos\alpha\sin\Phi, \quad \tau = \frac{d\Phi}{ds} + \sin\alpha\frac{d\Psi}{ds}$$

und aus den Gleichungen (31), (32), (33) von § 269

$$\tau = \text{const.}, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = \text{const.}, \quad d\Psi/ds = \text{const.}$$

Die Krümmung der Zentrallinie ist konstant und zwar gleich $\cos\alpha\,(d\Psi/ds)$, die Binormale dieser Kurve liegt in der $(x, y)$-Ebene

1) Siehe F. Klein und A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, Heft 2, Leipzig 1898, oder E. T. Whittacker, *Analytical Dynamics*, Cambridge 1904.

2) Vgl. Kirchhoff, *loc. cit.* p. 439.

und bildet mit der negativen $x$-Achse den Winkel $\Phi$. Daraus folgt, daß $\Phi$ mit dem Winkel identisch ist, der in § 253 mit $f$ bezeichnet wurde, und daß die Windung der Kurve den Betrag $\sin\alpha\,(d\Psi/ds)$ hat. Da die Zentrallinie eine Kurve konstanter Krümmung und Windung ist, ist es eine *Schraubenlinie, die auf einem geraden Kreiszylinder verläuft.* Die Achse der Schraubenlinie ist parallel zur Wirkungslinie von $R$, und $\alpha$ ist der Winkel, den die Tangente in irgend einem Punkte mit einer zu dieser Achse senkrechten Ebene einschließt.

Es sei $r$ der Radius des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt. Die Krümmung $1/\varrho$ und die Windung $1/\Sigma$ sind durch die Gleichungen gegeben

$$1/\varrho = \cos^2\alpha/r, \quad 1/\Sigma = \sin\alpha\cos\alpha/r, \tag{34}$$

und wir können schreiben

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= -\cos\Phi\cos^2\alpha/r, & \kappa' &= \sin\Phi\cos^2\alpha/r, \\ d\Psi/ds &= \cos\alpha/r, & d\Phi/ds &= \tau - \sin\alpha\cos\alpha/r. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Aus den Gleichungen (2), § 260, erhalten wir

$$(N, N') = (-\cos\Phi,\ \sin\Phi)\,[C\tau\cos^2\alpha/r - B\sin\alpha\cos^3\alpha/r^2];$$

die Gleichungen (30) ergeben dann

$$R = C\tau\cos\alpha/r - B\sin\alpha\cos^2\alpha/r^2. \tag{36}$$

Die am Ende angreifende Kraft zieht oder drückt, je nachdem die rechte Seite von (36) positiv oder negativ ist. (Siehe Fig. 59). Soll es eine Zugkraft sein, so muß $\tau$ größer sein als $B\sin\alpha\cos\alpha/Cr$.

Die Achse des am Ende angreifenden Kräftepaars liegt in der Tangentialebene des Zylinders im Endpunkt der Zentrallinie, und die Komponenten dieses Kräftepaars um die Binormale und die Tangente der Schraubenlinie in diesem Punkt sind gleich $B\cos^2\alpha/r$ und gleich $C\tau$. Die Komponenten desselben Kräftepaars um die Tangente des Querschnitts und die Erzeugende des Zylinders in demselben Punkt sind daher gleich $Rr$ und gleich $K$, wo $K$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

Fig. 59.

$$K = C\tau\sin\alpha + B\cos^3\alpha/r. \tag{37}$$

Daraus folgt, daß dem Stab ein gegebener Drall und seiner Zentrallinie die Form einer gegebenen Schraubenlinie durch ein „Gerenk“ („Dyname“ engl. „wrench“) erteilt werden kann, das aus der durch (36) gegebenen Kraft und dem durch (37) gegebenen Kräftepaar besteht; die Achse des Gerenks fällt in die Achse der Schraubenlinie. Die Kraft und

das Kräftepaar der Renkung werden durch zwei an den Stabenden befestigte starre Blöcke ausgeübt.

Die Schraubenlinienform kann durch Endkräfte allein, ohne Kräftepaare, erhalten werden. Die Kraft hat dann den Betrag $B \cos^2 \alpha / r^2 \sin \alpha$ und drückt längs der Achse der Schraubenlinie. In diesem Fall muß ein Drall vom Betrage $- B \cos^3 \alpha / Cr \sin \alpha$ vorhanden sein. Ebenso kann diese Form durch Endmomente allein, ohne Kräftepaare, erhalten werden; das Kräftepaar hat dann den Betrag $B \cos \alpha / r$, und seine Achse ist der Achse der Schraubenlinie parallel. In diesem Fall muß ein Drall vom Betrage $B \sin \alpha \cos \alpha / Cr$ auftreten.

Handelt es sich um einen Stab, der, wenn bloß die Biegung rückgängig gemacht würde, prismatisch wäre, so verschwindet $d\Phi/ds$, und der Drall des Stabes ist gleich der Windung der Zentrallinie (vgl. § 253). Um den Stab so zu halten, daß dieser Drall auftritt und die Zentrallinie eine gegebene Schraubenlinie bildet, ist eine Renkung um die Achse der Schraubenlinie erforderlich; die Kraft $R$ und das Moment $K$ des Gerenks sind durch die Gleichungen gegeben

$$R = -(B - C) \sin \alpha \cos^2 \alpha / r^2, \quad K = (B \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha) \cos \alpha / r.$$

## § 271. Theorie der Spiralfedern.[1]

Wenn die Querschnitte des Stabes kinetische Symmetrie besitzen, sodaß $A = B$, und wenn der ungespannte Stab die Form einer Schraubenlinie und einen solchen Drall besitzt, daß er, wenn bloß die Biegung rückgängig gemacht würde, prismatisch wäre, so können wir den Anfangszustand durch folgende Formeln ausdrücken:

$$\varkappa_0 = 0, \quad \varkappa_0' = \cos^2 \alpha / r, \quad \tau_0 = \sin \alpha \cos \alpha / r. \tag{38}$$

Durch geeignete Kräfte und Kräftepaare kann der Stab in dem Zustand gehalten werden, der sich durch die Formeln ausdrückt

$$\varkappa_1 = 0, \quad \tau_1' = \cos^2 \alpha_1 / r_1, \; \tau_1 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 / r_1, \tag{39}$$

wo $r_1$, $\alpha_1$ der Radius und der Steigungswinkel einer neuen Schraubenlinie. Die Spannungsmomente in einem beliebigen Querschnitt sind dann gegeben durch die Gleichungen

$$G = 0, \quad G' = B\left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{r_1} - \frac{\cos^2 \alpha}{r}\right), \quad H = C\left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{r_1} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}\right),$$

und die Spannungsresultanten sind gegeben durch

$$N = 0, \quad T = N' \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$N' = C \frac{\cos^2 \alpha_1}{r_1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{r_1} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}\right) - B \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{r_1} \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{r_1} - \frac{\cos^2 \alpha}{r}\right).$$

---

1) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 139 ff.

Die Gleichungen von § 259 sind sämtlich befriedigt. Die neue Konfiguration läßt sich durch ein Gerenk erhalten, dessen Achse mit der Achse der Schraubenlinie zusammenfällt und dessen Komponenten, die Kraft $R$ und das Moment $K$, durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned} R &= C\frac{\cos\alpha_1}{r_1}\left(\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{r_1} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}\right) - B\frac{\sin\alpha_1}{r_1}\left(\frac{\cos^2\alpha_1}{r_1} - \frac{\cos^2\alpha}{r}\right) \\ K &= C\sin\alpha_1\left(\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{r_1} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r}\right) + B\cos\alpha_1\left(\frac{\cos^2\alpha_1}{r_1} - \frac{\cos^2\alpha}{r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Auf dies Ergebnis gründet sich die Theorie der Spiralfedern. Im ungespannten Zustand sei die Feder durch die Gleichungen (38) bestimmt, sodaß die Zentrallinie eine Schraubenlinie vom Steigungswinkel $\alpha$ auf einem Zylinder vom Radius $r$ ist und die Hauptnormalen und Binormalen der einzelnen Querschnitte homologe Linien dieser Querschnitte darstellen. Die Länge der Schraubenlinie sei $l$, die ihrer Projektion auf die Achse der Schraubenlinie sei $h$; die Zylinderkoordinaten $r, \theta, z$ der beiden Enden sind dann $r, 0, 0$ und $r, \chi, h$, wo

$$\chi = (l\cos\alpha)/r, \quad h = l\sin\alpha. \quad (41)$$

Wir nehmen an, die Feder werde durch ein Gerenk um die Achse der Schraubenlinie deformiert; die Kraft $R$ und das Moment $K$ des Gerenks seien gegeben. Wir werden vermuten, daß die Zentrallinie der verzerrten Feder eine Schraubenlinie vom Steigungswinkel $\alpha_1$ auf einem Zylinder vom Radius $r_1$ wird und daß die Hauptnormalen und Binormalen für die einzelnen Querschnitte homologe Linien bleiben. Dann drücken sich $R$ und $K$ mittels der Gleichungen (40) in $\alpha_1$ und $r_1$ aus. Ist die Deformation klein, so können wir $r + \delta r$ und $\alpha + \delta\alpha$ statt $r_1$, $\alpha_1$ schreiben und annehmen, daß die Änderungen $\delta\chi$ und $\delta h$, die $\chi$ und $h$ erfahren, klein sind. Wir haben

$$\delta h = (l\cos\alpha)\,\delta\alpha, \quad \delta\chi = -[(l\sin\alpha)/r]\,\delta\alpha - [(l\cos\alpha)/r^2]\,\delta r,$$

woraus

$$\delta\alpha = (\delta h)/(l\cos\alpha), \quad (\delta r)/r^2 = -(\sin\alpha\cdot\delta h + r\cos\alpha\cdot\delta\chi)/lr\cos^2\alpha$$

Mithin

$$\delta\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r} = -\sin\alpha\cos\alpha\frac{\delta r}{r^2} + \frac{\cos 2\alpha}{r}\,\delta\alpha = \cos\alpha\frac{\delta h}{lr} + \sin\alpha\frac{\delta\chi}{l},$$

und

$$\delta\frac{\cos^2\alpha}{r} = -\cos^2\alpha\frac{\delta r}{r^2} - 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\delta\alpha}{r} = \frac{\cos\alpha}{l}\,\delta\chi - \frac{\sin\alpha}{lr}\,\delta h.$$

Daraus folgt, daß die Kraft $R$ und das Kräftepaar $K$ sich folgendermaßen in $l, r, \alpha, \delta h, \delta\chi$ ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{1}{lr^2}[(C\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha)\,\delta h + (C-B)\sin\alpha\cos\alpha\cdot r\delta\chi],\\ K &= \frac{1}{lr}\,[(C-B)\sin\alpha\cos\alpha\cdot\delta h + (C\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha)\,r\delta\chi].\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

Wird die Feder durch axiale Kraft allein[1]), ohne Moment, deformiert, so sind die axiale Verschiebung $\delta h$ und die Winkelverschiebung $\delta\chi$ durch die Gleichungen gegeben

$$\delta h = lr^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{B} + \frac{\cos^2\alpha}{C}\right)R,\quad \delta\chi = lr\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)R.$$

Ist der Querschnitt der Feder ein Kreis vom Radius $a$, so ist $1/C - 1/B = 4\sigma/E\pi a^4$, wo $\sigma$ die Poissonsche Konstante und $E$ der Youngsche Modul des Materials. Mithin ist sowohl $\delta h$ wie $\delta\chi$ positiv. In demselben Falle ist $\delta r$ negativ, sodaß die Feder, wenn sie ausgereckt wird, sich stärker aufrollt.

## § 272. Weitere Resultate.

a) *Durch Endmomente beanspruchter Stab.*

Wenn ein Stab, der im ungespannten Zustand gerade und prismatisch ist, durch Kräftepaare, die an den Enden angreifen, gebogen und gedrillt gehalten wird, so ist das kinetische Analogon ein starrer Körper, der sich kräftefrei bewegt. W. Heß[2]) hat die Analogie im einzelnen durchgeführt. Besitzt der Querschnitt kinetische Symmetrie, sodaß $A = B$, so sind, wie die Gleichgewichtsgleichungen zeigen, der Drall $\tau$ und die Krümmung $(\varkappa^2 + \varkappa'^2)^{\frac{1}{2}}$ Konstanten, und wenn wir wie in § 253

$$\operatorname{tg} f = -\varkappa'/\varkappa$$

setzen, wird

$$B\,(df/ds) = (B - C)\,\tau.$$

Daraus folgt, daß die Windung der Zentrallinie $C\tau/B$ ist, daß diese Kurve mithin eine auf einem Kreiszylinder geführte Schraubenlinie ist. Führen wir wie in § 253 die Eulerschen Winkel $\theta$, $\Psi$, $\Phi$ ein und wählen die Achse der Schraubenlinie parallel zur z-Achse in Fig. 46 jenes Paragraphen, so ist $\theta$ konstant, und $\frac{1}{2}\pi - \theta$ ist der Steigungswinkel $\alpha$ der Schraubenlinie. Die Achse des Endmoments ist die Achse der Schraubenlinie, sein Betrag ist $B\cos\alpha/r$, wie bereits früher gefunden wurde, unter $r$ den Radius des Zylinders verstanden, auf dem die Schraubenlinie liegt.

1) Die Resultate für diesen Fall fand Saint-Venant, *Paris, C. R.*, t. 17 (1843). Eine Anzahl spezieller Fälle wurde ausgearbeitet von Kelvin und Tait, *loc. cit.*, und ebenso von J. Perry, *Applied Mechanics* (London 1899). Die Theorie ist experimentell bestätigt worden von J. W. Miller, *Phys. Rev.* vol. 14 (1902). Die Schwingungen einer Spiralfeder, die ein so schweres Gewicht trägt, daß die Trägheit der Feder vernachlässigt werden kann, sind von L. R. Wilberforce, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 38 (1894), der oben entwickelten Theorie entsprechend behandelt worden.

2) *Math. Ann.* Bd. 23 (1884).

b) *Gerader Stab mit Anfangsdrall.*

Wenn der Stab im ungespannten Zustand den Drall $\tau_0$ und keine Krümmung besitzt, wenn ferner der Querschnitt kinetische Symmetrie hat, sodaß $A = B$, kann der Stab durch eine Renkung um die Achse der Schraubenlinie so gebogen gehalten werden, daß seine Zentrallinie die Form einer Schraubenlinie $(\alpha, r)$ hat, und so gedrillt gehalten werden, daß der Drall gleich $\tau_1$ ist; die Kraft $R$ und das Moment $K$ des Gerenks ergeben sich, wenn man in den Gleichungen (36) und (37) von § 270 $\tau_1 - \tau_0$ für $\tau$ schreibt.

c) *Ringförmig gebogener und gleichmäßig gedrillter Stab.*

Wenn der Stab im ungespannten Zustande gerade und prismatisch ist und der Querschnitt kinetische Symmetrie besitzt, so ist eine der Formen, in denen er durch Endkräfte und -momente gehalten werden kann, diejenige, bei der die Zentrallinie ein Kreis und der Drall den Stab entlang gleichförmig ist. Die Zugbeanspruchung verschwindet und die Schubkraft ist in jedem Querschnitt nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet, ihr Betrag ist $C\tau/r$, wo $r$ der Radius des Kreises.

d) *Stabilität eines gedrückten und gedrillten Stabes.*

Wenn der Stab, der als anfänglich gerade und prismatisch vorausgesetzt wird, durch Endmomente gedrillt wird, ohne jedoch gekrümmt zu werden, so können diese Kräftepaare einen Betrag haben, der geeignet wäre, den Stab gedrillt und gebogen zu halten. Ist $A = B$, so muß die Zentrallinie, wenn Biegung eintritt, eine Schraubenlinie sein. Wenn das Kräftepaar $K$ gerade groß genug ist, um den Stab ohne Verschiebung der Enden zu biegen, so bildet die Zentrallinie gerade einen Schraubengang, der Radius $r$ der Schraubenlinie ist sehr klein und der Steigungswinkel $\alpha$ ist nahezu gleich $\frac{1}{2}\pi$. Wir haben die Gleichungen

$$K = C\tau = Br^{-1}\cos\alpha, \quad l\cos\alpha = 2\pi r,$$

wo $\tau$ der Drall und $l$ die Länge des Stabes. Somit ist diese Konfiguration möglich, falls $2\pi/l = K/B$. Wir erkennen, daß bei einem drillenden Kräftepaar, das größer ist als $2\pi B/l$, der gerade gedrillte Stab instabil ist.

Allgemeiner läßt sich diese Stabilitätsfrage durch Betrachtung des Falles behandeln, daß der Stab durch eine Endkraft $R$ und ein drillendes Kräftepaar $K$ in einer Form gehalten wird, die die Zentrallinie nahezu gerade läßt. Das kinetische Analogon ist ein symmetrischer Kreisel, der sich so bewegt, daß seine Achse nahezu aufrecht bleibt. Das Problem gestattet eine einfache Lösung, wenn feste (x, y, z)-Achsen eingeführt werden und zwar als z-Achse die Achse der Endmomente bzw. die Angriffslinie. Die Zentrallinie ist dieser Achse benachbart und schneidet sie an den Enden. Der Drall $\tau$ ist konstant und das Torsionsmoment $C\tau$ kann in hinreichender Annäherung gleich $K$ gesetzt werden. Das Biegungsmoment hat den Betrag $B/\varrho$, wo $\varrho$ der Krümmungs-

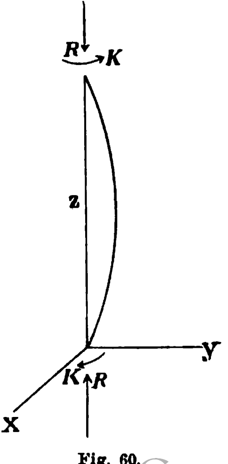


Fig. 60.

radius der Zentrallinie, und seine Achse fällt zusammen mit der Binormalen dieser Kurve. Die Richtungskosinus der Binormalen sind gegeben durch Ausdrücke wie

$$\varrho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

die Komponenten des in einem beliebigen Querschnitt auftretenden Biegungsmoments um die x- und um die y-Achse lassen sich daher mit hinreichender Annäherung durch

$$-B\frac{d^2y}{ds^2},\ B\frac{d^2x}{ds^2}$$

ausdrücken.

Um das Gleichgewicht des von diesem Querschnitt und dem einen Ende begrenzten Stabstücks auszudrücken, nehmen wir Momente um Achsen, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts zur x- und zur y-Achse parallel laufen, und erhalten so die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -B\frac{d^2y}{ds^2} + K\frac{dx}{ds} - yR = 0,\\ B\frac{d^2x}{ds^2} + K\frac{dy}{ds} + xR = 0,\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Das vollständige Integralsystem lautet

$$x = L_1 \sin(q_1 s + \varepsilon_1) + L_2 \sin(q_2 s + \varepsilon_2),$$
$$y = L_1 \cos(q_1 s + \varepsilon_1) + L_2 \cos(q_2 s + \varepsilon_2),$$

wo $L_1$, $L_2$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ willkürliche Konstanten und $q_1$, $q_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$Bq^2 + Kq - R = 0.$$

Die Grenzbedingungen sind 1) daß die Koordinaten x und y an den Enden $s = 0$ und $s = l$ verschwinden, 2) daß die Achse der Endmoments mit der z-Achse zusammenfällt. Die Gleichungen (43) zeigen, daß das zweite System von Bedingungen befriedigt ist, wenn das erste erfüllt ist. Wir haben daher die Gleichungen

$$L_1 \sin\varepsilon_1 + L_2 \sin\varepsilon_2 = 0, \quad L_1 \cos\varepsilon_1 + L_2 \cos\varepsilon_2 = 0,$$

und

$$L_1 \sin(q_1 l + \varepsilon_1) + L_2 \sin(q_2 l + \varepsilon_2) = 0,$$
$$L_1 \cos(q_1 l + \varepsilon_1) + L_2 \cos(q_2 l + \varepsilon_2) = 0,$$

Wenn wir $L_2 \cos\varepsilon_2$ und $L_2 \sin\varepsilon_2$ aus dem ersten Gleichungspaar in das zweite einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen

$$L_1 \left\{\sin(q_1 l + \varepsilon_1) - \sin(q_2 l + \varepsilon_1)\right\} = 0,$$
$$L_1 \left\{\cos(q_1 l + \varepsilon_1) - \cos(q_2 l + \varepsilon_1)\right\} = 0,$$

aus denen folgt, daß $q_1 l$ und $q_2 l$ sich um ein Vielfaches von $2\pi$ unterscheiden. Der kleinste Wert der Länge $l$, durch den sich die Bedingungen befriedigen lassen, ist durch die Gleichung gegeben

$$2\pi/l = |q_1 - q_2|$$

oder

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{K^2}{4B^2} + \frac{R}{B}.$$

Der dem Druck $R$ und dem drillenden Moment $K$ unterworfene Stab ist daher instabil, wenn

$$\frac{\pi^2}{l^2} < \frac{K^2}{4B^2} + \frac{R}{B}. \tag{44}$$

Diese Bedingung[1]) schließt diejenige in sich, die wir oben für den Fall erhielten, daß keine Druckkraft wirkt, und ebenso diejenige, die in (18), § 264, für den Fall erhalten wurde, daß kein Kräftepaar angreift. Wirkt auf den Stab statt des Drucks eine Zugkraft, so ist $R$ negativ, ein hinreichend großer Zug wird somit die geradlinige Form auch bei einem starken drillenden Moment stabil machen.

e) *Stabilität einer schmalen Schiene in ihrer Ebene.*[2])

Der Querschnitt des Stabes sei so beschaffen, daß die Biegungssteifigkeit $B$, die bei Biegung in der einen Hauptebene in Betracht kommt, groß ist entweder gegen die Biegungssteifigkeit $A$, die der Biegung in der dazu senkrechten Ebene entspricht, oder gegen die Drillungssteifigkeit $C$. Dies würde z. B. der Fall sein, wenn der Querschnitt ein Rechteck ist, von dem zwei Seiten bedeutend länger sind als die beiden anderen. Der Stab, der an dem einen Ende in horizontaler Lage eingemauert sei, werde durch eine vertikale Querkraft $R$ gebogen, die am anderen Ende in der Ebene der größten Biegungssteifigkeit angreift. Wir bedienen uns der Bezeichnungen von § 253 und nehmen an, deß die Angriffslinie der Last $R$ nach Richtung und Richtungssinn mit der Geraden $P_1 z$ übereinstimmt, die (z, x)-Ebene wählen wir parallel zu der Vertikalebene, die die Zentrallinie im ungespannten Zustand enthält. Wenn die Länge $l$ oder die Last $R$ nicht zu groß ist, während die Biegungssteifigkeit $B$ sehr beträchtlich ist, so biegt sich der Stab etwas in dieser Ebene in der in Kap. XV erörterten Art und Weise. Wenn aber die Länge oder die Last gewisse Grenzen überschreitet, kann der Stab durch die Kraft, die in der oben bezeichneten Richtung am Ende wirkt, so gefaßt werden, daß die Zentrallinie aus der (x, z)-Ebene sich herausbiegt, und der Stab wird dann auch eine Drillung erfahren. Es zeigt sich, daß der Mangel an Drillungssteifigkeit für das Auftreten dieser „Kipperscheinung" ebenso sehr in Betracht kommt wie geringe Biegungssteifigkeit.

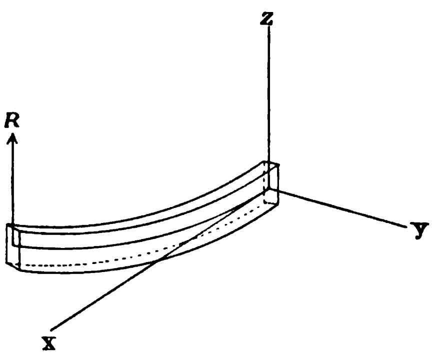



Fig. 61

1) Man verdankt das Resultat A. G. Greenhill, *Proc. Inst. Mech. Engineers* 1883.

2) Vgl. A. G. M. Michell, *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 48 (1899), und L. Prandtl, „Kipperscheinungen" (*Diss.*), Nürnberg 1899.

$s$ werde vom festen Ende der Zentrallinie aus gemessen, $x_1, y_1, z_1$ seien die Koordinaten des belasteten Endes. Ferner seien $x, y, z$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der verzerrten Zentrallinie. Um das Gleichgewicht desjenigen Stabstücks auszudrücken, das von dem durch $P_1$ gelegten Querschnitt und dem belasteten Ende begrenzt ist, nehmen wir Momente um Achsen, die durch $P_1$ parallel zu den festen Achsen laufen. Unter Benutzung der durch das Schema (4) in § 253 definierten Richtungskosinus erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -(A\varkappa l_1 + B\varkappa' l_2 + C\tau l_3) + (y_1 - y)R &= 0, \\ -(A\varkappa m_1 + B\varkappa' m_2 + C\tau m_3) - (x_1 - x)R &= 0, \\ A\varkappa n_1 + B\varkappa' n_2 + C\tau n_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Setzen wir für $\varkappa, \varkappa', \tau$ aus den Gleichungen (8) von § 253 und für $l_1, \ldots$ aus den Gleichungen (7) desselben Paragraphen die Werte ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &A\varkappa l_1 + B\varkappa' l_2 + C\tau l_3 \\ &= [-(A \sin^2\Phi + B\cos^2\Phi)\sin\Psi + (A - B)\sin\Phi\cos\Phi\sin\Psi\cos\theta]\frac{d\theta}{ds} \\ &+ C\cos\Psi\sin\theta\frac{d\Phi}{ds} + [-(A\cos^2\Phi + B\sin^2\Phi)\cos\Psi\sin\theta\cos\theta \\ &\qquad + (A - B)\sin\Phi\cos\Phi\sin\Psi\sin\theta + C\cos\Psi\sin\theta\cos\theta]\frac{d\Psi}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\varkappa m_1 + B\varkappa' m_2 + C\tau m_3 \\ &= [(A\sin^2\Phi + B\cos^2\Phi)\cos\Psi + (A - B)\sin\Phi\cos\Phi\sin\Psi\cos\theta]\frac{d\theta}{ds} \\ &+ C\sin\theta\sin\Psi\frac{d\Phi}{ds} - [(A\cos^2\Phi + B\sin^2\Phi)\sin\Psi\sin\theta\cos\theta \\ &\qquad + (A - B)\sin\Phi\cos\Phi\cos\Psi\sin\theta - C\sin\Psi\sin\theta\cos\theta]\frac{d\Psi}{ds}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\varkappa n_1 + B\varkappa' n_2 + C\tau n_3 \\ &= -(A - B)\sin\Phi\cos\Phi\sin\theta\frac{d\theta}{ds} + C\cos\theta\frac{d\Phi}{ds} \\ &\qquad + (A\sin^2\theta\cos^2\Phi + B\sin^2\theta\sin^2\Phi + C\cos^2\theta)\frac{d\Psi}{ds}. \end{aligned}$$

Wir führen nun für die Gleichungen (45) Näherungsformeln ein, indem wir $A$ und $C$ als klein gegen $B$ und $\theta$ als nahezu gleich $\frac{1}{2}\pi$ annehmen, solange $\Phi$ und $\Psi$ klein sind; ferner setzen wir $x_1$ mit $l$ und $x$ mit $s$ gleich. Wir streichen in den Ausdrücken für $(A\varkappa l_1 + \cdots), \cdots$ alle augenscheinlich unbedeutenden Terme. Dann bekommen wir die Gleichungen

$$-B\Psi\frac{d\theta}{ds} + C\frac{d\Phi}{ds} = R(y_1 - y), \quad B\frac{d\theta}{ds} = -R(l - s),$$

$$B\Phi\frac{d\theta}{ds} + A\frac{d\Psi}{ds} = 0.$$

Da $dy/ds = m_3 = \sin\theta\sin\Psi$ annähernd gleich $\Psi$, so erhalten wir aus den beiden ersten Gleichungen dieses Systems

$$C\frac{d^2\Phi}{ds^2}+\frac{d}{ds}\{R(l-s)\Psi\}=-R\Psi$$

und aus der zweiten und dritten Gleichung desselben Systems

$$A\frac{d\Psi}{ds}=R(l-s)\Phi;$$

die zuletzt hingeschriebenen beiden Gleichungen ergeben, wenn wir $d\Psi/ds$ aus ihnen eliminieren, folgende Gleichung

$$C\frac{d^2\Phi}{ds^2}+\frac{R^2}{A}(l-s)^2\Phi=0. \tag{46}$$

Dieselbe läßt sich durch die Substitutionen

$$\xi=\tfrac{1}{2}(l-s)^2R/\sqrt{AC},\qquad \Phi=\eta(l-s)^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

auf die Besselsche Gleichung transformieren. Wir erhalten

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+\left(1-\frac{1}{16\,\xi^2}\right)\eta=0,$$

und das Integral dieser Gleichung ist von der Form

$$\Phi=[A'J_{\frac{1}{4}}(\xi)+B'J_{-\frac{1}{4}}(\xi)](l-s)^{\frac{1}{2}}, \tag{48}$$

wo $A'$ und $B'$ Konstanten.

Wenn nun $s=l$, so verschwindet $d\Psi/ds$ und ebenso das Drillungsmoment $C\tau$; mithin verschwindet $d\Phi/ds$. Diese Bedingung verlangt, daß $A'$ verschwindet. Ferner verschwindet $\Phi$ für $s=0$, und die kritische Länge ist somit gegeben durch die Gleichung $J_{-\frac{1}{4}}(\xi)=0$ für $\xi=\frac{1}{2}l^2R/\sqrt{AC}$, oder

$$1-\frac{1}{2\cdot 6}\frac{R^2l^4}{AC}+\cdots+(-)^n\frac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot 6\cdot 14\cdots(8n-2)}\frac{R^{2n}l^{4n}}{A^nC^n}+\cdots=0.$$

Von dieser Gleichung für $R^2l^4/AC$ ist die kleinste Wurzel ungefähr gleich 16, und wir schließen daraus, daß der Stab, der durch eine am Ende angreifende Querkraft in der Ebene der größten Biegungssteifigkeit gebogen wird, instabil ist, falls $l>\gamma(AC)^{\frac{1}{4}}/R^{\frac{1}{2}}$, wo $\gamma$ eine Zahl, die sehr nahe gleich 2 ist.

Das Ergebnis ist von A. G. M. Michell und L. Prandtl experimentell bestätigt worden. Zu bemerken ist noch, daß ein Stab, wenn er die berechnete Länge besitzt, von der Last $R$ ziemlich stark gebogen wird, falls nicht eben $B$ groß ist gegen $A$ und $C$, daß also die obige Methode auf das allgemeine Problem der Stabilität der Elastica für Verschiebungen, die aus ihrer Ebene herausfallen, nicht anwendbar ist.

## § 273. Biegung eines Stabes durch Kräfte, die über seine Länge verteilt sind.

Wenn an dem Stab außer an den Enden auch in anderen Punkten Kräfte und Kräftepaare angreifen und wenn für die Spannungsmomente die üblichen Näherungswerte (§ 255) angesetzt werden, so

sind Stabformen möglich, wie sie durch Endkräfte und -momente allein nicht erzielt werden könnten. Wirken Kräftepaare nur an den Enden, so geht die dritte der Gleichungen (11) von § 254 über in

$$C\frac{d\tau}{ds} - (A - B)\varkappa\varkappa' = 0;$$

soll also der Stab eine vorgeschriebene Krümmung annehmen, ohne daß äußere Kräftepaare über seine Länge verteilt sind, so muß der Drall sich längs des Stabes in gewisser Weise ändern; mit anderen Worten, ein bis auf eine Konstante völlig bestimmter Drall ist erforderlich.

Wenn Kräftepaare nur an den Enden angreifen und die Krümmung gegeben ist, während der Drall in der verlangten Weise variiert, sind $N$ und $N'$ durch die beiden ersten Gleichungen (2), § 260, gegeben. Die erforderlichen Kräfte $X, Y, Z$ von § 254 und die Zugbeanspruchung $T$ sind dann durch die drei Gleichungen (10) jenes Paragraphen miteinander verknüpft. Wir können daher noch eine weitere Bedingung für diese Größen vorschreiben. Beispielsweise können wir $Z = 0$ setzen und erkennen dann, daß wir einen Stab durch Kräfte, die in jedem Punkt normal zu seiner Zentrallinie angreifen, so gebogen halten können, daß letztere mit einer gegebenen Kurve zusammenfällt, vorausgesetzt, daß der Stab einen geeigneten Drall besitzt.

Ähnliches läßt sich in dem Fall aussagen, wo der Stab im ungespannten Zustand gegebene Krümmung und gegebenen Drall besitzt.

Als Beispiel[1]), wo diese Bemerkungen Anwendung finden, nehmen wir den Fall eines Stabes, der im ungespannten Zustand ein Kreisring vom Radius $r_0$ ist mit der Eigenschaft, daß die eine Hauptachse jedes Querschnitts mit der Ringebene den für alle Querschnitte gleichen Winkel $f_0$ einschließt. Wir bezeichnen mit $B$ die dieser Achse entsprechende Biegungssteifigkeit. Der Anfangszustand drückt sich aus durch die Gleichungen

$$\varkappa_0 = -r_0^{-1}\cos f_0, \quad \varkappa'_0 = r_0^{-1}\sin f_0, \quad \tau_0 = 0.$$

Nun werde der Stab zu einem Kreisring vom Radius $r_1$ so gebogen, daß die eine Hauptachse jedes Querschnitts mit der Ringebene den für alle Querschnitte gleichen Winkel $f_1$ einschließt. Der Zustand des Stabes drückt sich dann aus durch die Gleichungen

$$\varkappa_1 = -r_1^{-1}\cos f_1, \quad \varkappa'_1 = r_1^{-1}\sin f_1, \quad \tau_1 = 0.$$

Um den Stab in diesem Zustand zu erhalten, müssen an jedem Querschnitt Kräfte angebracht werden, die mit einem Kräftepaar um die Zentrallinie gleichwertig sind; der Betrag dieses Kräftepaars pro Längeneinheit ist

$$\frac{1}{r_0 r_1}(A\sin f_1\cos f_0 - B\cos f_1\sin f_0) - \frac{1}{r_1^2}(A - B)\sin f_1\cos f_1.$$

1) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 166f.

## § 274. Biegung eines Stabes in einer Ebene durch gleichförmigen Normaldruck.

Wir betrachten nunmehr das Problem eines Stabes, der durch gleichförmig über seine Länge verteilten normalen Druck in einer Hauptebene gebogen gehalten wird.

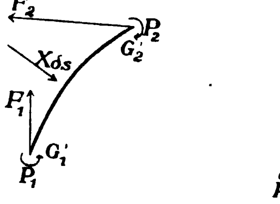
Wir bezeichnen mit $F$ die Resultante der Schubkraft $N$ und der Zugbeanspruchung $T$ in einem beliebigen Querschnitt, mit $F_x$, $F_y$ ihre Komponenten bezüglich fester (x, y)-Achsen in der Ebene der gebogenen Zentrallinie. Wir können die Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, indem wir alle auf ein beliebiges Stabstück wirkenden Kräfte nach den festen Achsen auflösen. Diese Gleichungen lauten

$$\frac{d}{ds}F_x + X\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d}{ds}F_y - X\frac{dx}{ds} = 0.$$

Daraus folgt, daß der Koordinatenanfang so gewählt werden kann, daß wir haben

$$F_x = -yX, \quad F_y = xX;$$

Die Größe von $F$ in einem beliebigen Punkt $P$ der Zentrallinie ist daher $rX$, wo $r$ die Entfernung $OP$, und die Richtung von $F$ steht senkrecht zu $OP$. Dies Ergebnis läßt sich in folgender Form aussprechen: Es seien $P_1$ und $P_2$ zwei beliebige Punkte der verzerrten Zentrallinie uud $F_1$ und $F_2$ die Resultanten aus der Schubkraft und der Zugbeanspruchung in den durch $P_1$ und $P_2$ gelegten Querschnitten (der Richtungssinn von $F_1$, $F_2$ ist so festgelegt, daß diese Kräfte die auf das Stabstück zwischen $P_1$ und $P_2$ vom übrigen Stabe ausgeübten Wirkungen bezeichnen). Man ziehe von $P_1$, $P_2$ aus die Geraden $P_1O$, $P_2O$ senkrecht zur Richtung von $F_1$ bezw. von $F_2$. Der Bogen $P_1P_2$ läßt sich auffassen als die Grenze eines Polygons von großer Seitenzahl, das von den Biegungsmomenten an seinen Enden, von den Kräften $F_1$, $F_2$ und von einer Kraft $X\delta s$ im Gleichgewicht gehalten wird, die senkrecht zu jeder Polygonseite von der Länge $\delta s$ wirkt. Die Kräfte sind dann senkrecht zu den Seiten der von $OP_1$, $OP_2$ und diesem Polygon gebildeten Figur und ihnen proportional; die Länge von $OP_1$ und $OP_2$ ist $F_1/X$ bezw. $F_2/X$. Der Richtungssinn, in dem die Linien gezogen werden müssen, ist in Fig. 62 angegeben.[1])



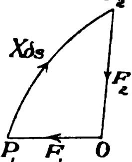



Fig. 62.

Es bezeichne $r$ den Abstand $OP$. Dann ist

1) In der Figur ist $OP_1P_2$ als Kräfte-Polygon gekennzeichnet. Die Theorie verdankt man M. Lévy, *J. de Math. (Liouville)*, (Sér. 3), t. 10 (1884).

$$N = -F\frac{dr}{ds} = -rX\frac{dr}{ds}.$$

Das Spannungsmoment $G'$ befriedigt die Gleichung

$$\frac{dG'}{ds} = -N = rX\frac{dr}{ds}.$$

Somit haben wir

$$G' = \tfrac{1}{2}Xr^2 + \text{const.}$$

In dem besonderen Falle, wo die Zentrallinie im ungespannten Zustand eine gerade Linie oder ein Kreis ist, ist die Krümmung $1/\varrho$ der Kurve, in die sie durch die Biegung übergeht, durch die Gleichung gegeben

$$B/\varrho = \tfrac{1}{2}Xr^2 + \text{const.} \tag{49}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die möglichen Formen der Zentrallinie bestimmen.[1])

## § 275. Stabilität eines Kreisrings unter normalem Druck.

Wenn die Zentrallinie im ungespannten Zustand ein Kreis vom Radius $a$ ist und der Stab sehr schwach gebogen wird, so läßt sich Gleichung (49) in der Näherungsform schreiben

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = c + \frac{X}{2Bu^2},$$

wo $1/u$ und $\theta$ die Polarkoordinaten eines Punktes der Zentrallinie, bezogen auf $O$ als Koordinatenanfang, und $c$ eine Konstante. Der Wert von $u$ unterscheidet sich sehr wenig von $1/a$; wir können daher $u = 1/a + \xi$ setzen, wo $\xi$ klein ist und erhalten die Näherungsgleichung

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = -\frac{X}{B}a^3\xi.$$

Mithin ist $\xi$ von der Form $\xi_0 \cos(n\theta + \gamma)$, wo $\xi_0$ und $\gamma$ Konstanten bedeuten und $n$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$n^2 = 1 + Xa^3/B.$$

Nun muß $\xi$ eine periodische Funktion von $\theta$ mit der Periode $2\pi$ sein, denn andernfalls würde der Stab aufhören, einen geschlossenen Ring zu bilden. Somit muß $n$ eine ganze Zahl sein. Wäre $n = 1$, so würde sich der Kreis ohne Formänderung verschieben. Den kleinsten Wert des Drucks $X$, bei dem eine Deformation der Kreisform auftreten kann, erhalten wir, wenn wir $n = 2$ setzen. Daraus folgt, daß der Ring unter dem Druck sich einfach zusammenzieht, solange $X < 3B/a^3$, daß aber die Möglichkeit des Knickens gegeben ist, wenn

$$X > 3B/a^3.\text{[2])} \tag{50}$$

1) Die vollständige Integration von Gleichung (49) mittels elliptischer Funktionen leistete G. Halphen, *Paris, C. R.*, t. 98 (1884). Siehe auch seinen *Traité des fonctions elliptiques*, Partie 2, Ch. 5 (Paris 1888). Der Gegenstand ist weiterhin von A. G. Greenhill, *Math. Ann.*, Bd. 52 (1899), behandelt worden.

2) Man verdankt das Resultat M. Lévy, *loc. cit.*

## § 276. Stabilität einer durch ihr Eigengewicht deformierten Säule.[1])

Als weiteres Beispiel für das Gleichgewicht eines Stabes, auf den über seine Länge verteilte Kräfte wirken, betrachten wir das Problem einer homogenen, prismatischen vertikalen Säule, die durch ihr Eigengewicht gebogen wird. Ein langer dünner Stab werde in einer vertikalen Ebene so aufgestellt, daß das untere Ende vertikal zu bleiben gezwungen ist; wir nehmen an, der Stab sei so lang, daß er sich zur Seite biegt. Der Nullpunkt des festen (x, y)-Koordinatensystems falle mit dem unteren Ende zusammen, die x-Achse sei vertikal aufwärts gerichtet, und die y-Achse liege in der Biegungsebene (siehe Fig. 63). Um das Gleichgewicht des Stabstücks auszudrücken, das von einem beliebigen Querschnitt und dem freien Ende begrenzt ist, lösen wir nach der Normalen der Zentrallinie auf, und da die Zentrallinie nahezu mit der x-Achse zusammenfällt, erhalten wir die Gleichung

$$N = W\frac{l-x}{l}\frac{dy}{dx},$$

Fig. 63.

wo $W$ das Gewicht des Stabes. Die Gleichgewichtsgleichung $dG/ds + N = 0$ läßt sich daher durch die Näherungsgleichung ersetzen

$$B\frac{d^2p}{dx^2} + W\frac{l-x}{l}p = 0, \tag{51}$$

wo $p$ für $dy/dx$ geschrieben ist. Die Grenzbedingungen lauten dahin, daß $dp/dx$ für $x = l$ verschwindet und daß y und $p$ für $x = 0$ verschwinden.

Gleichung (51) läßt sich durch die Substitutionen

$$\xi = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{W}{lB}}(l-x)^{\frac{3}{2}}, \quad p = \eta\,(l-x)^{\frac{1}{2}} \tag{52}$$

in die Besselsche Gleichung überführen. Wir erhalten

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\eta}{d\xi} + \left(1 - \frac{1}{9\xi^2}\right)\eta = 0,$$

und das Integral ist von der Form

$$p = [A'J_{\frac{1}{3}}(\xi) + B'J_{-\frac{1}{3}}(\xi)]\,(l-x)^{\frac{1}{2}}, \tag{53}$$

wo $A'$ und $B'$ Konstanten.

Um $dp/dx$ für $x = l$ verschwinden zu lassen, müssen wir $A' = 0$ setzen, und um $p$ für $x = 0$ verschwinden zu lassen, müssen wir

1) Man verdankt die Theorie A. G. Greenhill, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 4 (1881). Einer kritischen Erörterung wurde sie unterzogen von C. Chree, *Cambridge Phil. Soc. Proc.* vol. 7 (1892).

$J_{-\frac{1}{3}}(\xi) = 0$ setzen für $\xi = \frac{2}{3} l (W/B)^{\frac{1}{2}}$. Die kritische Länge ist daher durch die Gleichung gegeben

$$1 - \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{l^3 W}{B} + \cdots + (-)^n \frac{1}{3 \cdot 6 \cdots (3n) \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)} \frac{l^{3n} W^n}{B^n} = 0.$$

Von dieser Gleichung für $l^3 W/B$ ist die kleinste Wurzel gleich (7,91 ...), und wir schließen daraus, daß der Stab durch sein eigenes Gewicht gebogen werden wird, wenn die Länge den Betrag (2,83 ...) $\sqrt[3]{B/W}$ überschreitet.

Greenhill (*loc. cit.* p. 487) hat eine Anzahl von Fällen ausgearbeitet, wo der Stab veränderlichen Querschnitt besitzt, und hat seine Ergebnisse zur Erklärung der Formen und des Wachstums der Bäume herangezogen.

# Kapitel XX.

## Schwingungen von Stäben. Probleme dynamischen Widerstandes.

§ 277. Die Schwingungen dünner Stäbe oder Drähte, die im ungespannten Zustand gerade und prismatisch sind, zerfallen naturgemäß in drei Klassen: Längsschwingungen, Drillungsschwingungen, Querschwingungen. Die „Längsschwingungen" (engl. „longitudinal vibrations") kennzeichnen sich durch die periodische Dehnung und Verkürzung von Elementen der Zentrallinie und werden aus diesem Grunde zuweilen auch als „Dehnungsschwingungen" bezeichnet. Die „Querschwingungen" (engl. „lateral vibrations") kennzeichnen sich durch die periodische Biegung und Geradrichtung von Teilen der Zentrallinie, indem Punkte dieser Kurve senkrecht zu ihrer unverzerrten Lage sich hin und her bewegen; aus diesem Grunde werden sie zuweilen als „Biegungsschwingungen" bezeichnet. In Kap. XII untersuchten wir gewisse Schwingungsarten eines Kreiszylinders. Von diesen hat die eine Klasse genau den Typus von Drillungsschwingungen, und andere Klassen haben praktisch genommen den Typus von Dehnungs- und Biegungsschwingungen, wenn die Länge des Zylinders groß ist im Vergleich zum Radius des Querschnitts. Wir haben nun darzulegen, wie sich die Theorie dieser Schwingungen für einen dünnen Stab von beliebiger Querschnittsform aus der Theorie von Kap. XVIII ableiten läßt.

Um die Theorie anwenden zu können, müssen wir voraussetzen, daß die üblichen Annäherungen, wie sie in § 255 und § 258 geschildert wurden, zulässig sind, wenn der Stab schwingt. Diese Annahme läßt sich teilweise durch die Bemerkung rechtfertigen, daß die Gleichungen der Bewegung mit den Gleichungen des Gleichgewichts bei bestimmten Massenkräften — den umgekehrten kinetischen Reaktionen — übereinstimmen. Unsere Voraussetzung deckt sich dann mit der Annahme, daß die Art der Verteilung dieser Kräfte keine derartige ist, daß die Gültigkeit der Näherungsgleichungen (21), (22), (23) von § 258 ernstlich in Frage gestellt erscheint. Die Annahme läßt sich in anderer Form noch dahin aussprechen, daß während der Schwingung des Stabes die innere Verzerrung in dem zwischen zwei benachbarten Querschnitten gelegenen Stabstück dieselbe ist, wie wenn jenes Stück durch Spannungen auf die Enden, die der augenblicklichen Dehnung,

Drillung und Krümmung entsprechen, im Gleichgewicht gehalten würde. Eine völlige Rechtfertigung dieser Annahme ist bisher noch nicht gegeben; sie wird jedoch gestützt durch die angeführten Resultate, die im Falle des Kreiszylinders erhalten sind. Man kann wohl sagen, daß die Annahme bei den langsameren Schwingungen, die die wichtigsten sind, eine bessere Annäherung liefert als bei den Schwingungen von größerer Frequenz und daß die Annäherung für die ersteren völlig genügt.

Die verschiedenen Schwingungen sind von Lord Rayleigh[1]) in so erschöpfender Weise behandelt, daß wir uns damit begnügen können, die Schwingungsgleichungen abzuleiten. Nach Aufstellung dieser Gleichungen werden wir sie auf einige Probleme dynamischen Widerstandes anwenden.

## § 278. Dehnungsschwingungen.

Es sei $w$ die zur Zentrallinie parallele Verschiebung des Schwerpunktes desjenigen Querschnitts, der im Gleichgewichtszustand von einem bestimmten Punkt der Kurve den Abstand $s$ hat. Die Dehnung ist dann $\partial w/\partial s$, und die Zugbeanspruchung ist gleich $E\omega(\partial w/\partial s)$, wo $E$ der Youngsche Modul und $\omega$ der Querschnittsinhalt. Die kinetische Reaktion, bezogen auf die Längeneinheit des Stabes, ist gleich $\rho\omega(\partial^2 w/\partial t^2)$, wo $\rho$ die Materialdichte. Die Bewegungsgleichung, die in derselben Weise wie die Gleichgewichtsgleichungen in § 254 gebildet ist, lautet

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \tag{1}$$

Die Bedingung, die an einem freien Ende zu erfüllen ist, ist $\partial w/\partial s = 0$; an einem befestigten Ende verschwindet $w$.

Leiten wir die Bewegungsgleichung mittels der Energie-Methode (§ 115) ab, so können wir die Trägheit der Querbewegung[2]), durch die die Querschnitte in ihrer eigenen Ebene gedehnt oder verkürzt werden, in Rechnung ziehen. Sind $x$ und $y$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes eines Querschnitts, bezogen auf zwei durch den Schwerpunkt gehende Achsen, so sind die seitlichen Verschiebungen

$$-\sigma x(\partial w/\partial s), \quad -\sigma y(\partial w/\partial s),$$

wo $\sigma$ die Poissonsche Konstante. Die kinetische Energie pro Längeneinheit ist somit gleich

$$\tfrac{1}{2}\rho\omega\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sigma K^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right)^2\right\},$$

1) *Theory of Sound*, Kapitel VII und VIII.

2) Die Quer*verzerrung* ist bereits in Rechnung gezogen, indem die Zugbeanspruchung als Produkt von $E$ und $\omega(\partial w/\partial s)$ ausgedrückt ist. Wenn die Längsverzerrung allein berücksichtigt würde, wäre die Konstante, die in den Ausdruck für die Zugbeanspruchung eingeht, nicht $E$, sondern $\lambda + 2\mu$.

wo $K$ der Trägheitsradius eines Querschnitts, bezogen auf die Zentrallinie. Die potentielle Energie pro Längeneinheit ist

$$\tfrac{1}{2} E\omega\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2,$$

und die Variationsgleichung der Bewegung lautet daher

$$\delta\int dt\int\left[\tfrac{1}{2}\varrho\omega\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\sigma K^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right)^2\right\}-\tfrac{1}{2}E\omega\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]ds=0,$$

wo die Integration nach $s$ den Stab entlang erstreckt ist. Bei Ausführung der Variationen benutzen wir die Identitäten

$$\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right),\quad \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial\delta w}{\partial s}+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\delta w=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\delta w\right),$$

$$2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^4 w}{\partial s^2\partial t^2}\delta w\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}-\frac{\partial^3 w}{\partial s\partial t^2}\delta w\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial s}-\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\partial t}\delta w\right);$$

integrieren wir nach Teilen und setzen den Koeffizienten von $\delta w$ unter dem Doppelintegralzeichen gleich null, so erhalten wir die Gleichung

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\sigma K^2\frac{\partial^4 w}{\partial s^2\partial t^2}\right)=E\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \tag{2}$$

Durch Beibehaltung des Terms $\varrho\sigma K^2\partial^4 w/\partial s^2\partial t^2$ würden wir die von Pochhammer und Chree (§ 201) gefundene Korrektion für die Wellengeschwindigkeit oder die von Lord Rayleigh[1]) berechnete Korrektion für die Frequenz der freien Schwingung erhalten.

## § 279. Drillungsschwingungen.

Es bezeichne $\Psi$ den Winkel, um den zwei Querschnitte gegeneinander gedreht sind, sodaß $\partial\Psi/\partial s$ der Drall des Stabes. Die Schwerpunkte der Querschnitte sind nicht verschoben, dagegen sind die Verschiebungskomponenten eines beliebigen Punktes eines Querschnitts, bezogen auf die wie früher definierten $(x, y)$-Achsen, gleich $-\Psi y$ und gleich $\Psi x$. Das Drillungsmoment ist gleich $C(\partial\Psi/\partial s)$, wo $C$ die Drillungssteifigkeit. Das Moment der kinetischen Reaktionen um die Zentrallinie, bezogen auf die Längeneinheit, ist gleich $\varrho\omega K^2(\partial^2\Psi/\partial t^2)$. Die Bewegungsgleichung, in derselben Weise gebildet wie die dritte der Gleichgewichtsgleichungen (11) von § 254, lautet

$$\varrho\omega K^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=C\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}. \tag{3}$$

Die an einem freien Ende zu erfüllende Bedingung ist $\partial\Psi/\partial s=0$; an einem festen Ende verschwindet $\Psi$.

Wenn wir die Energiemethode anwenden, so können wir die Trägheit der Bewegung in Rechnung ziehen, durch die die Querschnitte zu

1) *Theory of Sound,* § 157.

krummen Flächen deformiert werden. Es sei $\Phi$ die Torsionsfunktion für den Querschnitt (§ 216). Die longitudinale Verschiebung ist dann $\Phi\,(\partial\Psi/\partial s)$, und die kinetische Energie des Stabes pro Längeneinheit ist gleich

$$\tfrac{1}{2}\varrho\left[\omega K^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial s\,\partial t}\right)^2\int\Phi^2 d\omega\right].$$

Die potentielle Energie ist gleich $\frac{1}{2}C\,(\partial\Psi/\partial s)^2$ und die wie vorhin gebildete Schwingungsgleichung lautet

$$\varrho\,\omega K^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\varrho\left(\int\Phi^2 d\omega\right)\frac{\partial^4\Psi}{\partial s^2\,\partial t^2}=C\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die zu dem Querschnitt gehörenden Werte von $C$ und $\int\Phi^2 d\omega$ ein, so würden wir zu einer Bewegungsgleichung von der Form (2) gelangen und könnten eine Korrektion für die Wellengeschwindigkeit und die Frequenzen der Schwingungen ableiten. Im Falle eines Kreiszylinders tritt ein Korrektionsglied nicht auf, und die Wellengeschwindigkeit hat den in § 200 bestimmten Wert.

## § 280. Biegungsschwingungen.

Der Stab schwinge in einer Hauptebene, etwa in der (wie in § 252 definierten) $(x, z)$-Ebene. $u$ bezeichne die Verschiebung des Schwerpunkts eines Querschnitts senkrecht zur unverzerrten Zentrallinie. Den Winkel zwischen dieser letzteren und der Tangente der verzerrten Zentrallinie können wir gleich $\partial u/\partial s$ und die Krümmung gleich $\partial^2 u/\partial s^2$ setzen. Das Biegungsmoment $G'$ ist gleich $B\partial^2 u/\partial s^2$, wo $B = E\omega k'^2$, unter $k'$ den Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden, zur Biegungsebene senkrechten Achse verstanden. Die Größe der kinetischen Reaktion, bezogen auf die Längeneinheit, ist in erster Annäherung gleich $\varrho\,\omega\,(\partial^2 u/\partial t^2)$ und ihre Richtung die der Verschiebung $u$. Die longitudinale Verschiebung eines Punktes ist $-x\,(\partial u/\partial s)$; das für die Längeneinheit berechnete Moment der kinetischen Reaktionen um eine zur Biegungsebene senkrechte Achse ist daher gleich $\varrho\,\omega k'^2(\partial^3 u/\partial s\,\partial t^2)$. Die Schwingungsgleichungen, in derselben Weise gebildet wie die zweiten Gleichungen der Gleichgewichtsgleichungssysteme (10) und (11) von § 254, lauten

$$\frac{\partial N}{\partial s}=\varrho\,\omega\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad E\omega k'^2\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}+N=\varrho\,\omega k'^2\frac{\partial^3 u}{\partial s\,\partial t^2};\tag{4}$$

eliminieren wir $N$, so erhalten wir die Schwingungsgleichung

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k'^2\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\,\partial t^2}\right)=-Ek'^2\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}.\tag{5}$$

Wenn „rotatorische Trägheit“ vernachlässigt wird, so haben wir die Näherungsgleichung

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-Ek'^2\frac{\partial^4 u}{\partial s^4},\tag{6}$$

und die Schubkraft $N$ in einem beliebigen Querschnitt ist gleich $-E\omega k'^2\partial^3 u/\partial s^3$. An einem freien Ende verschwinden $\partial^2 u/\partial s^2$ und $\partial^3 u/\partial s^3$, an einem eingeklemmten Ende verschwinden $u$ und $\partial u/\partial s$, an einem „gestützten Ende" verschwinden $u$ und $\partial^2 u/\partial s^2$.

Wenn wir das Glied, das den Einfluß rotatorischer Trägheit darstellt, beibehielten, so könnten wir für die Wellengeschwindigkeit oder die Schwingungszahl eine Korrektion von der Art der früher erwähnten Korrektionen erhalten.[1]) Eine andere Korrektion, die ebenso bedeutend wie diese sein kann, falls der Querschnitt des Stabes keine kinetische Symmetrie besitzt, läßt sich mittels der Energiemethode ableiten durch Berücksichtigung der Trägheit der Bewegung, die die Querschnitte in ihrer eigenen Ebene verzerrt.[2]) Die Verschiebungskomponenten in der Ebene des Querschnitts parallel zu der in die Biegungsebene fallenden $x$-Achse und einer dazu senkrechten $y$-Achse sind

$$u + \tfrac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x^2 - y^2), \quad \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}xy;$$

die kinetische Energie pro Längeneinheit drückt sich, genau bis auf Glieder vierter Ordnung in den linearen Querschnittsabmessungen, durch die Formel aus

$$\tfrac{1}{2}\varrho\omega\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sigma(k'^2 - k^2)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\partial t} + k'^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\right)^2\right\};$$

wo $k$ der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden in der Biegungsebene gelegenen Achse. Das Glied in $\sigma(k'^2 - k^2)$ hängt ab von der Trägheit der Bewegung, durch die die Querschnitte in ihrer Ebene verzerrt werden, und das Glied in $k'^2$ hängt ab von der rotatorischen Trägheit. Die potentielle Energie drückt sich aus durch

$$E\omega k'^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2.$$

Die Variationsgleichung der Bewegung lautet

$$\delta\int dt\int ds\left[\left\{\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sigma(k'^2 - k^2)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\partial t} + k'^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\right)^2\right\} - Ek'^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2\right] = 0.$$

Bei Ausführung der Variationen benutzen wir die Identitäten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial s^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial s^4}\delta u = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial \delta u}{\partial s} - \frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\delta u\right),$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^3 \delta u}{\partial s^2\partial t} + 2\,\delta u\frac{\partial^4 u}{\partial s^2\partial t^2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta u\frac{\partial^3 u}{\partial s^2\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta u\frac{\partial^3 u}{\partial s\partial t^2} - \frac{\partial \delta u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),$$

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, § 186.

2) Die Querschnitte werden auch zu krummen Flächen verzerrt und zur verzerrten Zentrallinie schräg gestellt; die Trägheit dieser Bewegungen würde aber eine viel kleinere Korrektion liefern.

außerdem Identitäten von dem in § 278 benutzten Typus. Es ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\varrho\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \{k'^2(1-\sigma) + k^2\sigma\}\frac{\partial^4 u}{\partial s^2 \partial t^2}\right] = -Ek'^2\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}. \tag{7}$$

Korrektionen des Energieausdrucks, wie sie hier betrachtet sind, werden natürlich die Randbedingungen für ein freies oder gestütztes Ende ebenso sehr berühren wie die Differentialgleichung der Schwingung. Ihre Begründung kann nicht als besonders streng angesehen werden, da sie auf der Voraussetzung beruht, daß die innere Verzerrung in einem kleinen von benachbarten Querschnitten begrenzten Stück des schwingenden Stabes die gleiche ist wie für ein Prisma, in welchem die richtige Dehnung, Drillung oder Krümmung durch Kräfte hervorgebracht wird, die an den Enden angreifen und das Prisma im Gleichgewicht halten. Lord Rayleigh macht darauf aufmerksam, daß die Bedeutung derartiger Korrektionen mit der Frequenz der Schwingung zunimmt. Wir bemerkten bereits, daß die grundlegende Voraussetzung mit wachsender Schwingungszahl an Geltung verliert.

## § 281. Stab, am einen Ende befestigt, am andern longitudinal gestoßen.[1])

Wir wollen, um die Anwendungen der Theorie der Stabschwingungen auf Probleme dynamischen Widerstandes zu illustrieren, einige Probleme lösen, bei denen ein langer dünner Stab durch Stöße oder bewegliche Lasten in Dehnungsschwingungen versetzt wird.

Wir behandeln zunächst das Problem eines Stabes, der am einen Ende befestigt ist und am andern Ende durch einen schweren Körper gestoßen wird, der sich in der Längsrichtung des Stabes bewegt. Wir messen $t$ vom Augenblick des Zusammenstoßes und $s$ vom befestigten Ende aus und bezeichnen mit $l$ die Stablänge, mit $m$ das Verhältnis der Masse des anschlagenden Körpers zu der des Stabes, mit $V$ die Geschwindigkeit des Körpers im Augenblick des Anpralls, mit $w$ die longitudinale Verschiebung und mit $a$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Dehnungswellen im Stabe.

Die Differentialgleichung der Dehnungswellen lautet

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \tag{8}$$

Die Grenzbedingung für $s = 0$ ist $w = 0$. Die Grenzbedingung für $s = l$ drückt sich aus durch die Bewegungsgleichung des stoßenden Körpers, also durch

$$ml\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial w}{\partial s}, \tag{9}$$

1) Vgl. J. Boussinesq, *Applications des potentiels* . . ., p. 508ff., oder auch Saint-Venant in der Clebsch-Ausgabe, *Note finale du § 60* und *Changements et additions*.

da der Druck an diesem Ende (in den Bezeichnungen von § 278) gleich $-E\omega(\partial w/\partial s)$ und $E\omega/a^2$ gleich der Masse des Stabes pro Längeneinheit ist. Die Anfangsbedingung besagt, daß zur Zeit $t=0$ für alle Werte von $s$ zwischen 0 und $l$ die Beziehung $w=0$, für $s=l$ aber die Beziehung

$$\lim_{t=+0}(\partial w/\partial t) = -V \tag{10}$$

gilt, da die Geschwindigkeit des gestoßenen Endes im Augenblick des Anpralls gleich der des stoßenden Körpers wird.

Wir haben mit Hilfe dieser Gleichungen und Bedingungen $w$ für positive Werte von $t$ für alle zwischen 0 und $l$ liegenden Werte von $s$ zu bestimmen. Der erste Schritt ist, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8) aufzustellen; sie drückt sich aus in der Form

$$w = f(at-s) + F(at+s), \tag{11}$$

wo $f$ und $F$ willkürliche Funktionen bezeichnen.

Der zweite Schritt besteht darin, mit Hilfe der Grenzbedingung für $s=0$ eine der willkürlichen Funktionen zu eliminieren. Diese Bedingung schreibt sich in der Tat folgendermaßen:

$$f(at) + F(at) = 0,$$

und wir können daher die Lösung der Gleichung (8) in der Form ausdrücken

$$w = f(at-s) - f(at+s). \tag{12}$$

Der dritte Schritt ist, die Funktion $f$ mittels der Anfangsbedingungen für ein bestimmtes Intervall zu bestimmen. Wir denken uns $f$ als Funktion eines Arguments $\zeta$, daß je nach Bedarf gleich $at-s$ oder gleich $at+s$ gesetzt werden kann. Da $\partial w/\partial s$ und $\partial w/\partial t$ für alle Werte von $s$ zwischen 0 und $l$ mit $t$ verschwinden, so haben wir,

solange $l > \zeta > 0, \quad -f'(-\zeta) - f'(\zeta) = 0, \quad f'(-\zeta) - f'(\zeta) = 0.$

Daraus folgt, daß wenn $l > \zeta > -l$, $f'(\zeta)$ verschwindet, $f(\zeta)$ also eine Konstante ist, die gleich null gesetzt werden kann; wir haben demnach das Ergebnis:

$$\text{wenn } l > \zeta > -l, \quad \text{ist } f(\zeta) = 0. \tag{13}$$

Der vierte Schritt besteht darin, mit Hilfe der Grenzbedingung (9) für $s=l$ eine Gleichung aufzustellen, mittels deren der Verlauf von $f(\zeta)$ als Funktion von $\zeta$ außerhalb des Intervalls $l > \zeta > -l$ ermittelt werden kann. Die gewünschte Gleichung, die sogenannte „fortsetzende Gleichung"[1]), lautet

$$ml[f''(at-l) - f''(at+l)] = f'(at-l) + f'(at+l),$$

oder was dasselbe ist,

1) *Équation promotrice*, bei Saint-Venant.

$$f''(\zeta) + (1/ml)f'(\zeta) = f''(\zeta - 2l) - (1/ml)f'(\zeta - 2l). \qquad (14)$$

Wir betrachten diese Gleichung in erster Instanz als eine Gleichung zur Bestimmung von $f'(\zeta)$. Die rechte Seite ist bekannt, in der Tat ist gezeigt, daß sie im Intervall $3l > \zeta > l$ null ist. Wir können daher die Form von $f'(\zeta)$ in diesem Intervall bestimmen, indem wir die Gleichung (14) integrieren. Die Integrationskonstante ergibt sich mittels der Bedingung (10). Die Funktion $f'(\zeta)$ ist dann im Intervall $3l > \zeta > l$ bekannt, und die rechte Seite von (14) ist demnach im Intervall $5l > \zeta > 3l$ bekannt. Wir bestimmen die Form von $f'(\zeta)$ in diesem Intervall, indem wir die Gleichung (14) integrieren, und ermitteln die Integrationskonstante aus der Bedingung, daß in $s = l$ nach dem ersten Augenblick keine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit herrscht. Die Funktion $f'(\zeta)$ wird dann auch im Intervall $5l > \zeta > 3l$ bekannt sein. Auf diese Weise fortfahrend können wir $f'(\zeta)$ für alle Werte von $\zeta$, die größer sind als $-l$, bestimmen.

Das Integral von (14) hat stets die Form

$$f'(\zeta) = Ce^{-\zeta/ml} + e^{-\zeta/ml}\int e^{\zeta/ml}\left\{f''(\zeta-2l) - \frac{1}{ml}f'(\zeta-2l)\right\}d\zeta, \qquad (15)$$

wo $C$ eine Integrationskonstante. Wenn $3l > \zeta > l$, so verschwindet der Ausdruck unter dem Integrationszeichen, und $f'(\zeta)$ ist von der Form $Ce^{-\zeta/ml}$. Die Bedingung (10) liefert nun

$$a[f'(-l+0) - f'(l+0)] = -V, \text{ oder } f'(l+0) = V/a.$$

Somit ist $Ce^{-1/m} = V/a$, und wir haben das Resultat:

$$\text{wenn } 3l > \zeta > l, \text{ ist } f'(\zeta) = \frac{V}{a}e^{-(\zeta - l)/ml} \qquad (16)$$

Wir bemerken, daß $f'(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = l$ unstetig ist.

Wenn $5l > \zeta > 3l$, so haben wir

$$f''(\zeta - 2l) - (1/ml)f'(\zeta - 2l) = -2(V/mla)e^{-(\zeta - 3l)/ml},$$

und Gleichung (15) läßt sich schreiben

$$f'(\zeta) = Ce^{-\zeta/ml} - 2(V/mla)(\zeta - 3l)e^{-(\zeta - 3l)/ml}.$$

Die Bedingung der Stetigkeit der Geschwindigkeit in $s = l$ zur Zeit $t = 2l/a$ liefert

$$f'(l-0) - f'(3l-0) = f'(l+0) - f'(3l+0)$$

oder

$$-\frac{V}{a}e^{-2/m} = \frac{V}{a} - Ce^{-3/m},$$

woraus

$$C = (V/a)(e^{1/m} + e^{3/m}).$$

Somit ergibt sich, wenn $5l > \zeta > 3l$,

$$f'(\zeta) = \frac{V}{a}e^{-(\zeta - l)/ml} + \frac{V}{a}\left\{1 - \frac{2}{ml}(\zeta - 3l)\right\}e^{-(\zeta - 3l)/ml}. \qquad (17)$$

Für $7l > \zeta > 5l$ haben wir

$$f''(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f'(\zeta - 2l) = -\frac{2V}{mla}\left[e^{-(\zeta-3l)/ml} + 2e^{-(\zeta-5l)/ml}\right]$$
$$+ \frac{4V}{m^2l^2a}(\zeta - 5l)e^{-(\zeta-5l)/ml},$$

und Gleichung (15) läßt sich schreiben

$$f'(\zeta) = Ce^{-\zeta/ml} - \frac{2V}{mla}(\zeta - 5l)\left[e^{-(\zeta-3l)/ml} + 2e^{-(\zeta-5l)/ml}\right]$$
$$+ \frac{2V}{m^2l^2a}(\zeta - 5l)^2 e^{-(\zeta-5l)/ml}.$$

Die Bedingung der Stetigkeit der Geschwindigkeit in $s = l$ zur Zeit $t = 4l/a$ liefert

$$f'(3l - 0) - f'(5l - 0) = f'(3l + 0) - f'(5l + 0)$$

oder

$$\frac{V}{a}e^{-2/m} - \frac{V}{a}(e^{-4/m} + e^{-2/m}) + \frac{4V}{ma}e^{-2/m} = \frac{V}{a}(e^{-2/m} + 1) - Ce^{-5/m},$$

woraus

$$C = \frac{V}{a}\left\{e^{1/m} + \left(1 - \frac{4}{m}\right)e^{3/m} + e^{5/m}\right\}.$$

Mithin wird, wenn $7l > \zeta > 5l$,

$$f'(\zeta) = \frac{V}{a}e^{-(\zeta-l)/ml} + \frac{V}{a}\left\{1 - \frac{2}{ml}(\zeta - 3l)\right\}e^{-(\zeta-3l)/ml}$$
$$+ \frac{V}{a}\left\{1 - \frac{4}{ml}(\zeta - 5l) + \frac{2}{m^2l^2}(\zeta - 5l)^2\right\}e^{-(\zeta-5l)/ml}. \quad (18)$$

Die Funktion $f(\zeta)$ kann durch Integration von $f'(\zeta)$ bestimmt werden, und die Integrationskonstante ergibt sich aus der Bedingung, daß an der Stelle $s = l$ kein Sprung in der Verschiebung besteht. Diese Bedingung liefert, wenn $t = 0, 2l/a, \ldots$ gesetzt wird, Gleichungen folgender Art:

$$0 = f(-l + 0) - f(l + 0),$$
$$f(l - 0) - f(3l - 0) = f(l + 0) - f(3l + 0);$$

aus ihnen ergibt sich, da $f(-l + 0)$ und $f(l - 0)$ verschwinden,

$$f(l + 0) = 0 = f(l - 0), \quad f(3l + 0) = f(3l - 0), \ldots.$$

Somit besteht keine Unstetigkeit in $f(\zeta)$, wie übrigens evident, da die Funktion $f'(\zeta)$ nur endliche Unstetigkeiten besitzt, die durch Intervalle getrennt sind, in denen sie stetig ist. Wir haben daher $f'(\zeta)$ einfach in jedem der Intervalle $3l > \zeta > l$, $5l > \zeta > 3l, \ldots$ zu integrieren und die Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß $f(l) = 0$ und $f(\zeta)$ stetig ist. Wir erhalten folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{wenn } 3l > \zeta > l,\\
&f(\zeta) = (mlV/a)\{1 - e^{-(\zeta - l)/ml}\};\\
&\text{wenn } 5l > \zeta > 3l,\\
&f(\zeta) = -\frac{mlV}{a}e^{-(\zeta - l)/ml} + \frac{mlV}{a}\left\{1 + \frac{2}{ml}(\zeta - 3l)\right\}e^{-(\zeta - 3l)/ml};\\
&\text{wenn } 7l > \zeta > 5l,\\
&f(\zeta) = \frac{mlV}{a}\left\{1 - e^{-(\zeta - l)/ml}\right\} + \frac{mlV}{a}\left\{1 + \frac{2}{ml}(\zeta - 3l)\right\}e^{-(\zeta - 3l)/ml}\\
&\qquad - \frac{mlV}{a}\left\{1 + \frac{2}{m^2 l^2}(\zeta - 5l)^2\right\}e^{-(\zeta - 5l)/ml};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Die Lösung drückt das Resultat aus, daß im Augenblick des Anpralls eine Kompressionswelle von dem gestoßenen Ende ausläuft, die nach dem festen Ende zu schreitet, wo sie reflektiert wird. Die Bewegung des stoßenden Körpers erzeugt eine fortlaufende Reihe solcher Wellen, die sich dem festen Ende zu bewegen und dort reflektiert werden.

In der obigen Lösung sind wir so vorgegangen, wie wenn der stoßende Körper mit dem Stabe vereinigt bliebe, sodaß die Bedingung (9) für alle positiven Werte von $t$ gilt; wenn aber die Körper getrennt bleiben, gilt die Lösung nur so lange, wie positiver Druck zwischen dem Stab und dem anprallenden Körper herrscht. Wenn in obiger Lösung der Druck in $x = l$ negativ wird, so hört der Stoß auf. Dies tritt ein, wenn $f'(at - l) + f'(at + l)$ negativ wird. Solange $2l > at > 0$, ist dieser Ausdruck gleich $(V/a)e^{-at/ml}$, also positiv. Wenn $4l > at > 2l$, so ist er gleich

$$\frac{V}{a}e^{-at/ml}\left[1 + 2e^{2/m}\left(1 - \frac{at - 2l}{ml}\right)\right];$$

diese Größe verschwindet, wenn $2at/ml = 4/m + 2 + e^{-2/m}$, und diese Gleichung kann in dem Intervall $4l > at > 2l$ eine Wurzel haben, falls $2 + e^{-2/m} < 4/m$. Nun hat die Gleichung $2 + e^{-2/m} = 4/m$ eine zwischen $m = 1$ und $m = 2$ liegende Wurzel, nämlich $m = 1{,}73\ldots$. Ist somit $m < 1{,}73$, so hört der Stoß in einem Zeitpunkt im Intervall $4l/a > t > 2l/a$ auf, und dieser Zeitpunkt ist durch die Gleichung gegeben

$$t = \frac{l}{a}(2 + m + \tfrac{1}{2}me^{-2/m}).$$

Ist $m > 1{,}73$, so können wir in derselben Weise ermitteln, ob der Stoß in einem Zeitpunkt des Intervalls $6l/a > t > 4l/a$ aufhört oder nicht, usw. Es läßt sich noch zeigen, daß die größte Kompression des Stabes am festen Ende auftritt und daß ihr Wert, falls $m < 5$, gleich $2(1 + e^{-2/m})V/a$ ist, dagegen näherungsweise gleich $(1 + \sqrt{m})V/a$, falls $m > 5$. Würde das Problem unter Vernachlässigung der Trägheit des Stabes als statisches Problem behandelt, so würde sich $\sqrt{m}V/a$ als größte Kompression ergeben. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf die auf p. 494 zitierten Autoren.

## § 282. Stab, am einen Ende frei, am andern longitudinal gestoßen.[1])

Wenn das Ende $s = 0$ frei ist, so verschwindet dort $\partial w/\partial s$ für alle Werte von $t$, sodaß $-f'(at) + F'(at) = 0$. Wir können daher $F(\zeta) = f(\zeta)$ setzen und statt (12) hinschreiben

$$w = f(at - s) + f(at + s);$$

wie vorhin finden wir, daß $f(\zeta)$ im Intervall $l > \zeta > -l$ verschwindet.

Die fortsetzende Gleichung lautet jetzt

$$f''(\zeta) + (1/ml)f'(\zeta) = -f''(\zeta - 2l) + (1/ml)f'(\zeta - 2l),$$

und die Unstetigkeit von $f'(\zeta)$ bei $\zeta = l$ bestimmt sich durch die Gleichung

$$a[f'(-l + 0) + f'(l + 0)] = -V, \text{ oder } f'(l + 0) = -V/a.$$

Wir erhalten also folgende Resultate:

$$\text{wenn } 3l > \zeta > l, \text{ ist } f'(\zeta) = -\frac{V}{a}e^{-(\zeta - l)/ml},$$

$$f(\zeta) = -\frac{Vml}{a}\{1 - e^{-(\zeta - l)/ml}\};$$

wenn $5l > \zeta > 3l$, wird

$$f'(\zeta) = -\frac{V}{a}e^{-(\zeta - l)/ml} + \frac{V}{a}\left\{1 - \frac{2}{ml}(\zeta - 3l)\right\}e^{-(\zeta - 3l)/ml}.$$

Die Dehnung in $s = l$ ist nun gleich $f'(at + l) - f'(at - l)$, mithin, bis zur Zeit $t = 2l/a$, gleich

$$-(V/a)e^{-at/ml},$$

also negativ, sodaß der Druck bis zum Zeitpunkt $t = 2l/a$ positiv bleibt. Unmittelbar nach diesem Augenblick aber wird die Dehnung gleich $(V/a)(2 - e^{-2/m})$, also positiv; der Druck verschwindet also, und der Stoß hört im Zeitpunkt $t = 2l/a$ auf, d. h. nach Verlauf der Zeit, die eine Dehnungswelle braucht, um die Länge des Stabes zweimal zu durchlaufen. Die Welle, die im Augenblick des Anpralls am gestoßenen Ende erzeugt wird, ist eine Kompressionswelle; sie wird am freien Ende als Dehnungswelle reflektiert. Der Stoß hört auf, wenn diese reflektierte Welle das den stoßenden Körper berührende Ende erreicht. Der Zustand des Stabes und die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers in diesem Augenblick bestimmen sich durch die obigen Formeln. Der Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $Ve^{-2/m}$ in derselben Richtung wie vor dem Stoß; der Stab bewegt sich in derselben Richtung, und die Geschwindigkeit seines Massenmittelpunktes ist gleich $mV(1 - e^{-2/m})$. In einem beliebigen Punkte des Stabes ist die Geschwindigkeit gleich $2Ve^{-1/m}\cosh(s/ml)$ und die Dehnung gleich $2(V/a)e^{-1/m}\sinh(s/ml)$, sodaß der Stab schwingend zurückprallt.

---

1) Vgl. *J. Boussinesq, loc. cit.* p. 494.

## § 283. Plötzlich belasteter Stab.

Ein schwerer Körper werde plötzlich, ohne Geschwindigkeit zu besitzen, an das untere Ende eines Stabes geheftet, der, am oberen Ende befestigt, vertikal herabhängt. Führen wir ähnliche Bezeichnungen wie in § 281 ein, so können wir die Schwingungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + g \tag{20}$$

schreiben, und der dem Gleichgewichtszustande entsprechende Wert von $w$ ist $\frac{1}{2} g s(2l - s)/a^2$. Somit können wir schreiben

$$w = \tfrac{1}{2} g s(2l - s)/a^2 + w', \tag{21}$$

und $w'$ muß von der Form sein

$$w' = \Phi(at - s) - \Phi(at + s); \tag{22}$$

wie vorhin finden wir, daß $\Phi(\zeta)$ im Intervall $l > \zeta > -l$ verschwindet.

Die Bewegungsgleichung der angehängten Masse lautet

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}\right)_{s=l} = g - \frac{a^2}{ml}\left(\frac{\partial w'}{\partial s}\right)_{s=l}; \tag{23}$$

daraus ergibt sich die fortsetzende Gleichung

$$\Phi''(\zeta) + \frac{1}{ml}\Phi'(\zeta) = \Phi''(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml}\Phi'(\zeta - 2l) - \frac{g}{a^2}, \tag{24}$$

und die Integrationskonstanten sind so zu bestimmen, daß keine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit oder in der Verschiebung besteht. Wir erhalten folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned} &\text{wenn } 3l > \zeta > l, \text{ ist} \\ &\Phi'(\zeta) = -\frac{g}{a^2} ml\{1 - e^{-(\zeta - l)/ml}\}, \\ &\Phi(\zeta) = -\frac{g}{a^2} m^2 l^2 \left\{\frac{\zeta - l}{ml} - 1 + e^{-(\zeta - l)/ml}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die weiteren Gleichungen, die bei diesem Problem zur Bestimmung von $\Phi'(\zeta)$ dienen, lassen sich mit denjenigen, durch die $f(\zeta)$ in § 281 bestimmt wurde, identifizieren, indem $-g/a$ statt $V$ gesetzt wird. Die Lösung ist nicht auf den Wertebereich von $t$ beschränkt, innerhalb dessen der Zug am unteren Ende gleiches Vorzeichen behält.

Der Ausdruck für die Dehnung in einem beliebigen Punkte ist

$$g(l - s)/a^2 - \Phi'(at - s) - \Phi'(at + s),$$

am festen Ende also gleich

$$lg/a^2 - 2\Phi'(at), \text{ oder gleich } lg/a^2 + 2(g/aV)f(at),$$

wo $f$ die in § 281 so bezeichnete Funktion. Der Maximalwert tritt ein für $f'(at) = 0$.

Setzen wir $m = 1$, sodaß die angehängte Masse gleich der Masse des Stabes ist, so ergibt sich aus (16), daß $f'(at)$ nicht vor dem Zeitpunkt $t = 3l/a$ verschwindet; aus (17) dagegen folgt, daß $f'(at)$ zwischen $t = 3l/a$ und $t = 5l/a$ verschwindet, falls die Gleichung

$$1 + e^2\{1 - 2(\zeta - 3l)/l\} = 0$$

im Intervall $5l > \zeta > 3l$ eine Wurzel besitzt. Die Wurzel ist $\zeta = l\{3 + \frac{1}{2}(1 + 1/e^2)\}$, oder $\zeta = l(3{,}568)$, liegt also in diesem Intervall. Die größte Dehnung am befestigten Ende ist gleich

$$\frac{lg}{a^2}\{1 + 2e^{-2{,}568}[-1 + e^2\{1 + 2(0{,}568)\}]\}$$

oder gleich $(lg/a^2)(1 + 4e^{-0{,}568})$, d. i. gleich $(3{,}27)lg/a^2$. Die statische Verzerrung am befestigten Ende, die eintritt, wenn der Stab die angehängte Masse im Gleichgewichtszustand trägt, ist gegeben durch $2lg/a^2$, und das Verhältnis der maximalen dynamischen Verzerrung zu diesem Wert ist $1{,}63:1$. Diese Verzerrung tritt im Augenblick $t = (3{,}568)l/a$ auf.

Setzen wir $m = 2$, sodaß die angehängte Masse doppelt so groß ist wie die Masse des Stabes, so ergibt sich aus (16), daß $f'(at)$ nicht vor dem Zeitpunkt $t = 3l/a$ verschwindet; aus (17) dagegen folgt, daß $f'(at)$ zwischen $t = 3l/a$ und $t = 5l/a$ verschwindet, falls die Gleichung

$$1 + e\{1 - (\zeta - 3l)/l\} = 0$$

im Intervall $5l > \zeta > 3l$ eine Wurzel besitzt. Die Wurzel ist $\zeta = l(4 + 1/e)$, oder $\zeta = l(4{,}368)$, fällt also in dies Intervall. Die größte Dehnung am befestigten Ende ist gleich

$$\frac{lg}{a^2}\{1 + 4e^{-\frac{1}{2}(3{,}368)}[-1 + (1 + 1{,}368)e]\},$$

oder gleich $lg/a^2(1 + 8e^{-0{,}684})$, d. i. gleich $(5{,}04)lg/a^2$. Die statische Verzerrung ist in diesem Falle gleich $3lg/a^2$, und das Verhältnis der maximalen dynamischen Verzerrung zu diesem Wert ist $1{,}68:1$. Diese Verzerrung tritt im Augenblick $t = (4{,}368)l/a$ auf.

Setzen wir $m = 4$, sodaß die angehängte Masse viermal so groß ist wie die Masse des Stabes, so ergibt sich, daß $f'(at)$ nicht vor dem Zeitpunkt $t = 5l/a$ verschwindet; aus (18) dagegen folgt, daß $f'(at)$ zwischen $t = 5l/a$ und $t = 7l/a$ verschwindet, falls die Gleichung

$$1 - \tfrac{1}{2}\{(\zeta - 5l)\}e^{\frac{1}{2}} + [1 - (\zeta - 5l)/l + \tfrac{1}{8}(\zeta - 5l)^2/l^2]e = 0$$

im Intervall $7l > \zeta > 5l$ eine Wurzel besitzt. Die kleinere Wurzel ist $\zeta = l(6{,}183)$, fällt also in dies Intervall. Die größte Dehnung am festen Ende ist gleich

$$\frac{lg}{a^2}\left[1 + 8 - 8e^{-(\zeta - l)/4l}\left\{1 - \left(2 + \frac{1}{2}\frac{\zeta - 5l}{l}\right)e^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{1}{8}\frac{(\zeta - 5l)^2}{l^2}\right)e\right\}\right],$$

wo $\zeta$ durch die obige Gleichung gegeben ist. Die in Rede stehende Dehnung ist daher gleich

$$\frac{lg}{a^2}\left[9 + 8e^{-\frac{1}{4}(1,183)}\left\{2e^{-\frac{1}{2}} - (1,183)\right\}\right],$$

oder gleich $(9,18)(lg/a^2)$. Die statische Verzerrung ist in diesem Falle gleich $5(lg/a^2)$, und das Verhältnis der maximalen dynamischen Verzerrung zur statischen Verzerrung ist ungefähr gleich 1,84. Diese Verzerrung tritt im Augenblick $t = (6,183)l/a$ auf.

Bemerkenswert ist das Resultat, daß selbst wenn die angehängte Masse kein großes Vielfaches der Masse des Stabes ist, die größte von der plötzlichen Belastung herrührende Verzerrung dem theoretischen Grenzwert, d. h. der doppelten statischen Verzerrung, ziemlich nahe kommt. (Vgl. § 84.)

## § 284. Longitudinaler Stoß zweier Stäbe.

Das Problem des longitudinalen Stoßes zweier Stäbe oder Stangen ist durch ein ähnliches analytisches Verfahren gelöst worden wie das Problem von § 281.[1]) Es gestaltet sich etwas verwickelter, weil mehrere unbestimmte Funktionen erforderlich sind, um den Zustand der beiden Stäbe auszudrücken; andererseits ist es einfacher, weil diese Funktionen selbst von einfacher Natur sind. Das Problem läßt sich auch durch Betrachtung der die Stäbe entlanglaufenden Wellen lösen.[2]) Die Dehnung $\varepsilon$ und die Geschwindigkeit $v$ an der Vorderseite einer Dehnungswelle, die einen Stab entlang fortschreitet, sind durch die Gleichung $\varepsilon = -v/a$ verknüpft. (Vgl. § 205.) Dieselbe Beziehung gilt in jedem Punkte einer Verdichtungswelle, die durchweg in einer Richtung fortschreitet, wie aus der Formel $w = f(at - s)$, die eine derartige Welle kennzeichnet, hervorgeht. Wenn eine Verdichtungswelle, die den Stab entlang läuft, ein freies Ende erreicht, so wird sie reflektiert; um die Natur der Bewegung und der Verzerrung in der reflektierten Welle zu erkennen, brauchen wir uns einfach den Stab unbegrenzt fortgesetzt und eine Welle in entgegengesetzter Richtung in der Weise die Verlängerung des Stabes entlang laufend zu denken, daß bei Überlagerung der beiden Wellen am Endquerschnitt keine Kompression sich ergibt. Offenbar muß die Geschwindigkeit, die sich mit der „Bildwelle" über die Verlängerung des Stabes fortpflanzt, dieselbe sein wie diejenige, die sich mit der Originalwelle fortpflanzt, und die mit der „Bildwelle" fortschreitende Dehnung muß numerisch gleich der Verdichtung in der Originalwelle sein.[3])

Es seien nun $l, l'$ die Längen der Stäbe, die, wie wir annehmen, aus gleichem Material bestehen und gleichen Querschnitt besitzen[4]);

1) Saint Venant, *J. de math.* (*Liouville*), (Sér. 2), t. 12 (1867).

2) Vgl. Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil I, p. 280, 281.

3) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 2, § 257.

4) Saint-Venant, *loc. cit.* behandelt auch den Fall verschiedenen Materials und Querschnitts.

ihre Geschwindigkeiten, in gleicher Richtung gemessen, seien $V$, $V'$. Wir setzen $l > l'$ voraus. Wenn die Stäbe zusammenstoßen, so nehmen die sich berührenden Enden eine gemeinsame Geschwindigkeit an, und diese bestimmt sich durch die Bedingung, daß das System der zwei sehr kleinen benachbarten Stücke der Stäbe, deren Bewegung in derselben sehr kurzen Zeit eine Änderung erfährt, in dieser Zeit weder Bewegungsgröße verliert noch gewinnt. Die gemeinsame Geschwindigkeit muß daher gleich $\frac{1}{2}(V + V')$ sein. Von der Berührungsstelle laufen Wellen aus und pflanzen sich längs beider Stäbe fort; die Geschwindigkeit eines Stabelements relativ zum Stabe selbst ist in dem Augenblick, wo die Welle es erreicht, gleich $\frac{1}{2}(V \sim V')$, sodaß es sich um Verdichtungswellen handelt, und die Kompression ist gleich $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$.

Um den Verlauf der Bewegung im kürzeren Stabe $l'$ darzulegen, denken wir uns diesen Stab über das freie Ende hinaus unbegrenzt fortgesetzt und bringen ihn zur Ruhe, indem wir dem ganzen System eine Geschwindigkeit erteilen, die $V'$ gleich und entgegengesetzt ist. Im Augenblick des Anpralls geht eine positive Welle[1]) von der Berührungsstelle aus und läuft den Stab entlang; die Geschwindigkeit und die Verdichtung in dieser Welle sind $\frac{1}{2}(V \sim V')$ und $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$. In demselben Augenblick geht eine negative „Bildwelle" von dem Querschnitt aus, der auf der gedachten Verlängerung des Stabes im Abstand $2l'$ von der Berührungsstelle liegt; die Geschwindigkeit und die Dehnung in dieser „Bildwelle" sind $\frac{1}{2}(V \sim V')$ und $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$. Nach Verlauf der Zeit $l'/a$ seit dem Augenblick des Zusammenstoßes erreichen diese beiden Wellen das freie Ende und überlagern sich dann. An jeder Stelle des wirklichen Stabes, wo sie sich überlagern, verschwindet die Verzerrung und wird die Geschwindigkeit gleich $V \sim V'$. Wenn die reflektierte Welle die Berührungsstelle erreicht, also nach Verlauf der Zeit $2l'/a$ seit dem Augenblick des Zusammenstoßes, bewegt sich der Stab $l'$ als Ganzes mit der Geschwindigkeit $V \sim V'$ und ist unverzerrt. Überlagern wir daher die ursprüngliche Geschwindigkeit $V'$, so haben wir das Resultat, daß nach Verlauf der Zeit, in der eine Dehnungswelle die doppelte Länge des kürzeren Stabes durchläuft, dieser Stab unverzerrt ist und mit der ursprünglichen Geschwindigkeit $V$ des längeren Stabes sich bewegt.

Um den Zustand des längeren Stabes $l$ von Beginn des Stoßes ab darzulegen, denken wir uns diesen Stab über sein freies Ende hinaus unbegrenzt fortgesetzt und bringen ihn zur Ruhe, indem wir

1) Eine Dehnungswelle heißt „positiv" oder „negativ", je nachdem die Geschwindigkeit des Stabes selbst mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

dem ganzen System eine Geschwindigkeit erteilen, die $V$ gleich und entgegengesetzt ist. Im Augenblick des Anpralls geht eine Welle von der Berührungsstelle aus und läuft den Stab entlang; die Geschwindigkeit und die Verdichtung in dieser Welle sind $\frac{1}{2}(V \sim V')$ und $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$. In demselben Augenblick geht eine negative „Bildwelle" von dem Querschnitt aus, der auf der gedachten Verlängerung des Stabes im Abstand $2l$ von der Berührungsstelle liegt; die Geschwindigkeit und die Dehnung in dieser Bildwelle sind $\frac{1}{2}(V \sim V')$ und $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$. Nach Verlauf der Zeit $2l'/a$ seit dem Augenblick des Zusammenstoßes verschwindet der Druck an der Berührungsstelle, und es bildet sich eine Wellenrückseite. Wenn also der Stab als unbegrenzt angesehen wird, so hat sowohl die Verdichtungswelle wie die (als „Bild" auftretende) Dehnungswelle die Länge $2l'$. Unmittelbar nach dem Zeitpunkt $2l'/a$ verschwindet im Berührungsquerschnitt die Verzerrung und die Geschwindigkeit. Überlagern wir also die ursprüngliche Geschwindigkeit $V$, so sehen wir, daß derselbe in Wirklichkeit die Geschwindigkeit $V$ annimmt, daß also die zusammengestoßenen Enden der beiden Stäbe in Berührung bleiben, ohne aber Druck aufeinander auszuüben.

Der Zustand des längeren Stabes $l$ zwischen den Zeitpunkten $2l'/a$ und $2l/a$ bestimmt sich durch Überlagerung der Wellen von der Länge $2l'$, die im Augenblick des Zusammenstoßes von der Berührungsstelle und dem um $2l$ von ihr entfernten Querschnitt auf der gedachten Verlängerung des Stabes ausgehen. Vom Zeitpunkte $l/a$ ab überlagern sich diese Wellen auf einer vom freien Ende begrenzten endlichen Stabstrecke, und in diesem Teil des Stabes verschwindet die Verzerrung und wird die Geschwindigkeit gleich $V \sim V'$, wenn wie früher dem System die Geschwindigkeit $-V$ erteilt wird. Der Zustand des Stabes zur Zeit $2l/a$ ist für den Fall, daß $l > 2l'$, ein anderer als in dem Falle, wo $l < 2l'$. Ist $l > 2l'$, so hat die Kompressionswelle den Stab bereits verlassen, und die Dehnungswelle erstreckt sich über ein von der Berührungsstelle begrenztes Stück $2l'$. Als Verzerrung haben wir in diesem Teil Dehnung vom Betrage $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$, und die Geschwindigkeit ist dort $\frac{1}{2}(V \sim V')$, wenn wie vorhin dem Ganzen die Geschwindigkeit $-V$ erteilt wird. Der übrige Teil des Stabes ist unverzerrt und hat die Geschwindigkeit null. Überlagern wir daher die ursprüngliche Geschwindigkeit $V$, so sehen wir, daß ein vom freien Ende begrenztes Stück $l - 2l'$ in diesem Augenblick die Geschwindigkeit $V$ hat und unverzerrt ist und daß der übrige Teil die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(V + V')$ und die Dehnung $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$ besitzt. Die Stabwelle wird nun an der Berührungsstelle reflektiert, sodaß sie in eine von letzterer auslaufende Verdichtungswelle übergeht, in der die Kompression $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$ ist. Die Geschwindigkeit an der Berührungsstelle wird $V'$. Die zusammen-

gestoßenen Enden haben nun die Geschwindigkeiten getauscht, und die Stäbe trennen sich.

Ist $l < 2l'$, so überlagern sich im Zeitpunkt $2l/a$ die Verdichtungs- und die Dehnungswelle auf einer vom freien Ende begrenzten Strecke von der Länge $2l' - l$, und der übrige Teil des Stabes wird von der Dehnungswelle erfüllt. Erteilen wir, wie vorhin, dem Ganzen die Geschwindigkeit $-V$, so ist das vom freien Ende begrenzte Stück $2l' - l$ unverzerrt und besitzt die Geschwindigkeit $V \sim V'$, im übrigen Teil des Stabes haben wir die Dehnung $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$ und die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(V \sim V')$. Überlagern wir also die ursprüngliche Geschwindigkeit $V$, so erkennen wir, daß in dem betrachteten Zeitpunkt ein von dem freien Ende begrenztes Stück $2l' - l$ die Geschwindigkeit $V'$ und verschwindende Verzerrung, der übrige Teil aber die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(V + V')$ und die Dehnung $\frac{1}{2}(V \sim V')/a$ besitzt. Die Welle wird, wie in dem anderen Falle, an der Berührungsstelle reflektiert, und die letztere erhält die Geschwindigkeit $V'$.

In beiden Fällen trennen sich die Stäbe nach Verlauf einer Zeit, die eine Dehnungswelle braucht, um die Länge des längeren Stabes zweimal zu durchlaufen. Der kürzere Stab nimmt die ursprüngliche Geschwindigkeit des längeren an und prallt unverzerrt zurück; der längere dagegen prallt schwingend zurück. Die Massenmittelpunkte der beiden Stäbe bewegen sich nach dem Stoß so, wie wenn da ein „Restitutionskoeffizient“ vom Betrage $l' : l$ wäre.

## § 285. Probleme dynamischen Widerstandes, bei denen Querschwingungen auftreten.

Die in §§ 281—284 erhaltenen Resultate geben über den allgemeinen Charakter dynamischer Widerstände Aufschluß. Ähnliche Methoden wie die in diesen Paragraphen benutzten lassen sich bei Problemen, bei denen Querschwingungen auftreten, nicht anwenden, da es keine allgemeine Funktionallösung der Gleichung (6), § 280, gibt.[1]) Man wird bei derartigen Problemen am besten so verfahren, daß man die Verschiebung als Summe einer Reihe von Normalfunktionen ausdrückt und die konstanten Koeffizienten der Glieder der Reihe so wählt, daß die Anfangsbedingungen befriedigt werden. Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens geben Lord Rayleigh[2]) und Saint-Venant.[3])

Zuweilen kann man eine angenäherte Lösung durch ein einfacheres Verfahren erhalten. Es handle sich z. B. um das Problem eines beider-

1) Die Fouriersche Lösung mittels bestimmter Integrale, die sich im *Bulletin des Sciences à la Société philomatique,* 1818, findet (vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound,* vol. 1, § 192), wird von J. Boussinesq, *Applications des Potentiels,* p. 456 ff., auf Probleme dynamischen Widerstandes angewendet.

2) *Theory of Sound*, vol. 1, § 168.

3) Siehe die Clebsch-Ausgabe, Note zu § 61.



seits „gestützten" Stabes, der von einem mit gegebener Geschwindigkeit sich bewegenden schweren Körper gestoßen wird. Nach dem Anprall bleibe der stoßende Körper mit dem Stabe fest verbunden. In jedem dem Anprall folgenden Augenblick können wir den Stab in erster Annäherung als ruhend und durch eine im Stoßpunkt angreifende Querkraft gebogen ansehen. Er wird dann in diesem Punkte eine gewisse Durchbiegung haben, die sich durch die Formeln von § 247, d) aus der Last bestimmt. Die Last ist gleich dem Druck zwischen Stab und stoßendem Körper, und die Durchbiegung des Stabes im Stoßpunkte ist gleich der Verschiebung des stoßenden Körpers aus seiner Lage im Augenblick des Anpralls. Die Bewegungsgleichung des stoßenden Körpers, auf den eine der obengenannten Querkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft als wirkend anzunehmen ist, und die Bedingung, daß der Körper im Augenblick des Anpralls die vorgeschriebene Geschwindigkeit hat und momentan sich im Stoßpunkte befindet, sind hinreichend, um die Verschiebung des stoßenden Körpers und den zwischen ihm und dem Stabe herrschenden Druck in jedem folgenden Augenblick zu bestimmen. Bei diesem Verfahren, das zuweilen als Coxsche Methode[1]) bezeichnet wird, wird die von dem stoßenden Körper hervorgebrachte Durchbiegung als statische Wirkung angesehen; das Verfahren antizipiert daher in gewissem Sinne die Hertzsche Theorie des Stoßes (§ 139). Es wurde bereits ausgeführt, daß eine ähnliche Methode von Willis und Stokes bei der Behandlung des Problems der wandernden Last angewendet wurde.[2])

Ein ähnliches Verfahren benutzte Lord Rayleigh[3]) zur angenäherten Bestimmung der Frequenz der tiefsten Querschwingung eines Stabes. Er ging aus von einem allgemeinen Satze, wonach die Schwingungszahl eines dynamischen Systems, die sich für einen vorgeschriebenen Typus der Verschiebung ergeben würde, nicht kleiner sein kann als die Frequenz der tiefsten Normalschwingung des Systems. Er zeigte, daß man bei einem am einen Ende eingeklemmten, am andern Ende freien Stab eine gute Annäherung für die Schwingungszahl durch die Annahme erhält, die Verschiebung des Stabes sei von demselben Typus wie bei statischer Verbiegung durch eine Querkraft, die in dem um ein Viertel der Länge vom freien Ende entfernten Punkt konzentriert ist. Diese Methode ist neuerdings Gegenstand verschiedener Auseinandersetzungen gewesen.[4]) Man hat gezeigt, daß sie für die Bestimmung der Frequenz der tiefsten Querschwingung eines Stabes von veränderlichem Querschnitt herangezogen werden kann.[5])

1) H. Cox, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 9 (1850). Vgl. Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, Article 1435.

2) Siehe *Einleitung*, p. 32.

3) *Theory of Sound*, vol. 1, § 182.

4) C. A. B. Garret, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 8 (1904), und C. Chree, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 9 (1905).

5) J. Morrow, *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 10 (1905). Einige spezielle Fälle von Schwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt, bei denen die strenge Bestimmung der (durch Besselsche Funktionen sich ausdrückenden) Normalfunktionen möglich ist, behandelte Kirchhoff, *Berlin Monatsberichte*, 1839 = *Ges. Abhandlungen*, p. 339.

Ferner hat man gezeigt, daß sich eine Methode sukzessiver Approximation zur Bestimmung der verschiedenen Normalfunktionen bei einem solchen Stabe und ihrer Frequenzen etwa auf die Lord Rayleighschen Lösungen gründen läßt, wenn letztere als erste Approximationen angesehen werden.[1])

## § 286. Das Schleudern elastischer Wellen.[2])

Eine lange, in ihren Lagern rotierende Welle bleibt bei geringen Umdrehungsgeschwindigkeiten gerade; ist aber die Geschwindigkeit groß genug, so kann stetige Rotation bei gebogener Zentrallinie stattfinden. Man sagt dann, die Welle „schleudert" (engl. „whirls"). Es sei $u$ die transversale Verschiebung eines Punktes der Zentrallinie, $\Omega$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Welle umläuft. Die Bewegungsgleichung, ebenso gebildet wie Gleichung (6) in § 280, lautet

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varrho \Omega^2 u = - E k'^2 \frac{\partial^4 u}{\partial s^4}, \tag{26}$$

und die Lösung dieser Gleichung ist so zu wählen, daß sie geeignete Bedingungen an den Enden der Welle befriedigt. Wir wollen den Fall betrachten, daß die Enden $s = 0$ und $s = l$ „gestützt" sind. Wenn der Stab sich gleichförmig dreht, so verschwindet $\partial^2 u/\partial t^2$, und die Gleichung stimmt dann überein mit der für einen Stab, der einfache harmonische Schwingungen von der Periode $2\pi/\Omega$ ausführt. Damit die Gleichung

$$E k'^2 \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = \varrho \Omega^2 u \tag{27}$$

eine Lösung besitzt, die $u$ und $\partial^2 u/\partial s^2$ für $s = 0$ und $s = l$ verschwinden läßt, muß die Umdrehungsgeschwindigkeit $\Omega$ derart sein, daß $\Omega/2\pi$ gleich der Frequenz einer Biegungs-Normalschwingung des beiderseits gestützten Stabes ist. Die kleinste Umdrehungsgeschwindigkeit, bei der Schleudern stattfindet, ist daher derart, daß $\Omega/2\pi$ gleich der Frequenz der tiefsten Biegungsschwingung eines derartigen Stabes ist. Schreiben wir

$$\varrho \Omega^2 / E k'^2 = m^4,$$

so sind die möglichen Werte von $m$ durch die Gleichung $\sin ml = 0$ gegeben, und der kleinste Wert von $\Omega$, für den Schleudern eintreten kann, ist

$$(\pi^2 k'/l^2) \sqrt{E/\varrho}.$$

Das Schleudern unbelasteter Wellen, die unter verschiedenen Grenzbedingungen rotieren, hat A. G. Greenhill (*loc. cit.*) behandelt. Das

1) A. Davidoglou, „*Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques*", Paris (*Thèse*), 1900.

2) Vgl. A. G. Greenhill, *Proc. Inst. Mech. Engineers*, 1883.

technisch wichtige Problem einer Lasten (z. B. Flaschenzüge) tragenden Welle ist theoretisch und experimentell von S. Dunkerley[1]) untersucht worden. Er fand, daß die unmittelbare Anwendung der Methode der Normalfunktionen, wie sie oben geschildert wurde, zu sehr verwickelten Ergebnissen führt, und schlug vor, auf eine empirische Annahme zurückzugreifen. Der Gegenstand ist weiterhin von C. Chree[2]) mit Hilfe von Lord Rayleighs statischer Methode der Frequenzenbestimmung (§ 285) behandelt.

---

1) *Phil. Trans. R. Soc.* (Ser. A), vol. 185 (1894).
2) *Phil. Mag.* (Ser. 6), vol. 7 (1904).

# Kapitel XXI.

## Kleine Formänderung von Hause aus krummer Stäbe.

§ 287. Bei den Untersuchungen der Kapitel XVIII und XIX haben wir vorwiegend solche Deformationszustände eines dünnen Stabes betrachtet, bei denen große Verschiebungen der Zentrallinie und nicht unbedeutender Drall auftreten; Fälle, wo die Verschiebung der Zentrallinie und der Drall klein sind, haben wir als Grenzfälle behandelt. Dies Verfahren befolgten wir z. B. in der Theorie der Spiralfedern (§ 271). In derartigen Fällen lassen sich, wie auseinandergesetzt wurde, die Formeln für die Krümmungskomponenten und den Drall dadurch gewinnen, daß man die Zentrallinie als ungedehnt behandelt. Wir können von den Deformationsarten, bei denen nur kleine Verschiebungen vorkommen, eine systematische Darstellung geben, indem wir gewisse Größen zur Bezeichnung der Verschiebungskomponenten von Punkten der Zentrallinie einführen und diese Größen einer Bedingung unterwerfen, welche ausdrückt, daß die Zentrallinie nicht gedehnt wird.[1]

### § 288. Kennzeichnung der Verschiebung.

Die kleine Deformation eines ursprünglich geraden Stabes haben wir bereits hinreichend untersucht, und wir wollen daher annehmen, daß der Stab im ungespannten Zustand Krümmung und Drall besitzt. Wie in § 259 führen wir ein $(x_0, y_0, z_0)$-Koordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt längs der unverzerrten Zentrallinie mit der Geschwindigkeit eins sich so bewegt, daß die $z_0$-Achse stets in die Richtung der Tangente dieser Kurve fällt, während die $x_0$-Achse und die $y_0$-

1) Die Theorie wurde teilweise von Saint-Venant in einer Reihe von Aufsätzen in *Paris C. R.* t. 17 (1843) entwickelt, ausführlicher von J. H. Michell, *Messenger of Math.*, vol. 19 (1890). Letzterer hat auch einige strenge Lösungen der Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers, der von einer unvollständigen Ringfläche begrenzt ist, erhalten, und diese Lösungen bestätigen die Theorie, wenn der Ring dünn ist. Siehe *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 130.

Achse jeweils mit den vom Schwerpunkt ausgehenden Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen. Wir bezeichneten mit $\frac{1}{2}\pi - f_0$ den Winkel, den die $x_0$-Achse mit der Hauptnormalen der unverzerrten Zentrallinie in dem betreffenden Punkt einschließt, und mit $\varkappa_0, \varkappa_0', \tau_0$ die Komponenten der Anfangskrümmung und des Anfangsdralls. Wir haben die Formel

$$\varkappa_0'/\varkappa_0 = -\operatorname{tg} f_0.$$

Die Krümmung $1/\varrho_0$ und die Windung $1/\Sigma_0$ der Zentrallinie sind durch die Formeln gegeben

$$(1/\varrho_0)^2 = \varkappa_0^2 + \varkappa_0'^2, \quad 1/\Sigma_0 = \tau_0 - df_0/ds,$$

worin $s$ die von einem bestimmten Punkt der Zentrallinie aus gemessene Bogenlänge derselben bezeichnet.

Wenn der Stab ein wenig deformiert wird, so erfährt ein ursprünglich im Punkte $P$ liegendes Teilchen der Zentrallinie eine kleine Verschiebung, deren Komponenten, bezogen auf die in $P$ sich kreuzenden $(x_0, y_0, z_0)$ Achsen, mit $u, v, w$ bezeichnet werden mögen. Der Stab wird eine neue Krümmung und einen neuen Drall annehmen, die wie in § 252 und § 259 mit Hilfe eines beweglichen Systems von „Torsion-Biegungs-Hauptachsen" definiert werden. Den früheren Festsetzungen entsprechend fällt die $z$-Achse dieses Systems in die Richtung der Tangente der verzerrten Zentrallinie in dem Punkte $P_1$, in den das Teilchen $P$ verschoben ist, und die $(x, z)$-Ebene ist die durch $P_1$ gehende Tangentialebene der Fläche, die von denjenigen Teilchen gebildet wird, welche ursprünglich in der von $P$ auslaufenden $(x_0, z_0)$-Ebene lagen. Wir bezeichneten die Krümmungskomponenten und den Drall der verzerrten Zentrallinie in $P_1$ mit $\varkappa_1, \varkappa_1', \tau_1$. Wenn die Verschiebung jedes Punktes der Zentrallinie bekannt ist, so ist die Tangente der verzerrten Zentrallinie in jedem Punkte bekannt, und es ist klar, daß eine weitere Bestimmungsgröße genügt, um die Lage der $(x, y, z)$-Achsen in $P_1$ zu den $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$ festzustellen. Als solche wählen wir den kleinen Winkel $\beta$, den die $(x, z)$-Ebene mit der $(x_0, z_0)$-Ebene einschließt. Die gegenseitige Lage der beiden Achsensysteme bestimme sich durch folgendes orthogonale Transformationsschema:

| | $x_0$ | $y_0$ | $z_0$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $L_1$ | $M_1$ | $N_1$ |
| $y$ | $L_2$ | $M_2$ | $N_2$ |
| $z$ | $L_3$ | $M_3$ | $N_3$ |

(1)

hierin ist z. B. $L_1$ der Kosinus des Winkels zwischen der $x$-Achse in $P_1$ und der $x_0$-Achse in $P$. Wir wollen nun die Kosinus $L_1, \ldots$, die Krümmungskomponenten $\varkappa_1, \varkappa_1'$ und den Drall $\tau_1$ durch $u, v, w, \beta$ ausdrücken.

## § 289. Lage der Torsion-Biegungs-Hauptachsen.

Die Richtungskosinus $L_3$, $M_3$, $N_3$ beziehen die Tangente der verzerrten Zentrallinie in $P_1$ auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$. Nun sind die auf diese Achsen bezogenen Koordinaten von $P_1$ identisch mit den Verschiebungskomponenten $u, v, w$. Es sei $P'$ ein Punkt der unverzerrten Zentrallinie in der Nähe von $P$ und $\delta s$ das Bogenstück $PP'$; $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ seien die Koordinaten von $P'$, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$, ferner seien $\xi, \eta, \zeta$ die Koordinaten des Punktes $P_1'$, in den das Teilchen $P'$ verschoben wird, bezogen auf dieselben Achsen. Die Grenzwerte wie $\lim\limits_{\delta s = 0}(\xi - u)/\delta s$ sind die Richtungskosinus $L_3, \ldots$ Es sei $(u', v', w)$ die Verschiebung von $P'$, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P'$, und $(U', V', W')$ dieselbe Verschiebung, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$. Dann ist

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\delta x_0 + U', \; \delta y_0 + V', \; \delta z_0 + W').$$

Die Grenzwerte von $\delta x_0/\delta s$, $\delta y_0/\delta s$, $\delta z_0/\delta s$ sind 0, 0, 1. Die Grenzwerte von $(u' - u)/\delta s, \ldots$ sind $du/ds, \ldots$, und wir erhalten die gewöhnlichen für bewegliche Achsensysteme geltenden Formeln in der Form

$$\lim_{\delta s = 0} \frac{U' - u}{\delta s} = \frac{du}{ds} - v\tau_0 + w\varkappa_0', \text{ usw.}$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} L_3 = \frac{du}{ds} - v\tau_0 + w\varkappa_0', \quad M_3 = \frac{dv}{ds} - w\varkappa_0 + u\tau_0, \\ N_3 = 1 + \frac{dw}{ds} - u\varkappa_0' + v\varkappa_0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Gleichung $L_3^2 + M_3^2 + N_3^2 = 1$ führt, wenn wir Quadrate und Produkte von $u, v, w$ vernachlässigen, auf die Gleichung

$$\frac{dw}{ds} - u\varkappa_0' + v\varkappa_0 = 0, \tag{3}$$

die die Bedingung ausdrückt, daß die Zentrallinie ungedehnt bleibt. Aus dieser Gleichung folgt, daß $N_3 = 1$.

Die Richtungskosinus der $(x, y)$-Achsen in $P_1$, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$, bestimmen sich durch die Bedingungen, daß

die $(x, z)$-Ebene mit der $(x_0, z_0)$-Ebene einen kleinen Winkel $\beta$ einschließt und daß das Schema (1) eine rechtwinklige Koordinatentransformation von der Determinante 1 darstellt. Diese Bedingungen liefern

$$\left.\begin{array}{lll} L_1 = 1, & M_1 = \beta, & N_1 = -L_3, \\ L_2 = -\beta, & M_2 = 1, & N_2 = -M_3. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Diese Gleichungen würden sich übrigens auch aus den Formeln (7) von § 253 ergeben, wenn man $L_1, \ldots$ statt $l_1, \ldots$ schreibt, $\theta$ klein nimmt und $\beta$ statt $\Phi + \Psi$ setzt. Sie stimmen natürlich bis auf Glieder erster Ordnung in den kleinen Größen $u, v, w, \beta$.

## § 290. Krümmung und Drall.

Zur Berechnung der Krümmungskomponenten und des Dralls haben wir die Formeln (6) von § 253, wenn $\varkappa_1, \ldots$ statt $\varkappa, \ldots$ geschrieben wird. In jenen Formeln bezeichneten $l_1, \ldots$ Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen, bezogen auf feste Achsen. Hier haben wir die Größen $L_1, \ldots$ eingeführt, die die Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen in $P_1$, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$, bedeuten. Ist $P'$ ein Punkt nahe bei $P$, sodaß das Bogenstück $PP' = \delta s$, und ist $P_1'$ die verschobene Lage von $P'$, so können wir mit $L_1', \ldots$ die Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen in $P_1'$, bezogen auf die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P'$, bezeichnen; dann sind die Grenzwerte wie $\lim\limits_{\delta s = 0}(L_1' - L_1)/\delta s$ gleich den Differentialquotienten $dL_1/ds, \ldots$ Die festen Bezugsachsen für $l_1, \ldots$ seien die $(x_0, y_0, z_0)$-Achsen in $P$, und $l_1 + \delta l_1, \ldots$ mögen die Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen in $P_1'$, bezogen auf diese festen Achsen, bedeuten. Die Grenzwerte $\lim\limits_{\delta s = 0} \delta l_1/\delta s, \ldots$ sind dann gleich den Differentialquotienten $dl_1/ds \ldots$ Es ist klar, daß in $P$ zwar $l_1 = L_1, \ldots$, aber $dl_1/ds \neq dL_1/ds, \ldots$ In der Tat haben wir gemäß den gewöhnlichen für bewegliche Achsensysteme geltenden Formeln

$$\begin{aligned} dl_1/ds &= dL_1/ds - M_1\tau_0 + N_1\varkappa_0', \\ dm_1/ds &= dM_1/ds - N_1\varkappa_0 + L_1\tau_0, \\ dn_1/ds &= dN_1/ds - L_1\varkappa_0' + M_1\varkappa_0, \end{aligned}$$

und entsprechende Formeln haben wir für $dl_2/ds, \ldots$ und $dl_3/ds, \ldots$

In den Formeln (6) von § 253 schreiben wir $\varkappa_1, \ldots$ statt $\varkappa, \ldots$, setzen $n_3 = N_3 = 1$, ersetzen $l_1, \ldots$ durch die für $L_1 \ldots$ in (2) und (4) erhaltenen Werte und führen für $dl_1/ds, \ldots$ die eben gefundenen Werte ein. Streichen wir Glieder zweiter Ordnung in den kleinen Größen $u, v, w, \beta$, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \varkappa_0 + \beta\varkappa_0' - \frac{dM_s}{ds} - \tau_0 L_s, \\ \varkappa_1' &= \varkappa_0' - \beta\varkappa_0 + \frac{dL_s}{ds} - \tau_0 M_s, \\ \tau_1 &= \tau_0 + \frac{d\beta}{ds} + \varkappa_0 L_s + \varkappa_0' M_s, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

in denen $L_s$ und $M_s$ durch die ersten beiden der Gleichungen (2) gegeben sind.

## § 291. Vereinfachte Formeln.

Die Formeln vereinfachen sich in dem Falle, wo $f_0 = \frac{1}{2}\pi$. In diesem Falle ist die $x_0$-Achse, also eine der Hauptachsen des durch einen Punkt der unverzerrten Zentrallinie gelegten Querschnitts, identisch mit der Hauptnormalen dieser Kurve in jenem Punkte. Wenn dies zutrifft, haben wir

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa_0 = 0, \quad \varkappa_0' = 1/\varrho_0, \quad \tau_0 = 1/\Sigma_0, \\ &L_s = \frac{du}{ds} - \frac{v}{\Sigma_0} + \frac{w}{\varrho_0}, \quad M_s = \frac{dv}{ds} + \frac{u}{\Sigma_0}, \quad N_s = 1, \\ &\varkappa_1 = \frac{\beta}{\varrho_0} - \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{\Sigma_0}\right) - \frac{1}{\Sigma_0}\left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{\Sigma_0} + \frac{w}{\varrho_0}\right), \\ &\varkappa_1' = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{\Sigma_0} + \frac{w}{\varrho_0}\right) - \frac{1}{\Sigma_0}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{\Sigma_0}\right), \\ &\tau_1 = \frac{1}{\Sigma_0} + \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{\varrho_0}\left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{\Sigma_0}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Bedingung, daß die Zentrallinie ungedehnt bleibt, lautet

$$\frac{dw}{ds} = \frac{u}{\varrho_0}. \quad (7)$$

Aus diesen oder den allgemeineren Formeln von § 290 lassen sich die Krümmung und die Windung und die Richtungskosinus der Hauptnormalen und der Binormalen berechnen.

## § 292. Gleichgewichtsprobleme.

Die Theorie ist auf das Problem der Deformation von Kettengliedern[1]) durch den Druck, den benachbarte Glieder aufeinander übertragen, und ähnliche Probleme anwendbar und läßt sich auch für die Ermittelung des Verhaltens von Bogenträgern[2]) heranziehen,

1) E. Winkler, *Der Civilingenieur*, Bd. 4 (1858). Über die Winklersche Abhandlung sind in Todhunter und Pearsons *History*, vol. 2, p. 422f., ausführliche Mitteilungen gegeben und Einzelheiten berichtigt.

2) M. Bresse, *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, Paris 1854. Auch über diese Abhandlung ist in Todhunter und Pearsons *History*, vol. 2, p. 352f., berichtet. H. T. Eddy, *Amer. J. of Math.*, vol. 1 (1878),

wenn das Kettenglied bezw. der Bogenträger als dünner krummer Stab angesehen wird. Die Gleichgewichtsgleichungen wurden in § 259 aufgestellt, und in den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels fanden wir Formeln, die alle vorkommenden Größen durch die Verschiebung $(u, v, w)$ und die Winkelverschiebung $\beta$ ausdrücken; die Größen $u, v, w$ sind dabei selbst durch eine Gleichung (3) oder (7) miteinander verknüpft. Spezielle Probleme, wie die oben erwähnten, haben natürlich vorwiegend technische Bedeutung; wir wollen uns hier damit begnügen, einige Fälle der Biegung eines Stabes von der Form eines unvollständigen Kreisringes kurz zu behandeln.

a) *Biegung eines unvollständigen Kreisringes in seiner Ebene.*

Die unverzerrte Zentrallinie sei ein Kreis vom Radius $a$, $\theta$ sei der Winkel zwischen einem beliebigen und einem fest gewählten Radius, dann ist

$$\varrho_0 = ds/d\theta = a.$$

Die Verschiebung $u$ ist längs des nach innen gezogenen Radius gerichtet, und die Verschiebung $w$ hat die Richtung der Tangente des Kreises in dem Sinne, in dem $\theta$ wächst. Wir setzen voraus, daß die Ebene des Kreises für jeden Punkt des Stabes Hauptebene und daß die Biegungssteifigkeit, die der Biegung in dieser Ebene entspricht, gleich $B$ ist. Dann verschwinden $v$, $\beta$ und $1/\Sigma_0$, und die Bedingung, daß die Zentrallinie ungedehnt bleibt, lautet

$$\frac{dw}{d\theta} = u. \tag{8}$$

Das Biegungsmoment $G'$ in der Ebene des Kreises ist

$$G' = \frac{B}{a^2}\left(\frac{d^3w}{d\theta^3} + \frac{dw}{d\theta}\right); \tag{9}$$

das andere Biegungsmoment und das Torsionsmoment verschwinden.

Der Stab werde durch Kräfte gebogen, deren Komponenten pro Längeneinheit in jedem Punkte in Richtung des Radius und der Tangente durch $X$, $Z$ gegeben sind. Die aus (26) und (27), § 259, folgenden Gleichgewichtsgleichungen lauten

$$\frac{dN}{d\theta} + T + Xa = 0, \quad \frac{dT}{d\theta} - N + Za = 0, \quad \frac{dG'}{d\theta} + Na = 0. \tag{10}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Schubkraft $N$ und die Zugbeanspruchung $T$ sich durch die Gleichungen

$$N = -\frac{B}{a^3}\left(\frac{d^4w}{d\theta^4} + \frac{d^2w}{d\theta^2}\right), \quad T = -Xa + \frac{B}{a^3}\left(\frac{d^5w}{d\theta^5} + \frac{d^3w}{d\theta^3}\right) \tag{11}$$

hat für die Behandlung des Problems der Bogenträger ein graphisches Verfahren vorgeschlagen.

in $w$ ausdrücken und daß $w$ der Gleichung genügt[1])

$$\frac{B}{a^3}\left(\frac{d^6 w}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 w}{d\theta^4} + \frac{d^2 w}{d\theta^2}\right) = a\left(\frac{dX}{d\theta} - Z\right). \tag{12}$$

Wir verzeichnen folgende Resultate:

1) Wenn der Stab durch Kräftepaare vom Betrage $K$, die an seinen Enden in seiner Ebene angreifen, schwach gebogen wird, so bleibt die Zentrallinie kreisförmig, ihr Radius verkleinert sich jedoch um den Bruchteil $Ka/B$.

2) Wenn die Enden des Stabes durch $\theta = \pm\alpha$ gegeben sind, sodaß ihre Verbindungslinie vom Zentrum aus unter dem Winkel $2\alpha$ erscheint, und wenn der Stab durch Kräfte vom Betrage $R$ gebogen wird, die als Zug längs dieser Linie wirken (siehe Fig. 64), so ist die Verschiebung durch die Gleichungen gegeben

$$w = -(a^3 R/B)\,\theta\,(\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\theta), \quad u = \partial w/\partial\theta.$$

Fig. 64.

3) Der Stab werde durch Kräfte vom Betrage $S$ schwach gebogen, welche an starren, an den Enden befestigten Ansatzstücken, die mit der Sehne des unvollständigen Ringes zusammenfallen, angreifen (Fig. 65). Die Verschiebung ist dann durch die Gleichungen gegeben

$$w = -\tfrac{1}{2}(a^3 S/B)\,\theta\sin\theta, \quad u = \partial w/\partial\theta.$$

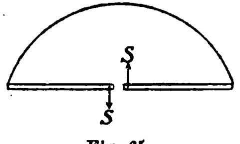


Fig. 65.

4) Der Stab bilde einen vollständigen Kreisring und werde durch normale Druckkräfte vom Betrage $X_1$, die in den gegenüberliegenden Enden eines Durchmessers angreifen, schwach gebogen. Wir messen $\theta$ von diesem Durchmesser aus (Fig. 66) und erhalten für die Verschiebung $w$ in einem Punkte, für den $\pi > \theta > 0$,

$$w = -X_1(a^3/B)\left[\theta/\pi - \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta - \tfrac{1}{2}\theta\sin\theta)\right], \quad u = \partial w/\partial\theta.$$

In zwei Punkten, die auf entgegengesetzten Seiten jenes Durchmessers zu ihm symmetrisch liegen, ist die Verschiebung offenbar dieselbe.

Wir können den Wert von $u$ für einen beliebigen Punkt berechnen und zeigen, daß der mit der Kraft-Angriffslinie zusammenfallende Durchmesser sich um $\{(\pi^2 - 8)/4\pi\}\,(X_1 a^3/B)$ verkürzt, während der dazu senkrechte Durchmesser sich um $\{(4-\pi)/2\pi\}\,(X_1 a^3/B)$ verlängert.[2])

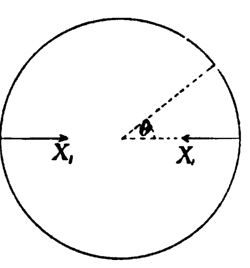


Fig. 66.

5) Der Stab bilde einen vollständigen Kreisring vom Gewicht $W$ und sei in einem Punkte seines Umfanges aufgehängt. Wir messen $\theta$ vom höchsten Punkte aus und finden für die Verschiebung $w$ in einem Punkte, für den $\pi > \theta > 0$, den

1) Vgl. H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 19 (1888), p. 365. Die im Text unter 1)—5) gegebenen Resultate sind dieser Abhandlung entnommen.

2) Diese Ergebnisse verdankt man Saint-Venant, *Paris C. R.*, t. 17 (1843)

Wert

$$w = -W(a^3/B)(8\pi)^{-1}\{(\theta-\pi)^2\sin\theta - 4(\theta-\pi)(1-\cos\theta) - \pi^2\sin\theta\};$$

in dem entsprechenden Punkte der andern Hälfte des Ringes ist die Verschiebung dieselbe.

In diesem Falle können wir zeigen, daß die Beträge, um die der lotrechte Durchmesser sich verlängert und der wagerechte Durchmesser sich verkürzt, halb so groß sind, wie wenn das Gewicht $W$ im tiefsten Punkt konzentriert wäre.

6) Der Stab bilde einen vollständigen Kreisring und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um einen Durchmesser[1]), den wir als $y$-Achse wählen; seine Zentrallinie beschreibt dann eine Umdrehungsfläche, deren Meridiankurve durch die Gleichungen gegeben ist

$$x = a\sin\theta + \tfrac{1}{12}(m\omega^2a^5/B)\sin^3\theta,$$
$$y = a\cos\theta + \tfrac{1}{12}(m\omega^2a^5/B)(1-\cos^3\theta),$$

wo $m$ die Masse des Ringes pro Längeneinheit bezeichnet und $\theta$ von dem Durchmesser aus gemessen ist, um den der Ring rotiert. Die Verkürzung dieses Durchmessers und die Verlängerung des dazu senkrechten Durchmessers haben denselben Betrag $\frac{1}{6}(m\omega^2a^5/B)$.

b) *Biegung eines unvollständigen Kreisringes aus seiner Ebene heraus.*

Wir wählen wie vorhin den Radius des Kreises gleich $a$ und kennzeichnen einen Punkt des letzteren durch den Winkel $\theta$; die Ebene des Kreises sei diejenige Hauptebene des Stabes, für die die Biegungssteifigkeit gleich $B$ ist. Wir betrachten den Fall, wo der Stab durch eine am Ende $\theta = \alpha$ senkrecht zu dieser Ebene angreifende Last $W$ gebogen wird[2]); am Ende $\theta = 0$ sei er so befestigt, daß die Tangente in diesem Punkte und dasjenige transversale Linienelement, das im ungespannten Zustand nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet ist, ihre Richtung beibehalten. Dann verschwinden $u, v, w, \beta, du/d\theta, dv/d\theta$ mit $\theta$.

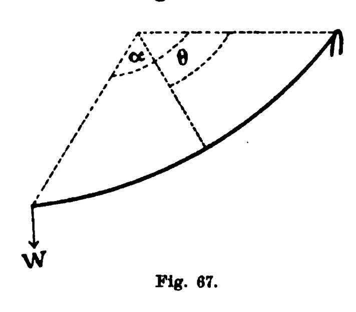


Fig. 67.

Die Spannungsresultanten $N, N', T$ in einem beliebigen Querschnitt sind statisch gleichwertig mit der Kraft $W$, deren Richtung zu der der $y_0$-Achse des Querschnitts parallel ist; wir haben daher

$$N = \beta W, \quad N' = W, \quad T = (W/a)\cdot(dv/d\theta) \qquad (13)$$

1) G. A. V. Peschka, *Zeitschr. Math. Phys.* (*Schlömilch*), Bd. 13 (1868).

2) Das Problem ist behandelt von Saint-Venant, *Paris C. R.*, t. 17 (1843), und von H. Resal, *J. de Math. (Liouville),* (Sér. 3), t. 3 (1877).

Die Momentengleichungen lauten daher

$$\frac{dG}{d\theta} + H = aW, \quad \frac{dG'}{d\theta} = -a\beta W, \quad \frac{dH}{d\theta} - G = 0. \qquad (14)$$

Die erste und dritte derselben ergeben, kombiniert mit der Bedingung, daß $G$ und $H$ für $\theta = \alpha$ verschwinden,

$$G = -aW\sin(\alpha - \theta), \quad H = aW\{1 - \cos(\alpha - \theta)\}. \qquad (15)$$

Nun haben wir

$$G = -\frac{A}{a^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2} - a\beta\right), \quad H = \frac{C}{a^2}\frac{d}{d\theta}(v + a\beta), \qquad (16)$$

und aus diesen Gleichungen und den Grenzbedingungen für $\theta = 0$ können wir folgende Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} v + a\beta &= \frac{Wa^3}{C}\{\theta - \sin\alpha + \sin(\alpha - \theta)\},\\ v &= \frac{Wa^3}{C}\{(\theta - \sin\theta) - \sin\alpha(1 - \cos\theta)\}\\ &\quad + \tfrac{1}{2}Wa^3\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{A}\right)\{\theta\cos(\alpha - \theta) - \sin\theta\cos\alpha\}.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Wir können noch zeigen, daß $u$ und $w$ klein sind von der Ordnung $v^2$.

## § 293. Schwingungen eines Kreisringes.

Wir wollen, um die Anwendung der Theorie der Schwingungen zu illustrieren, die freien Schwingungen eines Stabes betrachten, der im ungespannten Zustand einen Kreisring oder das Stück eines solchen bildet; wir wollen unsere Entwicklungen auf den Fall beschränken, wo der Querschnitt des Ringes selbst kreisförmig ist. Wir bezeichnen den Radius des Querschnitts mit $c$, den des von der Zentrallinie gebildeten Kreises mit $a$ und wählen die Verschiebung $u$ in Richtung des nach dem Mittelpunkt des letzteren gezogenen Radius. Die Bewegungsgleichungen, abgeleitet wie in §§ 278—280, lauten

$$\frac{\partial N}{\partial\theta} + T = ma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N'}{\partial\theta} = ma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} - N = ma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (18)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial\theta} + H - N'a &= -\tfrac{1}{4}c^2m\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial\theta}\\ \frac{\partial G'}{\partial\theta} + Na &= \tfrac{1}{4}c^2m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + w\right)\\ \frac{\partial H}{\partial\theta} - G &= \tfrac{1}{2}c^2ma\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

wo $m$ die Masse des Ringes pro Längeneinheit und

$$\left.\begin{aligned} G = \tfrac{1}{4} E\pi \frac{c^4}{a^2}\left(a\beta - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right), \quad G' = \tfrac{1}{4} E\pi \frac{c^4}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\right), \\ H = \tfrac{1}{2}\mu\pi \frac{c^4}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + a\frac{\partial \beta}{\partial \theta}\right); \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$E$ ist der Youngsche Modul und $\mu$ die Steifigkeit des Materials des Ringes.

Obige Gleichungen mit der Bedingung

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = u \tag{8'}$$

ergeben die Gleichungen der Bewegung.

Offenbar zerlegt sich das obige System von Gleichungen in zwei Gruppen. In der ersten Gruppe verschwinden $v$ und $\beta$, und die Bewegung ist durch die Verschiebung $u$ oder $w$ gekennzeichnet, wobei diese Variabeln durch Gleichung (8) miteinander verknüpft sind; in diesem Falle haben wir Biegungsschwingungen des Ringes in seiner Ebene. In der zweiten Gruppe verschwinden $u$ und $w$, und die Bewegung wird durch $v$ oder $\beta$ gekennzeichnet, sodaß wir Biegungsschwingungen haben, bei denen sowohl Verschiebung senkrecht zur Ringebene wie Drall auftritt.

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß die Schwingungen eines krummen Stabes überhaupt stets in zwei derartige Klassen zerfallen, wenn die Zentrallinie des ungespannten Stabes eine ebene Kurve ist und ihre Ebene für jeden Punkt eine Hauptebene des Stabes ist. Ist dagegen die Zentrallinie eine doppelt gekrümmte Kurve, so ist von einem Zerfallen der Schwingungsarten in zwei Klassen keine Rede, und das Problem gestaltet sich äußerst verwickelt.[1])

a) *Biegungsschwingungen in der Ebene des Ringes.*

Wir vereinfachen die Fragestellung, indem wir „rotatorische Trägheit" vernachlässigen. Dies läuft darauf hinaus, daß wir die rechte Seite der zweiten der Gleichungen (19) streichen. Wir haben dann

$$N = -\frac{E\pi c^4}{4a^3}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \quad T = ma\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial \theta} - \frac{\partial N}{\partial \theta},$$

und

$$\frac{E\pi c^4}{4a^3}\left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = ma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right).$$

Die Normalfunktionen für freie Schwingung bestimmen wir, in-

1) Die Schwingungen eines Stabes, dessen natürliche Form eine Schraubenlinie ist, sind von J. H. Michell, *loc. cit.* p. 509, sowie auch vom Verfasser, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 18 (1899), untersucht worden.

dem wir $w$ in der Form $W \cos(pt + \varepsilon)$ ansetzen, wo $W$ eine Funktion von $\theta$. Wir haben dann die Gleichung

$$\frac{\partial^6 W}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\left(1 - \frac{4ma^4p^2}{E\pi c^4}\right) + \frac{4ma^4p^2}{E\pi c^4}W = 0.$$

Das vollständige Integral ist von der Form

$$W = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=3}(A_\varkappa \cos n_\varkappa\theta + B_\varkappa \sin n_\varkappa\theta),$$

wo $n_1$, $n_2$, $n_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$n^2(n^2-1)^2 = (n^2+1)(4ma^4p^2/E\pi c^4).$$

Handelt es sich um einen Vollring, so muß $n$ eine ganze Zahl sein, und wir erhalten Schwingungen, bei denen $n$ Wellenlängen auf den Umfang entfallen, wo $n$ eine ganze Zahl, die größer ist als eins. Die Schwingungszahl ist dann durch die Gleichung gegeben[1])

$$p^2 = \frac{E\pi c^4}{4ma^4}\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}. \tag{21}$$

Ist der Ring nicht geschlossen, so erhalten wir die Frequenzengleichung, indem wir die Bedingungen dafür aufstellen, daß $N$, $T$, $G'$ an den Enden verschwinden. Das Resultat ist schwer zu deuten, außer in dem Falle, wo die Anfangskrümmung gering ist, wo also der Radius der Zentrallinie groß ist im Vergleich zu ihrer Länge. Die Schwingungszahl ist dann etwas niedriger als bei einem geraden Stabe von gleicher Länge und gleichem Material und Querschnitt.[2])

b) *Biegungsschwingungen senkrecht zur Ebene des Ringes.*

Wir vereinfachen das Problem, indem wir „rotatorische Trägheit" vernachlässigen, also die rechten Seiten der ersten und dritten der Gleichungen (19) streichen; wir wollen annehmen, daß der Ring geschlossen ist. Wir können dann schreiben

$$v = V\cos(n\theta + \alpha)\cos(pt + \varepsilon), \quad \beta = B'\cos(n\theta + \alpha)\cos(pt + \varepsilon),$$

wo $V$, $B'$, $\alpha$, $\varepsilon$ Konstanten und $n$ eine ganze Zahl. Aus der ersten und dritten der Gleichungen (19) und aus der zweiten der Gleichungen (18) erhalten wir die Gleichungen

$$n^2(aB' + n^2V) + \frac{2\mu}{E}n^2(aB' + V) = \frac{4ma^4p^2}{E\pi c^4}V,$$

$$\frac{2\mu}{E}n^2(aB' + V) + (aB' + n^2V) = 0;$$

daraus ergibt sich die Frequenzengleichung[3])

1) Das Resultat verdankt man R. Hoppe, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd. 73 (1871).
2) Die Frage ist sehr ausführlich erörtert von H. Lamb, *loc. cit.* p. 515.
3) Das Resultat verdankt man J. H. Michell, *loc. cit.* p. 509.

$$p^2 = \frac{E\pi c^4}{4 m a^4} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1 + \sigma}, \tag{22}$$

wo $\sigma$ die Poissonsche Konstante des Materials bedeutet und die Beziehung $E = 2\mu(1+\sigma)$ eingeführt ist. Bemerkenswert ist, daß selbst bei der tiefsten Schwingung ($n = 2$) die Frequenz sich wenig von dem Wert unterscheidet, der zu der entsprechenden Biegungsschwingung in der Ebene des Ringes gehört.

c) *Drillungs- und Dehnungsschwingungen.*

Ein krummer Stab besitzt auch Arten freier Schwingung, die den Drillungs- und Dehnungsschwingungen eines geraden Stabes analog sind. Um die Drillungsschwingungen eines Kreisringes zu erhalten, lassen wir $u$ und $w$ verschwinden und nehmen $v$ klein gegen $a\beta$ an; dann sind die zweite der Gleichungen (18) und die erste der Gleichungen (19) näherungsweise befriedigt, und die dritte der Gleichungen (19) lautet angenähert

$$\frac{\mu\pi c^4}{2a^2} \frac{\partial^2 (a\beta)}{\partial \theta^2} - \frac{E\pi c^4}{4a^2} a\beta = \tfrac{1}{2} m c^2 \frac{\partial^2 (a\beta)}{\partial t^2}.$$

Beim Vollring haben wir Schwingungen von diesem Typus, die auf den Umfang $n$ Wellenlängen ergeben, und die Frequenz $p/2\pi$ ist durch die Gleichung gegeben

$$p^2 = \frac{\mu\pi c^2}{m a^2}(1 + \sigma + n^2). \tag{23}$$

Für $n = 0$ lassen sich die Bewegungsgleichungen streng befriedigen, wenn wir $v = 0$ setzen und $\beta$ unabhängig von $\theta$ annehmen. Das Charakteristische an dieser Schwingungsart ist, daß jeder kreisförmige Querschnitt des Kreisringes in seiner Ebene durch denselben kleinen Winkel $\beta$ um die Zentrallinie gedreht wird, während diese Linie selbst nicht verschoben wird.[1])

Um die Dehnungsschwingungen eines Kreisringes zu erhalten, lassen wir $v$ und $\beta$ verschwinden und nehmen an, daß Gleichung (8) nicht gilt. Die Dehnung der Zentrallinie ist dann gleich $a^{-1}(\partial w/\partial\theta - u)$, und die Zugbeanspruchung $T$ ist gleich $E\pi c^2 a^{-1}(\partial w/\partial\theta - u)$. Die Momente $G$, $H$ und die Schubkraft $N'$ verschwinden. Die Ausdrücke für das Moment $G'$ und die Schubkraft $N$ enthalten $c^4$ als Faktor, während $T$ den Faktor $c^2$ enthält. Wir können daher in gewisser Annäherung $G'$ und $N'$ streichen und die rotatorische Trägheit vernachlässigen, die zu der rechten Seite der zweiten der Gleichungen (19) Anlaß gibt. Die von $u$ und $w$ zu erfüllenden Gleichungen sind dann die erste und die dritte der Gleichungen (18), d. h.

$$m a \frac{\partial^2 u}{\partial t^4} = \frac{E\pi c^2}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u\right), \quad m a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E\pi c^2}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

Die Verschiebung bei freien Schwingungen von der Frequenz $p/2\pi$ ist gegeben durch Gleichungen von der Form

---

1) Das Ergebnis, daß die Schwingungsarten, bei denen Verschiebungen $v$ und $\beta$ vorkommen, zwei Typen angehören, fand A. B. Basset, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 23 (1892), und die Frequenz der Drillungsschwingungen wurde von ihm ermittelt.

$$u = (A \sin n\theta + B \cos n\theta) \cos (pt + \varepsilon),$$
$$w = n(A \cos n\theta - B \sin n\theta) \cos (pt + \varepsilon),$$

wo

$$p^2 = \frac{E\pi c^2}{m a^2}(1 + n^2). \tag{24}$$

Für $n = 0$ verschwindet $w$ und $u$ ist unabhängig von $\theta$, und die Bewegungsgleichungen sind streng befriedigt. Der Ring führt radiale Schwingungen aus, sodaß die Zentrallinie einen Kreis von periodisch wechselndem Radius bildet, und die Querschnitte bewegen sich, ohne sich zu drehen.

Die Schwingungsarten, die in diesem Paragraphen unter c) betrachtet wurden, haben eine viel höhere Schwingungszahl wie die unter a) und b) behandelten und würden wahrscheinlich schwer zu erregen sein.

## Kapitel XXII.

# Die Reckung und Biegung von Platten.

### § 294. Kennzeichnung der Spannung in einer Platte.

Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen einer dünnen Platte lassen sich in großer Annäherung mit Hilfe der auf die Gesamtdicke bezogenen Spannungsresultanten und Spannungsmomente ausdrücken. Die Dicke der Platte sei $2h$; in der mitten zwischen den „Seiten" (engl. „faces") liegenden Ebene, der sog. „Mittelebene", wählen wir einen Koordinatenanfang und ein rechtwinkliges $(x, y)$-Achsensystem, die $z$-Achse ziehen wir senkrecht zu dieser Ebene so, daß die $(x, y, z)$-Achsen ein rechtshändiges System bilden. Wir denken uns eine zylindrische Fläche $C$, die die Mittelebene in einer Kurve $s$ schneidet. Der Rand der Platte ist eine solche Fläche $C$, die entsprechende Kurve nennen wir die „Randlinie" (engl. „edge-line"). Was den Richtungssinn der Normalen $\nu$ von $s$ anbetrifft, so führen wir eine feste Verabredung ein, wonach $\nu$, $s$, $z$ den Richtungen eines rechtshändigen Systems parallel sein sollen. Wir betrachten die Wirkung, die derjenige von $C$ begrenzte Teil der Platte, in den $\nu$ hineinzeigt, auf den andern Teil ausübt. Es sei $\delta s$ ein kurzes Stück der Kurve $s$; durch die Endpunkte von $\delta s$ ziehen wir zwei Erzeugende von $C$, die ein kleines Flächenstück $A$ auf $C$ begrenzen. Die auf das Flächenstück $A$ wirkenden Spannungen sind statisch gleichwertig mit einer Kraft im Schwerpunkt von $A$ und einem Kräftepaar. Wir zerlegen diese Kraft und dies Kräftepaar in Komponenten nach den Richtungen $\nu$, $s$, $z$. Mit $[T]$, $[S]$, $[N]$ bezeichnen wir die Komponenten der Kraft, mit $[H]$, $[G]$, $[K]$ die des Kräftepaars. Wenn $\delta s$ unbegrenzt abnimmt, so streben diese Größen dem Grenzwert null zu, und auch der Grenzwert von $[K]/\delta s$ ist null, $[T]/\delta s, \cdots [G]/\delta s$ dagegen können endlich bleiben. Wir bezeichnen die Grenzwerte von $[T]/\delta s, \ldots$ mit $T, \ldots$ Dann sind $T$, $S$, $N$ die Komponenten der zur Linie $s$ gehörenden *Spannungsresultante*, und $H$, $G$ die Komponenten des zu derselben Linie gehörenden *Spannungsmoments*. $T$ ist Zug, $S$ und $N$ sind Schubkräfte, die tangential und normal zur Mittelebene wirken, $G$ ist

ein Biegungsmoment und $H$ ein Drillungsmoment. Ist die Normale $\nu$ von $s$ zur $x$-Achse parallel, so ist $s$ zur $y$-Achse parallel. In diesem Falle geben wir $T, \ldots$ den Index 1. Wenn die Normale $\nu$ zur $y$-Achse parallel ist, so ist $s$ zur negativen Richtung der $x$-Achse parallel. In diesem Falle geben wir $T, \ldots$ den Index 2. Die Verabredungen über den Richtungssinn dieser Kräfte und Momente werden durch Fig. 68 erläutert.

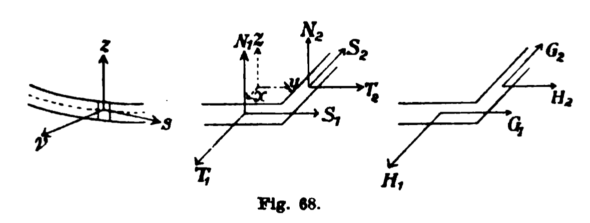


Fig. 68.

Um $T, \ldots$ auszudrücken, führen wir vorübergehend $(x', y', z)$-Achsen ein, die den Richtungen von $\nu$, $s$, $z$ parallel sind, und bezeichnen die auf diese Achsen bezogenen Spannungskomponenten mit $X'_{x'}, \ldots$ Dann haben wir die Formeln[1])

$$T = \int_{-h}^{h} X'_{x'} dz, \quad S = \int_{-h}^{h} X'_{y'} dz, \quad N = \int_{-h}^{h} X'_z dz,$$

$$H = \int_{-h}^{h} - z X'_{y'} dz, \quad G = \int_{-h}^{h} z X'_{x'} dz;$$

in den beiden besonderen Fällen, wo $\nu$ zur $x$-Achse bezw. zur $y$-Achse parallel ist, lauten diese Formeln

$$\left.\begin{aligned} T_1 = \int_{-h}^{h} X_x dz, \quad S_1 = \int_{-h}^{h} X_y dz, \quad N_1 = \int_{-h}^{h} X_z dz, \\ H_1 = \int_{-h}^{h} - z X_y dz, \quad G_1 = \int_{-h}^{h} z X_x dz \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

bezw.

$$\left.\begin{aligned} S_2 = \int_{-h}^{h} - X_y dz, \quad T_2 = \int_{-h}^{h} Y_y dz, \quad N_2 = \int_{-h}^{h} Y_z dz \\ G_2 = \int_{-h}^{h} z Y_y dz, \quad H_2 = \int_{-h}^{h} z X_y dz. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir bemerken, daß nach diesen Formeln

$$S_2 = - S_1, \quad H_2 = - H_1. \tag{3}$$

1) Es ist angenommen, daß die Platte nur schwach gebogen wird. Vgl. § 328 in Kap. XXIV.

## § 295. Transformation der Spannungsresultanten und der Spannungsmomente.

Wenn die Normale $\nu$ der Kurve $s$ mit der $x$- und der $y$-Achse die Winkel $\theta$ und $\frac{1}{2}\pi - \theta$ einschließt, so berechnen sich $T, S, \ldots$ aus Formeln wie

$$T = \int_{-h}^{h} X'_{x'} dz,$$

in denen die Spannungskomponenten $X'_{x'}, \ldots$ aus den Formeln (9) von § 49 für

$$l_1 = \cos\theta, \quad m_1 = \sin\theta, \quad l_2 = -\sin\theta, \quad m_2 = \cos\theta,$$
$$n_1 = n_2 = l_3 = m_3 = 0, \quad n_3 = 1$$

folgen. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} T &= T_1 \cos^2\theta + T_2 \sin^2\theta + S_1 \sin 2\theta, \\ S &= \tfrac{1}{2}(T_2 - T_1)\sin 2\theta + S_1 \cos 2\theta, \\ N &= N_1 \cos\theta + N_2 \sin\theta, \\ G &= G_1 \cos^2\theta + G_2 \sin^2\theta - H_1 \sin 2\theta, \\ H &= \tfrac{1}{2}(G_1 - G_2)\sin 2\theta + H_1 \cos 2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Statt die zur Linie $s$ gehörenden Spannungsresultanten und Spannungsmomente nach den Richtungen $\nu, s, z$ zu zerlegen, könnten wir sie auch nach den Richtungen $x, y, z$ zerlegen. Die Komponenten der Spannungsresultante würden sein:

$$\left.\begin{aligned} &\text{parallel zu } x\text{:} \quad T\cos\theta - S\sin\theta, \text{ oder } T_1\cos\theta + S_1\sin\theta, \\ &\text{parallel zu } y\text{:} \quad T\sin\theta + S\cos\theta, \text{ oder } T_2\sin\theta + S_1\cos\theta, \\ &\text{parallel zu } z\text{:} \quad N_1\cos\theta + N_2\sin\theta; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

diejenigen des Kräftepaars würden sein:

$$\left.\begin{aligned} &\text{um eine Achse in der } x\text{-Richtung:} \quad H\cos\theta - G\sin\theta, \text{ oder} \\ &\qquad\qquad H_1\cos\theta - G_2\sin\theta, \\ &\text{um eine Achse in der } y\text{-Richtung:} \quad H\sin\theta + G\cos\theta, \text{ oder} \\ &\qquad\qquad G_1\cos\theta - H_1\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

## § 296. Gleichungen des Gleichgewichts.

Es bezeichne $C$ wie vorhin eine zylindrische Fläche, die die Mittelebene rechtwinklig in einer Kurve $s$ durchsetzt; letztere stelle eine einfache geschlossene Berandung dar. Die äußeren Kräfte, die auf den von $C$ umgrenzten Teil der Platte wirken, mögen sich aus Massenkräften und Oberflächenspannungen auf die Seiten ($z = h$ und $z = -h$) der Platte zusammensetzen. Diese äußeren Kräfte sind

statisch gleichwertig mit einer Einzelkraft, die im Schwerpunkt $P$ des innerhalb $C$ liegenden Volumens angreift, und einem Kräftepaar. Wir bezeichnen mit $[X']$, $[Y']$, $[Z']$ die Komponenten der Kraft in Richtung der $(x, y, z)$-Achsen und $[L']$, $[M']$, $[N']$ die Komponenten des Kräftepaars um dieselben Achsen. Lassen wir das von der Kurve $s$ umgrenzte Flächenstück $\omega$ unbegrenzt abnehmen, indem wir $s$ auf $P$ zusammenziehen, so sind die Grenzwerte von $[X'], \ldots [L'], \ldots$ null, und der Grenzwert von $[N']/\omega$ ist ebenfalls null, aber die Grenzwerte von $[X']/\omega, \ldots$ können endlich sein. Wir bezeichnen die Grenzwerte von $[X']/\omega, \ldots$ mit $X', \ldots$ Dann sind $X'$, $Y'$, $Z'$ die Komponenten der Kraftresultanten der äußeren Kräfte, bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelebene, und $L'$, $M'$ sind die entsprechend gemessenen Komponenten des resultierenden Moments.

Die auf die Masseneinheit bezogene Massenkraft bezeichnen wir wie gewöhnlich mit $(X, Y, Z)$ und die Dichte mit $\varrho$. Die Definition von $X'$, $Y'$, $Z'$, $M'$, $N'$ drückt sich analytisch durch folgende Formeln aus

$$\left.\begin{aligned} X' &= \int_{-h}^{h} \varrho X dz + (X_z)_{z=h} - (X_z)_{z=-h}, \\ Y' &= \int_{-h}^{h} \varrho Y dz + (Y_z)_{z=h} - (Y_z)_{z=-h}, \\ Z' &= \int_{-h}^{h} \varrho Z dz + (Z_z)_{z=h} - (Z_z)_{z=-h}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} L' &= \int_{-h}^{h} - z\varrho Y dz - h\{(Y_z)_{z=h} + (Y_z)_{z=-h}\}, \\ M' &= \int_{-h}^{h} z\varrho X dz + h\{(X_z)_{z=h} + (X_z)_{z=-h}\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Resultanten und resultierenden Momente aller Kräfte, die auf den von der zylindrischen Fläche $C$ umgrenzten Teil der Platte wirken, setzen wir gleich null. Aus den Formeln (5) erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \int (T_1 \cos\theta + S_1 \sin\theta) ds + \iint X' dx dy = 0, \\ \int (T_2 \sin\theta + S_1 \cos\theta) ds + \iint Y' dx dy = 0, \\ \int (N_1 \cos\theta + N_2 \sin\theta) ds + \iint Z' dx dy = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo die Oberflächenintegrale über das von $s$ begrenzte Flächenstück und die Kurvenintegrale längs $s$ erstreckt sind. Aus den Formeln (5)

und (6) ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\int\{(H_1\cos\theta - G_2\sin\theta) + y(N_1\cos\theta + N_2\sin\theta)\}ds \\
&\qquad\qquad + \iint (L' + yZ')dx\,dy = 0, \\
&\int\{(G_1\cos\theta - H_1\sin\theta) - x(N_1\cos\theta + N_2\sin\theta)\}ds \\
&\qquad\qquad + \iint (M' - xZ')dx\,dy = 0, \\
&\int\{x(T_2\sin\theta + S_1\cos\theta) - y(T_1\cos\theta + S_1\sin\theta)\}ds \\
&\qquad\qquad + \iint (xY' - yX')dx\,dy = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Da $\cos\theta$ und $\sin\theta$ die Richtungskosinus der Normalen von $s$, bezogen auf die $x$- und die $y$-Achse, so können wir die Kurvenintegrale in Flächenintegrale verwandeln. Wir erhalten so aus (9) drei Gleichungen, die in jedem Punkt der Mittelebene gelten, nämlich

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} + X' = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + Y' = 0, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z' = 0. \quad (11)$$

Ebenso transformieren wir die Gleichungen (10) und führen die durch die Gleichungen (11) sich ergebenden Vereinfachungen ein. Die dritte Gleichung ist identisch erfüllt. Wir erhalten so zwei Gleichungen, die in jedem Punkte der Mittelebene gelten, nämlich

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial G_2}{\partial y} + N_2 + L' = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} - N_1 + M' = 0. \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) stellen die Gleichgewichtsgleichungen der Platte dar.

## § 297. Randbedingungen.

In einer von gegebenen Kräften beanspruchten dicken Platte haben die durch $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ gekennzeichneten Spannungen (unter $\nu$ die Normale des Randes verstanden) in jedem Punkte des Randes vorgeschriebene Werte. Handelt es sich um eine dünne Platte, so ist die tatsächliche Verteilung der Spannungen über den als Zylinderfläche angesehenen Rand praktisch belanglos. Wir stellen deshalb die am Rande angreifenden Spannungen dar durch ihre Resultanten und resultierenden Momente pro Längeneinheit der Randlinie, d. h. der Kurve, in welcher der Rand die Mittelfläche durchsetzt. Aus dem Saint-Venantschen Prinzip (§ 89) folgt, daß in einiger Entfernung vom Rande die Wirkungen zweier Spannungssysteme, die dieselben (wie oben gerechneten) Resultanten und resultierenden Momente liefern, praktisch einander gleich sind. Diese Resultanten und Momente mögen durch die Komponenten T, S, N und H, G, die in dem Sinne wie früher $T$, $S$, $N$ und $H$, $G$ genommen sind, festgelegt sein; die Nor-

male der Randlinie ist dabei als nach außen gerichtet gedacht. Nun mögen die Resultanten und resultierenden Momente, die einer zur Randlinie parallelen, aber nicht gerade benachbarten Kurve entsprechen, den früheren Festsetzungen gemäß berechnet werden, wobei die Normale dieser Kurve gegen die Randlinie gerichtet sei; man bilde die Grenzwerte dieser Größen, die sich ergeben, wenn man die parallele Kurve mit der Randlinie zusammenfallen läßt. Diese Grenzwerte seien $\bar{T}, \bar{S}, \bar{N}$ und $\bar{H}, \bar{G}$. Sehr wichtig ist nun die Bemerkung, daß die statische Gleichwertigkeit der angreifenden Kräfte mit den Spannungsresultanten und Spannungsmomenten am Rande keineswegs verlangt, daß die folgenden Gleichungen sämtlich erfüllt sind:

$$\bar{T} = \mathrm{T}, \quad \bar{S} = \mathrm{S}, \quad \bar{N} = \mathrm{N}, \quad \bar{H} = \mathrm{H}, \quad \bar{G} = \mathrm{G}.$$

Diese fünf Gleichungen decken sich mit den von Poisson[1]) angenommenen Randbedingungen. Zu einem System von vier Randbedingungen gelangte später Kirchhoff[2]), der von einer speziellen Annahme über die Natur der Verzerrung im Innern der Platte ausging und das Verfahren der Variation der Energiefunktion anwendete. Die Bedeutung der Zurückführung der Zahl der Bedingungen von fünf auf vier wurde zuerst von Kelvin und Tait[3]) klargestellt. Sie beruht auf dem Umstande, daß die Art der Verteilung der das Drillungsmoment ergebenden Spannungen am Rande unwesentlich ist. Das auf ein endliches Randstück wirkende Moment würde sich aus Spannungen, die zur Mittelebene senkrecht sind, ableiten lassen, und diese würden, auf Resultanten und resultierende Momente pro Längeneinheit der Randlinie zurückgeführt, gleichwertig sein mit einer Verteilung von Schubkräften vom Typus N (an Stelle der Drillungsmomente vom Typus H). Die erforderlichen Schubkräfte sind, wie sich leicht ergibt, gleich $-\partial \mathrm{H}/\partial s$. Zu diesem Resultat gelangt man mit Hilfe des folgenden Satzes der Statik: Sind längs einer ebenen geschlossenen Kurve $s$ Kräftepaare vom Betrage $H$ pro Längeneinheit verteilt, so zwar, daß in jedem Punkte die Achse des Kräftepaares normal zur Kurve ist, so ist diese Verteilung statisch gleichwertig mit längs der Kurve verteilten Kräften vom Betrage $-\partial H/\partial s$, deren Richtung in jedem Punkte zur Ebene der Kurve senkrecht ist.

Man beweist den Satz ohne weiteres, indem man die Resultante und das resultierende Moment der Kraftverteilung $-\partial H/\partial s$ bildet. Da die $z$-Achse zur Ebene der Kurve senkrecht steht, so ist die Kraft in jedem Punkte zur $z$-Achse parallel, und die Kraftresultante drückt sich aus durch

1) Siehe *Einleitung,* Fußnote 36. Die Lösungen, die Poisson für spezielle Probleme gibt, bleiben richtig, weil bei allen diesen $\bar{H}$ verschwindet.

2) Siehe *Einleitung,* Fußnote 125.

3) *Nat. Phil.,* 1. Aufl., 1867. Dieselbe Erklärung gab J. Boussinesq im Jahre 1871. Siehe *Einleitung,* Fußnote 128.

das die geschlossene Kurve entlang erstreckte Integral $\int -\frac{\partial H}{\partial s}ds$. Dies Integral verschwindet. Die Komponenten des resultierenden Moments um die $x$- und die $y$-Achse drücken sich durch die längs der Kurve erstreckten Integrale $\int -y\frac{\partial H}{\partial s}ds$ und $\int x\frac{\partial H}{\partial s}ds$ aus. Bezeichnet $\nu$ die Richtung der Normalen der Kurve, so haben wir

$$\int -y\frac{\partial H}{\partial s}ds = \int H\frac{\partial y}{\partial s}ds = \int H\cos(x,\nu)ds,$$

und

$$\int x\frac{\partial H}{\partial s}ds = \int -H\frac{\partial x}{\partial s}ds = \int H\cos(y,\nu)ds,$$

wo die Integrationen die Kurve entlang erstreckt sind. Die Ausdrücke $\int H\cos(x,\nu)ds$ und $\int H\cos(y,\nu)ds$ sind die Werte der Komponenten des resultierenden Moments der Kräftepaar-Verteilung $H$.

Der Satz möge an einer Figur erläutert werden. Wir denken uns die Kurve $s$ als ein Polygon von großer Seitenzahl. Das Kräftepaar $H\delta s$, das zu einer Seite von der Länge $\delta s$ gehört, ist statisch gleichwertig mit zwei Kräften je vom Betrage $H$, die an den Enden der Seite senkrecht zur Ebene der Kurve in entgegengesetzter Richtung angreifen. Die zu den anstoßenden Seiten gehörenden Momente lassen sich in ähnlicher Weise durch Paare von Kräften vom Betrage $H + \delta H$ bezw. $H - \delta H$ ersetzen, wo $\delta H$ soviel wie $(\partial H/\partial s)\delta s$ (Fig. 69). Insgesamt behalten wir schließlich eine Kraft $-\delta H$ an dem einen Ende jeder Seite von der Länge $\delta s$ übrig, in der Grenze also eine Kraftverteilung $-\partial H/\partial s$.

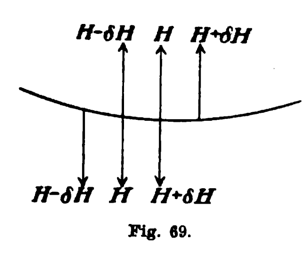



Fig. 69.

Wie aus diesem Satze folgt, kann bei Aufstellung der Gleichungen des Gleichgewichts eines beliebigen Teils der Platte, der von einer zylindrischen, die Mittelfläche in einer Kurve $s$ senkrecht durchsetzenden Fläche umgrenzt wird, das Drillungsmoment $H$ außer Acht gelassen werden, vorausgesetzt, daß die Schubspannungsresultante $N$ durch $N - \partial H/\partial s$ ersetzt wird.[1]) Die Randbedingungen stellen nun Grenzformen der Gleichgewichtsgleichungen für gewisse schmale

1) Dies Resultat könnte man bei Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen (11) und (12) benutzen. Die Kurvenintegrale in der letzten der Gleichungen (9) und in der ersten der Gleichungen (10) würden lauten

$$\int\left(N - \frac{\partial H}{\partial s}\right)ds, \qquad \int\left\{-G\sin\theta + y\left(N - \frac{\partial H}{\partial s}\right)\right\}ds,$$
$$\int\left\{G\cos\theta - x\left(N - \frac{\partial H}{\partial s}\right)\right\}ds;$$

daraus würden wir leicht die in (9) und (10) gegebenen Formen erhalten.

Streifen der Platte dar; die Kontur, in der die Umgrenzung eines solchen Streifens die Mittelebene schneidet, besteht aus einem kurzen Bogenstück der Randlinie, den beiden Normalen dieser Kurve in den Endpunkten desselben und dem Bogenstück, das auf einer zur Randlinie parallelen Kurve von diesen Normalen abgegrenzt wird. Wir gehen zur Grenze über, indem wir zunächst die Parallelkurve mit der Randlinie zusammenfallen lassen und dann das betreffende Bogenstück der Randlinie unbegrenzt abnehmen lassen. Dem obigen Satze gemäß haben wir die gesuchten Gleichungen so zu bilden, daß wir $\overline{H}$ und H fortlassen und $\overline{N}$ und N durch $\overline{N}-\partial\overline{H}/\partial s$ und $\mathrm{N}-\partial\mathrm{H}/\partial s$ ersetzen. Dann ergibt sich, daß die Randbedingungen folgendermaßen lauten:

$$\overline{T}=\mathrm{T},\quad \overline{S}=\mathrm{S},\quad \overline{N}-\partial\overline{H}/\partial s=\mathrm{N}-\partial\mathrm{H}/\partial s,\quad \overline{G}=\mathrm{G}.$$

Diese vier Gleichungen decken sich mit den von Kirchhoff angenommenen Randbedingungen.

Bei Untersuchung der Randbedingungen nach dem eben angedeuteten Verfahren bemerken wir, daß die Anteile, die die Massenkräfte und die Spannungen auf die Plattenseiten zu den Gleichgewichtsgleichungen geben, nicht nur selbst in der Grenze verschwinden, sondern daß auch diese dividiert durch das zur Kontur des Streifens gehörende kurze Bogenstück der Randlinie in der Grenze, wo die Länge desselben unbegrenzt abnimmt, verschwinden. Bezeichnen wir das Bogenstück mit $\delta s$, so haben wir die Gleichungen vom Typus

$$\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\iint X'\,dx\,dy=0,\quad \lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\iint(L'+yZ')\,dx\,dy=0,$$

wo die Integration über das von der Kontur des Streifens begrenzte Flächenstück erstreckt ist. Die Gleichgewichtsgleichungen des Streifens führen daher auf folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\int(T\cos\theta-S\sin\theta)\,ds=0,\\
&\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\int(T\sin\theta+S\cos\theta)\,ds=0,\\
&\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\int\left(N-\frac{\partial H}{\partial s}\right)ds=0,\\
&\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\int\left\{-G\sin\theta+y\left(N-\frac{\partial H}{\partial s}\right)\right\}ds=0,\\
&\lim_{\delta s=0}(\delta s)^{-1}\int\left\{G\cos\theta-x\left(N-\frac{\partial H}{\partial s}\right)\right\}ds=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

wo die Integrationen sämtlich die Kontur des Streifens entlang erstreckt sind und $T,\ldots$ die den Verabredungen von § 294 entsprechend gerechneten Resultanten und resultierenden Momente der Spannungen auf die Ränder des Streifens bezeichnen. Wir bestimmen die Anteile, die die vier Linien, in denen die Ränder des Streifens die Mittelebene schneiden, zu

den einzelnen Kurvenintegralen ergeben. Da die Parallelkurve mit der Randlinie in der Grenze zusammenfällt, so liefern die beiden kurzen Normalenstücke in der Grenze verschwindende Anteile; wir haben also nur die Anteile der Stücke der Randlinie und der Parallelkurve auszuwerten. Es bezeichne $\nu_0$ die Richtung der nach außen gezogenen Normalen der Randlinie. Die Anteile des der letzteren angehörenden Bogenstücks sind

$$\{\mathrm{T}\cos(x,\nu_0)-\mathrm{S}\cos(y,\nu_0)\}\,\delta s,\quad \{\mathrm{T}\cos(y,\nu_0)+\mathrm{S}\cos(x,\nu_0)\}\,\delta s,$$
$$\left\{\mathrm{N}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s}\right\}\delta s,$$

und

$$\left\{-\mathrm{G}\cos(y,\nu_0)+y\left(\mathrm{N}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}\right)\right\}\delta s,\quad \left\{\mathrm{G}\cos(x,\nu_0)-x\left(\mathrm{N}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}\right)\right\}\delta s.$$

Bei Berechnung der Anteile des Bogenstücks der Parallelkurve bemerken wir, daß nach den Verabredungen, die für die Messung der zu dieser Kurve gehörenden $T, \ldots$ in Betracht kommen, die Normale der Kurve im entgegensetzten Sinne wie $\nu_0$ zu ziehen ist und die Kurve selbst im entgegengesetzten Sinne wie die Randlinie zu durchlaufen ist; doch hat das Bogenstück der Kurve, über das wir integrieren, dieselbe Länge $\delta s$ wie das Stück der Randlinie. In der Grenze, wo die Parallelkurve mit der Randlinie zusammenfällt, haben wir diesen Verabredungen gemäß

$$T=T,\quad S=\bar S,\quad N=-\bar N,\quad G=\bar G,\quad H=\bar H,\quad \partial H/\partial s=-\partial\bar H/\partial s$$

und

$$\cos\theta=-\cos(x,\nu_0),\quad \sin\theta=-\cos(y,\nu_0).$$

Die Anteile des Stückes der Parallelkurve sind daher

$$\{-\bar T\cos(x,\nu_0)+\bar S\cos(y,\nu_0)\}\,\delta s,\quad \{-T\cos(y,\nu_0)-\bar S\cos(x,\nu_0)\}\,\delta s,$$
$$\left\{-\bar N+\frac{\partial\bar H}{\partial s}\right\}\delta s,$$

und

$$\left\{\bar G\cos(y,\nu_0)+y\left(-\bar N+\frac{\partial\bar H}{\partial s}\right)\right\}\delta s,\quad \left\{-\bar G\cos(x,\nu_0)-x\left(-\bar N+\frac{\partial\bar H}{\partial s}\right)\right\}\delta s.$$

Addieren wir die Anteile der beiden Bogenstücke, dividieren durch $\delta s$ und setzen die erhaltenen Ausdrücke gleich null, so erhalten wir die Randbedingungen in der oben aufgestellten Form.

Im allgemeinen werden wir nun die Striche über den Buchstaben $T, \ldots$ fortlassen und die Randbedingungen für einen Rand, an dem gegebene Kräfte angreifen, in folgender Form schreiben:

$$T=\mathrm{T},\quad S=\mathrm{S},\quad N-\frac{\partial H}{\partial s}=\mathrm{N}-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s},\quad G=\mathrm{G}. \tag{14}$$

An einem freien Rande verschwinden $T$, $S$, $N-\partial H/\partial s$, $G$. An einem „gestützten" Rande verschwindet die Verschiebung w eines Punktes der Mittelebene senkrecht zu dieser Ebene, und außerdem verschwinden $T$, $S$, $G$. An einem eingeklemmten Rande, an dem die Neigung der Mittelebene unveränderlich gegeben ist, verschwindet die

Verschiebung (u, v, w) eines Punktes der Mittelebene, ebenso verschwindet $\partial w/\partial \nu$, wo $\nu$ die Richtung der Normalen des Randes bezeichnet.

Der Einfluß der Art und Weise, in der das Drillungsmoment angebracht ist, möge noch durch eine strenge Lösung der Gleichungen des Gleichgewichts isotroper Körper erläutert werden.[1] Die Randlinie sei das durch $x = \pm a$, $y = \pm b$ gegebene Rechteck. Die Platte stellt dann den Grenzfall eines dünnen rechteckigen Stabes dar. Wenn ein solcher Stab durch entgegengesetzte Momente um die $x$-Achse gedrillt wird, sodaß der entstehende Drall gleich $\tau$ ist, so ist die Verschiebung, wie wir aus § 221, c) wissen, gegeben durch

$$u = -\tau y z + \tau \frac{2^5 h^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi y}{2h} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2h}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2h}},$$

$$v = -\tau x z, \quad w = \tau x y,$$

vorausgesetzt daß die Spannungen, die das Drillungsmoment erzeugen, sich durch folgende Formeln ausdrücken:

$$X_y = -2\mu\tau z + \mu\tau \frac{2^4 h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\cosh \frac{(2n+1)\pi y}{2h} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2h}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2h}},$$

$$X_z = \mu\tau \frac{2^4 h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\sinh \frac{(2n+1)\pi y}{2h} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2h}}{\cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2h}}.$$

Auf die Seiten $z = \pm h$ und auf die Kanten $y = \pm b$ wirken keine Spannungen. Das gesamte, an der Kante $x = a$ angreifende Drillungsmoment ist gleich

$$\frac{16}{3} \mu\tau h^3 b - \mu\tau h^4 \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2h};$$

die Hälfte desselben rührt her von den Spannungen $X_y$, die parallel zur Mittelfläche wirken, und die andere Hälfte von den zur Mittelebene senkrechten Spannungen $X_z$.

Wenn die Platte sehr dünn ist, so ist das gesamte Drillungsmoment annähernd gleich $\frac{16}{3}\mu\tau h^3 b$, sodaß das durchschnittliche Drillungsmoment pro Längeneinheit der Kanten $x = \pm a$ annähernd gleich $\frac{8}{3}\mu\tau h^3$ ist. In jedem Punkte, der nicht gerade in der Nähe einer Kante $y = \pm b$ liegt, drückt sich der Zustand der Platte näherungsweise durch die Gleichungen aus

$$u = -\tau y z, \quad v = -\tau z x, \quad w = \tau x y.$$

Die Spannung $X_y$ ist in allen Punkten, die nicht zu nahe an den Kanten $y = \pm b$ liegen, ungefähr gleich $-2\mu\tau z$, und die Spannung $X_z$

1) Kelvin und Tait, *Nat. Phil.*, Teil II, p. 267f.

ist in allen diesen Punkten sehr klein. Die Spannungsverteilung längs der Kante $x = a$ ist nahezu gleichwertig mit einem konstanten, mit $H_1$ zu bezeichnenden Drillungsmoment vom Betrage $\frac{4}{3}\mu\tau h^3$ und gewissen Schubspannungsresultanten $N_1$, deren Werte nur in der Nähe der Ecken ($x = a$, $y = \pm b$) merklich von null abweichen und die zwei Kräften in den Ecken vom Betrage $\frac{4}{3}\mu\tau h^3$ äquivalent sind. In einem Abstande von den freien Kanten $y = \pm b$, der den drei- oder vierfachen Betrag der Plattendicke übersteigt, läßt sich die Spannung praktisch dadurch ausdrücken, daß man der Spannungskomponente $X_y$ den Wert $-2\mu\tau z$ und den übrigen Spannungskomponenten den Wert null beilegt. Mit dem größten Teil der Platte verhält es sich praktisch gerade so, wie wenn Drillungsmomente vom Betrage $H_1 = \frac{4}{3}\mu\tau h^3$ in allen Punkten der Kanten $x = \pm a$ und solche vom Betrage $H_2 = \frac{4}{3}\mu\tau h^3$ in allen Punkten der Kanten $y = \pm b$ angriffen. Die Kräfte in den Ecken lassen sich also durch eine statisch gleichwertige Verteilung von Drillungsmomenten längs der freien Kanten ersetzen, ohne daß der Zustand der Platte, abgesehen von einem schmalen Bereich an diesen Kanten, merklich geändert wird.

Innerhalb dieses Bereichs nimmt der aus der strengen Lösung berechnete Wert des Drillungsmoments $H_2$, das zu irgend einer Linie $y =$ const. gehört, bei Annäherung an die Kante rasch ab, und zwar von $-\frac{4}{3}\mu\tau h^3$ bis auf null. Die rasche Abnahme von $H_2$ ist, wie nach der zweiten der Gleichungen (12) zu erwarten, von großen Werten von $N_1$ begleitet. Wenn wir $N_1$ über die Breite des Bereichs integrieren, d. h. wenn wir das Integral $\int N_1 dy$ bilden längs einer Strecke, die, von der Kante $y = b$ bezw. $y = -b$ ausgehend, zu dieser senkrecht verläuft und deren Länge gleich dem vierfachen Betrage der Plattendicke ist, so finden wir, daß der Wert des Integrals ziemlich genau gleich $\pm\frac{4}{3}\mu\tau h^3$ ist.

Diese Bemerkung macht verständlich, warum (bei Ableitung der Gleichungen (14)) die dritte der Gleichungen (13), also

$$\lim_{\delta s = 0} (\delta s)^{-1} \int \left(N - \frac{\partial H}{\partial s}\right) ds = 0,$$

wo die Integration in der dargelegten Weise die Kontur eines „Streifens“ entlang erstreckt ist, nicht durch die Gleichung $\lim_{\delta s = 0} (\delta s)^{-1} \int N ds = 0$ ersetzt werden darf, und ebenfalls, warum die letztere Gleichung nicht zu dem Ergebnis $\bar{\bar{N}} = \text{N}$ führt. Wenn $\bar{\bar{N}}$, $\bar{\bar{H}}$ aus dem Verzerrungszustand berechnet werden, der in einiger Entfernung vom Rande zutrifft, und die Gleichungen (14) nach dem oben geschilderten Verfahren abgeleitet werden, so ist vorausgesetzt, daß es in den Resultaten keinen wesentlichen Unterschied ausmacht, ob die linearen Abmessungen des Streifens unbegrenzt abnehmend oder über dem drei- oder vierfachen Betrage der Plattendicke bleibend gedacht werden. Wenn die Abmessungen des Streifens von dieser Größenordnung sind, so brauchen die Anteile, die die zur Randlinie normalen Stücke der Kontur zum Integral $\int N ds$ beitragen, nicht immer vernachlässigbar zu sein; sind sie es nicht, so werden ihnen jedoch die An-

teile, die dieselben Stücke der Kontur zum Integral $\int -(\partial H/\partial s)ds$ liefern, praktisch das Gleichgewicht halten.[1])

## § 298. Beziehung zwischen den Biegungsmomenten und der Krümmung.

In § 90 fanden wir eine partikuläre Lösung der Gleichungen des Gleichgewichts eines isotropen elastischen festen Körpers, die die Deformation einer Platte darstellt, die durch Momente an ihren Rändern schwach gebogen wird. Um das Resultat, das wir damals erhielten, in den Bezeichnungen von § 294 auszudrücken, verfahren wir folgendermaßen: Auf der Fläche, zu der die Mittelebene gebogen wird, ziehen wir in einem beliebigen Punkte die Haupttangenten. Wir bezeichnen mit $s_1$, $s_2$ die Richtungen dieser Geraden auf der unverzerrten Mittelebene, mit $R_1$, $R_2$ die Krümmungsradien, die den durch sie gelegten Normalschnitten der Fläche entsprechen, mit $G_1'$, $G_2'$ die Biegungsmomente, die zu ebenen Schnitten der Platte gehören, welche zur Mittelfläche und bezüglich zu den Linien $s_1$, $s_2$ normal sind. Den Drehungssinn dieser Momente bestimmen wir nach den in § 294 getroffenen Festsetzungen in derselben Weise, wie wenn $s_1$, $s_2$, $z$ den Achsen eines rechtshändigen Systems parallel wären. Wenn dann die Platte so gebogen ist, daß $R_1$, $R_2$ konstant und die Richtungen $s_1$, $s_2$ fest sind, so verschwinden nach § 90 die Spannungsresultanten und die Drillungsmomente, die zu den Hauptschnittebenen gehören, und die Biegungsmomente $G_1'$, $G_2'$, die diesen Ebenen entsprechen, sind durch die Gleichungen gegeben

$$G_1' = -D(1/R_1 + \sigma/R_2), \quad G_2' = -D(1/R_2 + \sigma/R_1), \tag{15}$$

wo bei den üblichen Bezeichnungen für die elastischen Konstanten

$$D = \tfrac{2}{3}Eh^3/(1-\sigma^2) = \tfrac{8}{3}\mu h^3(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu). \tag{16}$$

Die Konstante $D$ heißt die „Biegungssteifigkeit“ (engl. „flexural rigidity“) der Platte.

Nun schließe die Richtung $s_1$ mit der $x$- und der $y$-Achse die Winkel $\Phi$ und $\frac{1}{2}\pi - \Phi$ ein. Dann sind $G_1$, $G_2$, $H_1$ gemäß (4) durch folgende Gleichungen gegeben:

$$G_1 \cos^2\Phi + G_2 \sin^2\Phi - H_1 \sin 2\Phi = -D(1/R_1 + \sigma/R_2),$$

$$G_1 \sin^2\Phi + G_2 \cos^2\Phi + H_1 \sin 2\Phi = -D(1/R_2 + \sigma/R_1),$$

$$\tfrac{1}{2}(G_1 - G_2)\sin 2\Phi + H_1 \cos 2\Phi = 0;$$

aus ihnen erhalten wir

1) Vgl. H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 21 (1891), p. 70.

$$G_1 = -D\left[\frac{\cos^2\Phi}{R_1} + \frac{\sin^2\Phi}{R_2} + \sigma\left(\frac{\sin^2\Phi}{R_1} + \frac{\cos^2\Phi}{R_2}\right)\right],$$

$$G_2 = -D\left[\frac{\sin^2\Phi}{R_1} + \frac{\cos^2\Phi}{R_2} + \sigma\left(\frac{\cos^2\Phi}{R_1} + \frac{\sin^2\Phi}{R_2}\right)\right],$$

$$H_1 = \tfrac{1}{2}D(1-\sigma)\sin 2\Phi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Sei andererseits w die Verschiebung eines Punktes der Mittelebene in Richtung der Normalen dieser Ebene; wir schreiben

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{17}$$

Dann ist die Indikatrix der Fläche, zu der die Mittelebene gebogen wird, mit hinreichender Annäherung durch die Gleichung

$$\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2 + 2\tau xy = \text{const.}$$

gegeben; transformieren wir die links stehende Form auf Koordinaten $\xi$, $\eta$, deren Achsen in die Richtung der Linien $s_1$, $s_2$ fallen, so geht sie über in

$$\xi^2/R_1 + \eta^2/R_2.$$

Somit haben wir die Gleichungen

$$\varkappa_1 = \frac{\cos^2\Phi}{R_1} + \frac{\sin^2\Phi}{R_2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\sin^2\Phi}{R_1} + \frac{\cos^2\Phi}{R_2}, \quad 2\tau = \sin 2\Phi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

und die Formeln für $G_1$, $G_2$, $H$ werden

$$G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \quad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1), \quad H_1 = D(1-\sigma)\tau. \tag{18}$$

Wir werden zeigen, daß die Formeln (18), in denen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ durch (17) und $D$ durch (16) gegeben ist, bei einer sehr großen Klasse von Problemen entweder richtige oder annähernd richtige Werte für die Spannungsmomente liefern. Hier bemerken wir, daß sie gleichwertig sind mit der Aussage, daß die Biegungsmomente, die zu den beiden Hauptschnitten in einem Punkte gehören, durch die Formeln (15) in den entsprechenden Hauptkrümmungsradien ausgedrückt sind und daß die Drillungsmomente, die zu diesen Hauptschnitten gehören, verschwinden.

Bezeichnet $s$ die Richtung der Tangente einer beliebigen, auf der Mittelebene gezeichneten Kurve und $\nu$ die Richtung der Normalen dieser Kurve, bedeutet ferner $\theta$ den Winkel zwischen den Richtungen $\nu$, $x$, so erhalten wir, wenn wir (17) und (18) in (4) einführen, die Gleichungen

$$G = -D\left[\cos^2\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + (1-\sigma)\sin 2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]$$

$$H = D(1-\sigma)\left[\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right].$$

Wir können die Beziehung auf feste $(x, y)$ Achsen vermeiden[1]), wenn wir diese Gleichungen mittels folgender Formeln umformen

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 1, § 216.

$$\frac{\partial}{\partial s} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1}{\varrho'}, \tag{19}$$

wo $\varrho$ der Krümmungsradius der in Rede stehenden Kurve. Wir finden

$$G = -D\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial w}{\partial\nu}\right)\right\}, \quad H = D(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right). \tag{20}$$

Diese Gleichungen gelten stets, wenn die Spannungsmomente sich durch die Formeln (18) ausdrücken.

Bei dem Problem von § 90 fanden wir für die potentielle Energie der Platte pro Flächeneinheit der Mittelebene den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}D\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 - 2(1-\sigma)\frac{1}{R_1 R_2}\right],$$

in den jetzigen Bezeichnungen

$$\tfrac{1}{2}D[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2)]. \tag{21}$$

Wir werden sehen, daß diese Formel für eine große Klasse von Problemen richtig bezw. annähernd richtig bleibt.

## § 299. Verfahren zur Bestimmung der Spannung in einer Platte.[1])

Wir gehen über zur Betrachtung einiger partikulärer Lösungen der Gleichungen des Gleichgewichts eines nur von Oberflächenspannungen beanspruchten isotropen elastischen festen Körpers, die auf das Problem der Deformation einer Platte durch gegebene Kräfte anwendbar sind. Wir erhalten diese Lösungen mit Hilfe des ersten in § 93 gegebenen Gleichungssystems zur Bestimmung der Spannungskomponenten. Dort wurde gezeigt, daß wir außer den Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \tag{22}$$

die beiden folgenden Gleichungssysteme haben:

$$\nabla^2 X_x = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}, \quad \nabla^2 Y_y = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}, \quad \nabla^2 Z_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}, \tag{23}$$

und

$$\nabla^2 Y_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}, \quad \nabla^2 X_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x}, \quad \nabla^2 X_y = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}, \tag{24}$$

wo

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z. \tag{25}$$

Ferner wurde gezeigt, daß $\Theta$ eine harmonische Funktion, also $\nabla^2\Theta = 0$ ist und daß jede der Spannungskomponenten der Gleichung $\nabla^4 f = 0$ genügt (§ 92).

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Platte von Kräften ge-

1) Das Verfahren wurde kurz, aber in viel allgemeinerer Fassung, von J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 31 (1900), p. 100, entwickelt.

halten wird, die nur am Rande angreifen. Dann sind die Seiten $z = \pm h$ spannungsfrei, d. h. wir haben $X_z = Y_z = Z_z = 0$ für $z = \pm h$. Aus der dritten der Gleichungen (22) folgt dann, daß $\partial Z_z/\partial z$ auf $z = h$ und auf $z = -h$ verschwindet. Somit befriedigt $Z_z$ die Differentialgleichung $\nabla^4 Z_z = 0$ und auf $z = \pm h$ die Bedingungen $Z_z = 0$, $\partial Z_z/\partial z = 0$. Wenn die Platte außer den Ebenen $z = \pm h$ keine Grenzflächen hätte, so würde danach der einzig mögliche Wert für $Z_z$ null sein. Wir wollen annehmen, daß $Z_z$ verschwindet.[1]) Dann folgt aus den Gleichungen $\nabla^2 \Theta = 0$, $\nabla^2 Z_z = -(1+\sigma)^{-1}\partial^2\Theta/\partial z^2$, daß $\Theta$ von der Form $\Theta_0 + z\Theta_1$ ist, wo $\Theta_0$ und $\Theta_1$ ebene harmonische Funktionen von $x$ und $y$, die von $z$ unabhängig sind.

Zur Bestimmung von $X_z$, $Y_z$ haben wir die Gleichungen

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2 X_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial \Theta_1}{\partial x}, \quad \nabla^2 Y_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial \Theta_1}{\partial y}$$

und die Bedingungen, daß $X_z = Y_z = 0$ für $z = \pm h$. Eine partikuläre Lösung ist durch die Gleichungen gegeben

$$X_z = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\sigma}(h^2 - z^2)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x}, \quad Y_z = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\sigma}(h^2 - z^2)\frac{\partial \Theta_1}{\partial y}. \tag{26}$$

$X_z$ und $Y_z$ mögen diese Form haben. Wenn $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ bekannt sind, so lassen sich allgemeine Formeln für $X_x$, $Y_y$, $X_y$ aufstellen.

Ist $\Theta_1$ eine Konstante, so verschwinden sowohl $X_z$ und $Y_z$ wie $Z_z$, und die Platte befindet sich in einem Zustand „ebener Spannung". Hängt $\Theta_1$ von $x$ und $y$ ab, so ist die Platte in einem Zustand „verallgemeinerter ebener Spannung" (§ 94). Wir werden diese beiden Fälle getrennt untersuchen.

In gleicher Weise finden wir, wenn die Platte durch Druck auf die Seiten gebogen wird, eine partikuläre Lösung der Gleichung $\nabla^4 Z_z = 0$, die auf $z = h$ und auf $z = -h$ die vorgeschriebenen Werte von $Z_z$ liefert, und stellen die allgemeinste Form von $\Theta$ auf, die mit dieser Lösung verträglich ist. Sodann werden wir partikuläre Lösungen der von $X_z$ und $Y_z$ befriedigten Gleichungen angeben und allgemeine Formeln für $X_x$, $Y_y$, $X_y$ ableiten.

## § 300. Ebener Spannungszustand.

Wenn $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ überall in der Platte verschwinden, so haben wir einen ebenen Spannungszustand vor uns. Wir haben bereits in § 145 die allgemeinste Form, die die übrigen Spannungskomponenten und die entsprechenden Verschiebungen annehmen, bestimmt. Für $\Theta$ fanden wir den Ausdruck

$$\Theta = \Theta_0 + \beta z, \tag{27}$$

1) J. H. Michell, *loc. cit.*, macht auf die Analogie dieses Verfahrens zur üblichen Behandlung des Kondensatorproblems in der Elektrostatik aufmerksam.

wo $\Theta$ eine ebene harmonische Funktion von $x$ und $y$ und $\beta$ eine Konstante. Die Spannungskomponenten $X_x$, $Y_y$, $X_y$ leiten sich aus einer Spannungsfunktion $\chi$ durch die Formeln

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \tag{28}$$

ab, und $\chi$ hat die Form

$$\chi = \chi_0 + z\chi_1 - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{1+\sigma} z^2 \Theta_0, \tag{29}$$

wo

$$\nabla_1^2 \chi_0 = \Theta_0, \quad \nabla_1^2 \chi_1 = \beta. \tag{30}$$

Führen wir ein Paar konjugierter Funktionen $\xi$, $\eta$ von $x$ und $y$ ein derart, daß

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Theta_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{31}$$

so lauten die allgemeinsten Ausdrücke für $\chi_0$ und $\chi_1$

$$\chi_0 = \tfrac{1}{2}x\xi + f, \quad \chi_1 = \tfrac{1}{4}\beta(x^2 + y^2) + F, \tag{32}$$

wo $f$ und $F$ ebene harmonische Funktionen. Die Verschiebung $(u, v, w)$ drückt sich dann aus durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{E}\left(\xi + \beta xz + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial x}(\chi_0 + z\chi_1), \\ v &= \frac{1}{E}\left(\eta + \beta yz + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial}{\partial y}(\chi_0 + z\chi_1), \\ w &= -\frac{1}{E}\left\{\tfrac{1}{2}\beta(x^2 + y^2 + \sigma z^2) + \sigma z \Theta_0\right\} + \frac{1+\sigma}{E}\chi_1. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Lösung stellt die Überlagerung zweier Spannungssysteme dar, von denen das eine von $\Theta_0$, $\chi_0$, das andere von $\beta$, $\chi_1$ abhängt. Diese beiden Systeme sind von einander unabhängig.

## § 301. Reckung einer Platte durch Kräfte in ihrer Ebene.

Nehmen wir das $(\Theta_0, \chi_0)$-System, so haben wir folgende Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{E}\left(\xi + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial x}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial \chi_0}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{E}\left(\eta + \tfrac{1}{2}\sigma z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}\right) - \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial \chi_0}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\sigma}{E} z \Theta_0, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

wo $\chi_0$ von der Form $\frac{1}{2}x\xi + f$ ist, $\Theta_0$ und $f$ ebene harmonische Funktionen bedeuten und $\xi$, $\eta$ durch (31) bestimmt sind. Die Normalverschiebung der Mittelebene verschwindet, d. h. die Platte ist nicht gebogen. Die Spannung drückt sich aus durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\chi_0 - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{1+\sigma} z^2 \Theta_0\right), \\ Y_y &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\chi_0 - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{1+\sigma} z^2 \Theta_0\right), \\ X_y &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\chi_0 - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{1+\sigma} z^2 \Theta_0\right). \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Spannungsresultanten $T_1$, $T_2$, $S_1$ sind gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right), \\ T_2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right), \\ S_1 &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right). \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Die Spannungsresultanten $N_1$, $N_2$ und die Spannungsmomente $G_1$, $G_2$, $H_1$ verschwinden. Die Gleichungen (11) und (12), in denen $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$ verschwinden, werden von den erhaltenen Ausdrücken augenscheinlich befriedigt.

Wenden wir auf die Ausdrücke für $T_1$, $T_2$, $S_1$ die Gleichungen (4) an, so finden wir, daß der Zug $T$ und die Schubkraft $S$ an einer Stelle der Randlinie, wo die Normale mit der $x$-Achse den Winkel $\theta$ einschließt, durch die Gleichungen gegeben sind

$$T = \left(\cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right),$$

$$S = \left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \cos 2\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right\}\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right).$$

Transformieren wir diese Gleichungen mittels der Formeln (19), um die Beziehung auf feste Achsen $x$ und $y$ zu eliminieren, so gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right), \\ S &= -\frac{\partial}{\partial \nu}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(2h\chi_0 - \tfrac{1}{3}\frac{\sigma}{1+\sigma} h^3 \Theta_0\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Diese Ausdrücke sind allgemein genug, um die Wirkungen beliebiger in der Ebene der Platte angreifender Randkräfte darzustellen.[1]) Resultieren die Kräfte aus Spannungen, die den Gleichungen (35) gemäß verteilt sind, so stellen die Gleichungen (34) eine strenge Lösung dar; sind jedoch die angreifenden Spannungen irgendwie anders verteilt, aber immer noch gleichwertig mit Resultanten vom Typus $T$, $S$, so stellt die Lösung den Zustand der Platte in allen Punkten, die nicht unmittelbar am Rande liegen, mit hinreichender Annäherung dar.

1) Der Fall der Kreisplatte wurde von Clebsch, *Elastizität*, § 42, erschöpfend behandelt.

Wir bemerken, daß die Spannungsresultanten und die potentielle Energie pro Flächeneinheit sich durch die Dehnung und Schubverzerrung der Mittelebene ausdrücken lassen. Schreiben wir u und v für die Werte von $u$ und $v$ auf $z = 0$ und setzen

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varpi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

so erhalten wir

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2}\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2}\right), \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1-\sigma}{E}\Theta_0,$$

$$\varpi = -2\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x \partial y}$$

und haben dann

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) - \tfrac{1}{3}\frac{Eh^3\sigma}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) - \tfrac{1}{3}\frac{Eh^3\sigma}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma}\varpi + \tfrac{1}{3}\frac{Eh^3\sigma}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Die potentielle Energie der Flächeneinheit wird, wie sich zeigen läßt,

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\varpi^2)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{3}\frac{Eh^3\sigma}{1-\sigma^2}\left[\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \varpi\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{20}\frac{\sigma^2}{1-\sigma}\frac{Eh^5}{1-\sigma^2}\left[\left\{\frac{\partial^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial x^2}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial y^2}\right\}^2 + 2\left\{\frac{\partial^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\partial x \partial y}\right\}^2\right].$$

Einige spezielle Beispiele der allgemeinen Theorie werden wir sogleich verwerten können.

1) Setzen wir $\Theta_0 = 0$, so ist $\chi_0$ eine ebene harmonische Funktion, und es handelt sich um einen Zustand ebener *Verzerrung* in der Platte ohne Dilatation und Drehung [vgl. § 14, d)]. Wir haben

$$u = -\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial \chi_0}{\partial x}, \quad v = -\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial \chi_0}{\partial y}, \quad w = 0,$$

und

$$T_1 = -T_2 = 2h\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2}, \quad S_1 = -2h\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x \partial y}.$$

2) Ist $\Theta_0$ konstant, so haben wir $\xi = \Theta_0 x$, $\eta = \Theta_0 y$ und können setzen: $\chi_0 = \frac{1}{4}\Theta_0(x^2 + y^2)$; wir haben dann

$$u = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sigma}{E}\Theta_0 x, \quad v = \tfrac{1}{2}\frac{1-\sigma}{E}\Theta_0 y, \quad w = -\frac{\sigma}{E}\Theta_0 z,$$

und

$$T_1 = T_2 = \Theta_0 h, \quad S_1 = 0.$$

Diese Lösung entspricht der Beanspruchung durch gleichförmigen Zug $\Theta_0 h$ längs des ganzen Randes.

3) Ist $\Theta_0 = \alpha x$, wo $\alpha$ konstant, so haben wir $\xi = \frac{1}{2}\alpha(x^2 - y^2)$, $\eta = \alpha xy$ und können setzen: $\chi_0 = \frac{1}{6}\alpha x^3$; wir haben dann

$$u = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{E}(\sigma z^2 - \sigma x^2 - y^2), \quad v = \frac{\alpha}{E}xy, \quad w = -\frac{\sigma\alpha}{E}xz,$$

und

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 2h\alpha x, \quad S_1 = 0.$$

Eine allgemeinere Lösung erhalten wir, wenn wir die unter 1) gegebene Verschiebung addieren.

4) Nehmen wir $\chi_0$ in 1) als Funktion zweiten Grades in $x$ und $y$ an, so bekommen wir die allgemeinste Lösung, bei der die Spannungskomponenten von $x$ und $y$ unabhängig sind, die Mittelebene also gleichförmig gereckt wird. Wir würden für die nicht verschwindenden Spannungskomponenten die Ausdrücke

$$X_x = E(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2)/(1 - \sigma^2), \quad Y_y = E(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1)/(1 - \sigma^2),$$
$$X_y = \frac{1}{2}E\varpi/(1 + \sigma)$$

und für die Verschiebungen die Ausdrücke

$$u = \varepsilon_1 x + \frac{1}{2}\varpi y, \quad v = \varepsilon_2 y + \frac{1}{2}\varpi x, \quad w = -\sigma z(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/(1 - \sigma)$$

erhalten.

## § 302. Biegung einer Platte zu einem ebenen Spannungszustand.

Streichen wir in den Gleichungen (33) die Glieder, die von $\Theta_0$, $\chi_0$ abhängen, so ist die Verschiebung durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{E}\beta xz - \frac{1+\sigma}{E}z\frac{\partial\chi_1}{\partial x}, \\ v &= \frac{1}{E}\beta yz - \frac{1+\sigma}{E}z\frac{\partial\chi_1}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\beta}{2E}(x^2 + y^2 + \sigma z^2) + \frac{1+\sigma}{E}\chi_1, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

wo $\chi_1$ von der Form $\chi_1 = \frac{1}{4}\beta(x^2 + y^2) + F$ und $F$ eine ebene harmonische Funktion ist. Die Spannung drückt sich aus durch die Gleichungen

$$X_x = z\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2}, \quad Y_y = z\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}, \quad X_y = -z\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial y}.$$

Die Spannungsresultanten verschwinden, und die Spannungsmomente sind durch die Gleichungen gegeben

$$G_1 = \frac{2}{3}h^3\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2}, \quad G_2 = \frac{2}{3}h^3\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2}, \quad H_1 = \frac{2}{3}h^3\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial y}. \tag{39}$$

Die Gleichungen (11) und (12), in denen $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$ verschwinden, werden von den erhaltenen Ausdrücken augenscheinlich befriedigt.

Die Normalverschiebung w der Mittelebene ist durch die Gleichung gegeben

$$\mathrm{w} = -\frac{\beta}{2E}(x^2 + y^2) + \frac{1+\sigma}{E}\chi_1, \tag{40}$$

sodaß die Krümmung sich durch die Gleichungen ausdrückt

$$\varkappa_1 = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2}, \quad \tau = \frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial y}.$$

Aus diesen Gleichungen und der Gleichung $\nabla_1^2 \chi_1 = \beta$ ergibt sich

$$\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2 = -\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y^2}, \quad \varkappa_2 + \sigma\varkappa_1 = -\frac{1-\sigma^2}{E}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2},$$

sodaß die Formeln (18) zutreffen.

Die Spannungsmomente am Rande lassen sich in der Form ausdrücken

$$G = \tfrac{2}{3} h^3 \left(\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial \chi_1}{\partial \nu}\right), \quad H = \tfrac{2}{3} h^3 \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial s}\right), \tag{41}$$

und wenn der Rand von gegebenen Kräften beansprucht wird, müssen $G$ und $\partial H/\partial s$ vorgeschriebene Werte am Rande annehmen. Da $\chi_1$ die Gleichung $\nabla_1^2 \chi_1 = \beta$ erfüllt, so sind die Formeln (41) für $G$ und $\partial H/\partial s$ nicht allgemein genug, um die Befriedigung solcher Bedingungen zuzulassen. Mithin kann eine Platte, die nur durch Kräfte am Rande beansprucht wird, welche mit Kräftepaaren statisch gleichwertig sind, nur dann in einem Zustand ebener Spannung sein, wenn die Kräftepaare sich durch die Formeln (41) ausdrücken lassen.

Wir fügen einige besondere Resultate an.

1) Wenn die Platte zu einem Zustand ebener Spannung gebogen wird, so ist die Summe der Hauptkrümmungen der Fläche, zu der sich die Mittelebene biegt, konstant.

2) In demselben Falle ist die potentielle Energie pro Flächeneinheit der Mittelebene streng durch Formel (21) gegeben.

3) Einen besonderen Fall erhalten wir, wenn wir die in den Gleichungen (32) eingeführte Funktion $F$ als Funktion zweiten Grades in $x$ und $y$ annehmen. $\chi_1$ ist dann ebenfalls vom zweiten Grade in $x$ und $y$, und zwar können wir, ohne an den Ausdrücken für die Spannungskomponenten etwas zu ändern, $\chi_1$ als homogene Funktion annehmen. In diesem Falle ist auch w homogen vom zweiten Grade in $x$ und $y$, und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ sind Konstanten. Der Wert von $\chi_1$ ist

$$\chi_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{E}{1-\sigma^2}\left[(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1)x^2 + (\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2)y^2 - 2(1-\sigma)\tau x y\right],$$

und die nicht verschwindenden Spannungskomponenten sind durch die Gleichungen gegeben

$$X_x = -\frac{E}{1-\sigma^2} z(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \quad Y_y = -\frac{E}{1-\sigma^2} z(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1),$$

$$X_y = -\frac{E}{1+\sigma} z\tau.$$

4) Dieser Fall schließt den in § 90 behandelten in sich und wird tatsächlich mit ihm identisch, wenn die $(x, y)$-Achsen so gewählt werden, daß $\tau$ verschwindet, wenn also jene Achsen parallel den Geraden gewählt werden, die in die Krümmungslinien der verzerrten Mittelfläche übergehen.

Einen anderen speziellen Unterfall würden wir erhalten, wenn wir die Platte als rechteckig und die $(x, y)$-Achsen parallel den Kanten, ferner $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gleich null und $\tau$ konstant annehmen. Wir würden dann finden

$$u = -\tau y z, \quad v = -\tau z x, \quad w = \tau x y.$$

Die Spannungsresultanten und die Biegungsmomente $G_1$, $G_2$ verschwinden, und die Drillungsmomente $H_1$ und $H_2$ sind gleich $+D(1-\sigma)\tau$. Das Ergebnis ist, daß eine rechteckige Platte in Form einer antiklastischen Fläche $w = \tau x y$ gehalten werden kann durch Drillungsmomente vom Betrage $D(1-\sigma)\tau$ pro Längeneinheit, die an den Kanten mit richtigem Drehsinn angebracht sind, oder auch durch zwei Paare zur Platte normaler Kräfte, die in den Ecken angreifen.[1]) Die Kräfte des einen Paars greifen in den Endpunkten der einen Diagonale in demselben Sinne an, die des anderen in den Endpunkten der anderen Diagonale in dem entgegengesetzten Sinn. Die Größe jeder Kraft ist $2D(1-\sigma)\tau$. (Vgl. p. 531 f.)

## § 303. Verallgemeinerter ebener Spannungszustand.

Wenn $Z_z$ überall verschwindet und $X_z$, $Y_z$ auf $z = \pm h$ verschwinden, so können wir $X_z$ und $Y_z$ als durch die Gleichungen (26) § 299, gegeben annehmen. Zur Bestimmung von $X_x$, $Y_y$, $X_y$ haben wir je die ersten beiden der Gleichungen (22) und (23) und die dritte der Gleichungen (24) und außerdem die Gleichung (25), in der $Z_z$ verschwindet, während $X_z$ und $Y_z$ durch die Gleichungen (26) gegeben sind und $\Theta$ die Form $\Theta_0 + z\Theta_1$ hat, wo $\Theta_0$ und $\Theta_1$ von $z$ unabhängige, ebene harmonische Funktionen von $x, y$ sind. Die von $\Theta_0$ abhängende Spannung ist in § 300 bestimmt worden und wir streichen daher $\Theta_0$. Wir haben somit die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} = 0,\\ &\nabla^2 X_x + \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} = 0, \quad \nabla^2 Y_y + \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial y^2} = 0,\\ &\nabla^2 X_y + \frac{z}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad X_x + Y_y = z\Theta_1. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

$$X_x = \frac{z}{1+\sigma}\Theta_1 + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{z}{1+\sigma}\Theta_1 + \frac{\partial^2 \chi'}{\partial x^2}, \quad X_y = -\frac{\partial^2 \chi'}{\partial x \partial y}, \quad (43)$$

wo $\chi'$ eine Funktion von $x, y, z$; die letzte der Gleichungen (42) liefert

$$\nabla^2 \chi' = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma} z\Theta_1.$$

Die übrigen der Gleichungen (42) lassen sich nun überführen in

1) H. Lamb, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 21 (1891), p. 70.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z \Theta_1\right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z \Theta_1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z \Theta_1\right) = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß der Ausdruck $\frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2} - \frac{2-\sigma}{1+\sigma} z \Theta_1$ eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist; wir können sie gleich null setzen, ohne die Werte von $X_x$, $Y_y$, $X_y$ zu ändern. Wir schreiben daher

$$\chi' = z\chi_1' + \frac{2-\sigma}{6(1+\sigma)} z^3 \Theta_1, \tag{44}$$

wo

$$\nabla_1^2 \chi_1' = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \Theta_1. \tag{45}$$

Führen wir zwei konjugierte Funktionen $\xi_1$, $\eta_1$ von $x$, $y$ ein derart, daß

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = \Theta_1, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \tag{46}$$

so können wir $\chi_1'$ in der Form ausdrücken

$$\chi_1' = -\frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} x \xi_1 + F_1, \tag{47}$$

wo $F_1$ eine ebene harmonische Funktion. Die Form von $\chi'$ und damit auch die von $X_x$, $Y_y$, $X_y$ ist demnach völlig bestimmt.

Die Verschiebung bestimmt sich durch die Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(X_x - \sigma Y_y - \sigma Z_z), \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z,$$

in denen $Z_z$ verschwindet, $X_z$ und $Y_z$ durch (26) und $X_x$, $Y_y$, $X_y$ durch (43) gegeben sind. Die Ausdrücke, die sich für $u$, $v$, $w$ ergeben, lauten

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{E}\left[(1+\sigma) z \frac{\partial \chi_1'}{\partial x} + \tfrac{1}{6}(2-\sigma) z^3 \frac{\partial \Theta_1}{\partial x}\right], \\ v &= -\frac{1}{E}\left[(1+\sigma) z \frac{\partial \chi_1'}{\partial y} + \tfrac{1}{6}(2-\sigma) z^3 \frac{\partial \Theta_1}{\partial y}\right], \\ w &= \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\chi_1' + (h^2 - \tfrac{1}{2}\sigma z^2)\Theta_1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

## § 304. Biegung einer Platte zu einem verallgemeinerten ebenen Spannungszustand.

Die Normalverschiebung w der Mittelebene ist durch die Gleichung gegeben

$$\mathrm{w} = \frac{1}{E}\{h^2 \Theta_1 + (1+\sigma)\chi_1'\}, \tag{49}$$

und da $\nabla_1^2 \Theta_1 = 0$, so haben wir nach (45)

$$\nabla_1^4 \mathrm{w} = 0, \tag{50}$$

wo $\nabla_1^4$ den Operator $\partial^4/\partial x^4 + \partial^4/\partial y^4 + 2\,\partial^4/\partial x^2 \partial y^2$ bedeutet, und ferner

$$\Theta_1 = -\frac{E}{1-\sigma}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \quad \chi_1' = \frac{E}{1+\sigma}\mathrm{w} + \frac{Eh^2}{1-\sigma^2}\nabla_1^2 \mathrm{w}. \tag{51}$$

Die Spannungskomponenten sind durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\nabla_1^2 \mathrm{w} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{E}{1+\sigma} z\mathrm{w} + \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{h^2 z - \tfrac{1}{6}(2-\sigma) z^3\right\}\nabla_1^2 \mathrm{w}\right], \\
Y_y &= -\frac{Ez}{1-\sigma^2}\nabla_1^2 \mathrm{w} \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{E}{1+\sigma} z\mathrm{w} + \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{h^2 z - \tfrac{1}{6}(2-\sigma) z^3\right\}\nabla_1^2 \mathrm{w}\right], \\
X_y &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\frac{E}{1+\sigma} z\mathrm{w} + \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{h^2 z - \tfrac{1}{6}(2-\sigma) z^3\right\}\nabla_1^2 \mathrm{w}\right], \\
X_z &= -\tfrac{1}{2}\frac{E(h^2-z^2)}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \quad Y_z = -\tfrac{1}{2}\frac{E(h^2-z^2)}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \\
Z_z &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente sind durch folgende Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = T_2 = S_1 = 0, \\
&N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \\
&G_1 = -D\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2}\right) + \frac{8+\sigma}{10} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \\
&G_2 = -D\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\right) + \frac{8+\sigma}{10} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \\
&H_1 = D(1-\sigma)\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y} + \frac{8+\sigma}{10} Dh^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\nabla_1^2 \mathrm{w}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Die Gleichungen (11) und (12), in denen $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$ verschwinden, werden augenscheinlich von den erhaltenen Ausdrücken befriedigt.

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente, die zu einer beliebigen Kurve $s$ gehören, deren Normale $\nu$ ist, lassen sich in folgender Form ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
&T = S = 0, \quad N = -D\frac{\partial}{\partial \nu}\nabla_1^2 \mathrm{w}, \\
&G = -D\nabla_1^2 \mathrm{w} + D(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left(\mathrm{w} + \frac{1}{10}\frac{8+\sigma}{1-\sigma} h^2 \nabla_1^2 \mathrm{w}\right), \\
&H = D(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial \nu}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathrm{w} + \frac{1}{10}\frac{8+\sigma}{1-\sigma} h^2 \nabla_1^2 \mathrm{w}\right)\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

wo $\varrho'$ den Krümmungsradius der Kurve bezeichnet. An einem Rande, an dem gegebene Kräfte und Kräftepaare angreifen, haben $G$ und $N - \partial H/\partial s$ gegebene Werte. Die Lösung ist allgemein genug, um die Befriedigung solcher Randbedingungen zuzulassen. Die durch (48) ausgedrückte Lösung ist streng, wenn die an den Rändern angreifenden Spannungen den Formeln (52) entsprechend, worin w der Relation (50) genügen muß, verteilt sind; sind sie jedoch irgendwie anders verteilt, aber immer noch gleichwertig mit Resultanten vom Typus $N$, $G$, $H$, so stellt die Lösung den Zustand der Platte in allen Punkten, die nicht unmittelbar am Rande liegen, mit hinreichender Annäherung dar.

Die potentielle Energie pro Flächeneinheit ist, wie sich zeigen läßt,

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} D\left[(\nabla_1{}^2 \mathrm{w})^2 - 2(1-\sigma)\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}\right] \\ &\quad + \frac{8+\sigma}{10} D h^2 \left[\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}\right] \\ &\quad + \tfrac{2}{5}\frac{D h^2}{1-\sigma}\left[\left(\frac{\partial \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial y}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{272 + 64\sigma + 5\sigma^2}{420(1-\sigma)} D h^4 \left[\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \nabla_1{}^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Aus den hier erhaltenen Resultaten ergeben sich die in § 302 gefundenen, wenn $\Theta_1 = \beta$ gesetzt wird. Die Gleichungen (53) zeigen, daß die Spannungsmomente sich nur dann durch die Formeln (18) ausdrücken, wenn die Summe der Hauptkrümmungen konstant oder eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist. Ebenso gilt die Formel (21) nur dann, wenn die Summe der Hauptkrümmungen konstant ist; doch liefern diese Formeln Näherungsausdrücke für die Spannungsmomente und die potentielle Energie, wenn $h$ klein ist.

Die im § 301 und in diesem Paragraphen entwickelte Theorie läuft vielmehr auf die Feststellung von Formen strenger Lösungen der Gleichgewichtsgleichungen als auf die Bestimmung vollständiger Lösungen dieser Gleichungen hinaus. Die Formen enthalten eine Anzahl unbekannter Funktionen, und die vollständigen Lösungen erhalten wir, wenn wir diese Funktionen so wählen, daß gewisse Differentialgleichungen wie (50) und gewisse Randbedingungen befriedigt werden. Diese Lösungsformen eignen sich zur Darstellung des Verzerrungszustandes, der in einer beliebig gestalteten Platte von Randkräften hervorgebracht wird, sofern diese Kräfte einer linienhaften Kraftverteilung mit den Komponenten T, S, $\mathrm{N} - \partial \mathrm{H}/\partial s$ und einer linienhaften Kräftepaar-Verteilung G gleichgesetzt werden können.

## § 305. Im Mittelpunkt belastete Kreisplatte.[1])

Das Problem der im Mittelpunkt belasteten Kreisplatte, die am Rande gestützt oder eingeklemmt ist, mag als Beispiel für die eben entwickelte Theorie dienen. Ist $a$ der Radius der Platte und bezeichnet $r$ den Abstand eines Punktes vom Mittelpunkt, so können wir w als Funktion von $r$ allein und als Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) \mathrm{w} = \frac{W}{2\pi D}\log\frac{a}{r} + A \tag{56}$$

annehmen, wo $W$, $A$ Konstanten bedeuten, und haben dann auf einem Kreis vom Radius $r$

$$N = \frac{W}{2\pi r}, \quad H = 0;$$

die resultierende Schubkraft auf den innerhalb des Kreises gelegenen Teil der Platte ist also $W$. Somit ist $W$ die im Mittelpunkt der Platte wirkende Last. Das vollständige Integral von (56) ist

$$\mathrm{w} = \frac{W}{8\pi D}\left(r^2\log\frac{a}{r} + r^2\right) + \tfrac{1}{4}Ar^2 + B + C\log r,$$

wo $B$ und $C$ Integrationskonstanten. Handelt es sich um eine volle, den Mittelpunkt enthaltende Platte, so muß $C$ verschwinden, und wir setzen daher als Lösung an

$$\mathrm{w} = \frac{W}{8\pi D}\left(r^2\log\frac{a}{r} + r^2\right) + \tfrac{1}{4}Ar^2 + B.$$

Das Biegungsmoment $G$ ist auf dem Kreise $r = a$ durch die Gleichung gegeben

$$G = -\frac{W}{4\pi}(1+\sigma)\log\frac{a}{r} + \frac{W}{8\pi}(1-\sigma) - \frac{W}{20\pi}(8+\sigma)\frac{h^2}{r^2} - \tfrac{1}{2}D(1+\sigma)A.$$

Wir können jetzt die Konstanten $A$ und $B$ bestimmen. Ist die Platte am Rande gestützt, sodaß w und $G$ auf $r = a$ verschwinden, so finden wir

$$\mathrm{w} = \frac{W}{2\pi D}\left[\tfrac{1}{4}r^2\log\frac{a}{r} - \tfrac{1}{8}\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(a^2-r^2) + \tfrac{1}{20}\frac{8+\sigma}{1+\sigma}\frac{h^2}{a^2}(a^2-r^2)\right]. \tag{57}$$

und die Durchbiegung im Mittelpunkt, also der Wert von $-\mathrm{w}$ in $r = 0$, ist

$$\frac{W}{2\pi D}\left(\tfrac{1}{8}\frac{3+\sigma}{1+\sigma}a^2 - \tfrac{1}{20}\frac{8+\sigma}{1+\sigma}h^2\right).$$

Ist die Platte am Rande eingeklemmt, sodaß w und $\partial \mathrm{w}/\partial r$ für $r = a$ verschwinden, so haben wir

$$\mathrm{w} = \frac{W}{8\pi D}\left[r^2\log\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}(a^2-r^2)\right], \tag{58}$$

und die Durchbiegung im Mittelpunkt ist gleich $Wa^2/16\pi D$. Wenn die

1) Resultate, die mit den hier erhaltenen gleichwertig sind, gab Saint-Venant in der Clebsch-Ausgabe, *Note du § 45.*

Platte sehr dünn ist, so ist die Durchbiegung im Mittelpunkt bei gestütztem Rand größer als bei eingeklemmtem Rand und zwar im Verhältnis $(3+\sigma):(1+\sigma)$ oder, falls $\sigma = \frac{1}{4}$, $13:5$.

## § 306. Platte, in der der Spannungszustand über ihre Ebene konstant oder linear veränderlich ist.

Wenn in einer Platte der Spannungszustand in allen Punkten einer zu den Plattenseiten parallelen Ebene derselbe ist, so sind die Spannungskomponenten von $x$ und $y$ unabhängig, und die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts lauten

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

Wenn die Seiten der Platte spannungsfrei sind, so folgt, daß $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ verschwinden, d. h. daß die Platte in ebenem Spannungszustand ist. Der allgemeinste, von $x$ und $y$ unabhängige Spannungszustand, der in einem zylindrischen oder prismatischen Körper durch Spannungen auf die Mantelfläche erhalten werden kann, ergibt sich, wenn wir die in § 301 unter 4) und die in § 302 unter 3) gegebenen Lösungen addieren. In den bezeichneten Fällen ist der Spannungszustand über die Querschnitte des Zylinders oder Prismas konstant.

Wenn die Spannungskomponenten lineare Funktionen von $x$ und $y$ sind, so ist der Spannungszustand über die Querschnitte des Zylinders oder Prismas gleichförmig veränderlich. Wir können die allgemeinste Spannungsverteilung bestimmen, die in einem Prisma möglich ist, wenn die Enden spannungsfrei sind, Massenkräfte fehlen und die Spannungskomponenten lineare Funktionen von $x$ und $y$ sind. Zu diesem Zwecke drücken wir alle Spannungskomponenten in einer Form aus wie

$$X_x = X_x' x + X_x'' y + X_x^{(0)},$$

wo $X_x'$, $X_x''$, $X_x^{(0)}$ Funktionen von $z$. Führen wir diese Formen in die verschiedenen, von den Spannungskomponenten zu erfüllenden Gleichungen ein, so müssen diejenigen Terme dieser Gleichungen, die $x$ bezw. $y$ enthalten, und diejenigen Terme, die von $x$ und $y$ unabhängig sind, für sich den Gleichungen genügen.

Wir nehmen zuerst die Spannungsgleichungen des Gleichgewichts vor. Die Gleichung

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

liefert, kombiniert mit der Bedingung, daß $X_z$ für $z = \pm h$ verschwinden soll, folgende Gleichungen:

$$X_z' = 0, \quad X_z'' = 0, \quad \frac{\partial X_z^{(0)}}{\partial z} + X_x' + X_y'' = 0;$$

ebenso haben wir die Gleichungen

$$Y_z' = 0, \quad Y_z'' = 0, \quad \frac{\partial Y_z^{(0)}}{\partial z} + X_y' + Y_y'' = 0.$$

Daraus folgt, daß $X_z$ und $Y_z$ von $x$ und $y$ unabhängig sind. Die dritte der Spannungsgleichungen geht daher über in $\partial Z_z/\partial z = 0$, und da $Z_z$ auf den Seiten der Platte ($z = \pm h$) verschwindet, verschwindet es überall.

Weiterhin ist $\Theta$ von der Form $x\Theta' + y\Theta'' + \Theta^{(0)}$, wo $\Theta'$, $\Theta''$, $\Theta^{(0)}$ Funktionen von $z$ und zwar, da $\Theta$ eine harmonische Funktion, lineare Funktionen von $z$ sind. Die Gleichung $\nabla^2 X_z = -\frac{1}{1+\sigma}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z}$ nimmt die Gestalt $\partial^2 X_z/\partial z^2 = \text{const.}$ an, sodaß $\partial^3 X_z/\partial z^3 = 0$. Da $X_z$ dieser Gleichung genügt und auf $z = \pm h$ verschwindet, muß es $z^2 - h^2$ als Faktor enthalten, und da es von $x$ und $y$ unabhängig ist, muß es von der Form $A(z^2 - h^2)$ sein, wo $A$ konstant. Entsprechendes gilt für $Y_z$.

Wenn also auf einen zylindrischen Körper, dessen Erzeugenden parallel zur $z$-Achse sind, weder Massenkräfte noch Spannungen an den ebenen Endflächen wirken, so ist der allgemeinste Spannungstypus, bei dem die Spannungskomponenten lineare Funktionen von $x$ und $y$ sind, ein verallgemeinerter ebener Spannungszustand, wie er in § 303 diskutiert wurde, wobei speziell $\Theta_0$ und $\Theta_1$ lineare Funktionen von $x$ und $y$ sind, während die in den Gleichungen (32) und (47) eingeführten Hilfsfunktionen, die ebenen harmonischen Funktionen $f$ und $F_1$, höchstens vom dritten Grade sind.

Bei allen unter diese Kategorie fallenden Spannungszuständen einer Platte können die Spannungskomponenten, wie sich zeigen läßt, durch die Größen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$, die die Reckung der Mittelebene definieren, und die Größen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$, die die Krümmung der verzerrten Mittelfläche definieren, mittels folgender Formeln ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 - (\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2)z\right\},\\
Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1 - (\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1)z\right\},\\
X_y &= \frac{E}{1+\sigma}\left\{\tfrac{1}{2}\varpi - \tau z\right\}\\
X_z &= -\tfrac{1}{2}\frac{E(h^2-z^2)}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial x}(\varkappa_1 + \varkappa_2),\\
Y_z &= -\tfrac{1}{2}\frac{E(h^2-z^2)}{1-\sigma^2}\frac{\partial}{\partial y}(\varkappa_1 + \varkappa_2),\\
Z_z &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente drücken sich durch die Formeln aus

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \quad S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma}\varpi,\\
&N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}(\varkappa_1 + \varkappa_2), \quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\\
&G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \quad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1), \quad H_1 = D(1-\sigma)\tau,
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

und die potentielle Energie pro Flächeneinheit ist

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2-\tfrac{1}{4}\varpi^2)]$$
$$+\tfrac{1}{2}D[(\varkappa_1+\varkappa_2)^2-2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2-\tau^2)]$$
$$+\tfrac{2}{5}\frac{Dh^2}{1-\sigma}\left[\left\{\frac{\partial(\varkappa_1+\varkappa_2)}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial(\varkappa_1+\varkappa_2)}{\partial y}\right\}^2\right]. \qquad (61)$$

## § 307. Biegung einer Platte durch gleichförmigen einseitigen Druck.

Wenn die Seite $z=h$ gleichförmigem Druck $p$ ausgesetzt ist, so haben wir $\nabla^4 Z_z=0$ überall, $\partial Z_z/\partial z=0$ auf $z=h$ und $z=-h$, $Z_z=-p$ auf $z=h$, $Z_z=0$ auf $z=-h$. Eine partikuläre Lösung ist

$$Z_z=\tfrac{1}{4}h^{-3}p(z+h)^2(z-2h)=\tfrac{1}{4}h^{-3}p(z^3-3h^2z-2h^3); \qquad (62)$$

dies sei in der Tat der Wert von $Z_z$. Zur Bestimmung von $\Theta$ haben wir die Gleichungen

$$\nabla^2\Theta=0,\quad \partial^2\Theta/\partial z^2=-\tfrac{3}{2}(1+\sigma)h^{-3}pz,$$

deren allgemeinste Lösung die Form hat

$$\Theta=-\tfrac{1}{4}(1+\sigma)h^{-3}pz^3+\tfrac{3}{8}(1+\sigma)h^{-3}pz(x^2+y^2)+z\Theta_1+\Theta_0,$$

wo $\Theta_1$ und $\Theta_0$ ebene harmonische Funktionen. Wir können die Terme $z\Theta_1$ und $\Theta_0$ fortlassen, weil die Spannungssysteme, die ihnen entsprechen, bereits ermittelt sind. Wir nehmen daher $\Theta$ in der Form an

$$\Theta=-\tfrac{1}{4}(1+\sigma)h^{-3}pz^3+\tfrac{3}{8}(1+\sigma)h^{-3}pz(x^2+y^2). \qquad (63)$$

Zur Bestimmung von $X_z$ und $Y_z$ haben wir die Gleichungen

$$\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{3p}{4h^3}(z^2-h^2)=0,\quad \nabla^2X_z=-\frac{3px}{4h^3},\quad \nabla^2Y_z=-\frac{3py}{4h^3}$$

und die Bedingung, daß $X_z$ und $Y_z$ auf $z=h$ und auf $z=-h$ verschwinden. Eine partikuläre Lösung ist

$$X_z=\tfrac{3}{8}h^{-3}p(h^2-z^2)x,\quad Y_z=\tfrac{3}{8}h^{-3}p(h^2-z^2)y; \qquad (64)$$

wir wollen wie in § 299 annehmen, daß $X_z$ und $Y_z$ tatsächlich diese Werte haben.

Zur Bestimmung von $X_x$, $Y_y$, $X_y$ haben wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=\frac{3pxz}{4h^3},\quad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=\frac{3pyz}{4h^3},\\ &\nabla^2X_x=\nabla^2Y_y=-\tfrac{3}{4}h^{-3}pz,\quad \nabla^2X_y=0,\\ &X_x+Y_y=\tfrac{1}{4}h^{-3}p[-(2+\sigma)z^3\\ &\qquad\qquad+3z\{\tfrac{1}{2}(1+\sigma)(x^2+y^2)+h^2\}+2h^3]\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Um den beiden ersten zu genügen, nehmen wir $X_x$, $Y_y$, $X_y$ in folgender Form an:

$$X_x=\frac{3pz}{8h^3}(x^2+y^2)+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2},\quad Y_y=\frac{3pz}{8h^3}(x^2+y^2)+\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2},\quad X_y=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},$$

wo $\chi$ die Gleichung

$$\nabla_1^2\chi = -\frac{2+\sigma}{4}\frac{pz^3}{h^3} - \frac{3}{8}(1-\sigma)\frac{pz}{h^3}(x^2+y^2) + \frac{3}{4}\frac{pz}{h} + \frac{1}{2}p$$

befriedigen muß: die übrigen der Gleichungen (65) zeigen dann, daß

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + \nabla_1^2\chi + \frac{3}{8}\frac{p}{h^3}z(x^2+y^2)$$

eine lineare Funktion von $x$ und $y$ sein muß. Wie in früheren Paragraphen können wir diese Funktion gleich null setzen, ohne $X_x$, $Y_y$, $X_y$ zu ändern, und $\chi$ muß dann die Form haben

$$\chi = \frac{2+\sigma}{80}\frac{pz^5}{h^3} - \frac{2+\sigma}{16}\frac{pz^3}{h^3}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}\frac{pz^3}{h} - \frac{1}{4}pz^2 + z\chi_1'' + \chi_0'',$$

wo $\chi_1''$ und $\chi_0''$ Funktionen von $x$ und $y$ bedeuten, die den Gleichungen

$$\nabla_1^2\chi_1'' = -\frac{3}{8}(1-\sigma)\frac{p}{h^3}(x^2+y^2) + \frac{3}{4}\frac{p}{h}, \quad \nabla_1^2\chi_0'' = \frac{1}{2}p \tag{66}$$

genügen; wir können für $\chi_1''$, $\chi_0''$ die partikulären Lösungen annehmen

$$\left.\begin{aligned} \chi_1'' &= -\frac{3}{2^7}(1-\sigma)\frac{p}{h^3}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{16}\frac{p}{h}(x^2+y^2), \\ \chi_0'' &= \frac{1}{8}p(x^2+y^2). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Allgemeinere Integrale der Gleichungen (66) brauchen wir nicht anzusetzen, da die willkürlichen ebenen harmonischen Funktionen, die wir zu den Lösungen (67) addieren könnten, Spannungssysteme von bereits erledigtem Typus liefern.

Die Ausdrücke, die wir jetzt für $X_x$, $Y_y$, $X_y$ gefunden haben, lauten

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{4}p + \frac{3}{8}p\frac{z}{h^3}(x^2+y^2+h^2) \\ &\qquad - \frac{3}{32}(1-\sigma)p\frac{z}{h^3}(x^2+3y^2) - \frac{2+\sigma}{8}p\frac{z^3}{h^3}, \\ Y_y &= \frac{1}{4}p + \frac{3}{8}p\frac{z}{h^3}(x^2+y^2+h^2) \\ &\qquad - \frac{3}{32}(1-\sigma)p\frac{z}{h^3}(3x^2+y^2) - \frac{2+\sigma}{8}p\frac{z^3}{h^3}, \\ X_y &= \frac{3}{16}(1-\sigma)p\frac{z}{h^3}xy. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Die Spannungskomponenten sind nunmehr durch (62), (64) und (68) gegeben; die entsprechende Verschiebung bestimmt sich durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1+\sigma}{E}\frac{px}{8h^3}[(2-\sigma)z^3 - 3h^2z - 2h^3 - \frac{3}{4}(1-\sigma)z(x^2+y^2)], \\ v &= -\frac{1+\sigma}{E}\frac{py}{8h^3}[(2-\sigma)z^3 - 3h^2z - 2h^3 - \frac{3}{4}(1-\sigma)z(x^2+y^2)], \\ w &= \frac{1+\sigma}{E}\frac{p}{16h^3}[(1+\sigma)z^4 - 6h^2z^2 - 8h^3z \\ &\qquad + 3(h^2-\sigma z^2)(x^2+y^2) - \frac{3}{8}(1-\sigma)(x^2+y^2)^2]. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Es ist bemerkenswert, daß wenn die Verschiebung sich durch diese Formeln ausdrückt, die Mittelebene etwas gereckt ist. Wir haben in der Tat für $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \tfrac{1}{4}(1 + \sigma)\frac{p}{E}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente sind durch die Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = \tfrac{1}{2}ph, \quad T_2 = \tfrac{1}{2}ph, \quad S_1 = 0,\\ &N_1 = \tfrac{1}{2}px, \quad N_2 = \tfrac{1}{2}py,\\ &G_1 = \frac{p}{16}\{(3+\sigma)x^2 + (1+3\sigma)y^2\} + \frac{8-\sigma}{20}ph^2,\\ &G_2 = \frac{p}{16}\{(1+3\sigma)x^2 + (3+\sigma)y^2\} + \frac{8-\sigma}{20}ph^2,\\ &H_1 = -\tfrac{1}{8}(1-\sigma)pxy. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Diese Ausdrücke befriedigen augenscheinlich die Gleichungen (11) und (12), in denen $X'$, $Y'$, $L'$, $M'$ verschwinden und $Z'$ durch $-p$ ersetzt ist.

Die Mittelebene wird zu einer Fläche gebogen, deren Gleichung lautet

$$w = -\tfrac{1}{64}\frac{p}{D}(x^2+y^2)\left(x^2+y^2-\frac{8h^2}{1-\sigma}\right); \tag{71}$$

wir finden

$$\begin{aligned} G_1 &= -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2) + \frac{8+\sigma+\sigma^2}{20(1-\sigma)}ph^2,\\ G_2 &= -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) + \frac{8+\sigma+\sigma^2}{20(1-\sigma)}ph^2,\\ H_1 &= \quad D(1-\sigma)\tau. \end{aligned}$$

Die Formeln (18) werden nicht streng befriedigt, gelten aber angenähert, wenn $h$ klein ist.

## § 308. Biegung einer Platte durch linear veränderlichen einseitigen Druck.

Bevor wir zu einzelnen Anwendungen der in § 307 erhaltenen Lösung übergehen, erweitern wir die Resultate auf den Fall, wo der Druck auf die eine Seite eine lineare Funktion von $x$ und $y$ ist. Es wird genügen, den Fall zu behandeln, wo $p$ durch $p_0 x$ ersetzt ist. Nach dem bereits angewendeten Verfahren finden wir für $Z_z$, $\Theta$, $X_z$, $Y_z$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
Z_z &= \frac{p_0 x}{4h^3}(z^3 - 3h^2 z - 2h^3),\\
\Theta &= -(1+\sigma)\frac{p_0 x z^3}{4h^3} + \tfrac{3}{16}(1+\sigma)\frac{p_0 x z}{h^3}(x^2+y^2),\\
X_z &= \tfrac{3}{32}\frac{p_0}{h^3}(h^2 - z^2)(3x^2+y^2) + \tfrac{1}{8}\frac{p_0}{h^3}(h^2-z^2)(2h^2-z^2),\\
Y_z &= \tfrac{3}{16}\frac{p_0}{h^3}(h^2-z^2)xy;
\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

hieraus erhalten wir in derselben Weise wie früher die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{p_0 x z}{16h^3}\left[12h^2 - (6+\sigma)z^2 + \tfrac{1}{2}(5+\sigma)x^2 + \tfrac{3}{2}(1+\sigma)y^2\right],\\
Y_y &= \frac{p_0 x}{16h^3}\left[8h^3 - (2+3\sigma)z^3 + \{\tfrac{1}{2}(1+5\sigma)x^2 + \tfrac{3}{2}(1+\sigma)y^2\}z\right],\\
X_y &= \frac{p_0 y z}{16h^3}\left[-(2-\sigma)z^2 + \tfrac{1}{2}(1-\sigma)(3x^2+y^2)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Die Verschiebung ist dann gegeben durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1+\sigma}{E}\frac{p_0}{4h^3}\Big[2zh^4 + z^2h^3 - \tfrac{1}{2}z^3h^2 + \frac{8-\sigma}{20}z^5 - h^3y^2\\
&\quad + \frac{1-\sigma}{32}z(5x^2+y^2)(x^2+y^2) + \tfrac{3}{2}zx^2h^2 - \frac{2-\sigma}{8}(3x^2+y^2)z^3\Big],\\
v &= \frac{1+\sigma}{E}\frac{p_0}{4h^3}\Big[2h^3xy + \frac{1-\sigma}{8}zxy(x^2+y^2) - \frac{2-\sigma}{4}xyz^3\Big],\\
w &= \frac{1+\sigma}{E}\frac{p_0}{4h^3}\Big[-\frac{1-\sigma}{32}x(x^2+y^2)^2 + \tfrac{1}{4}(x^3+3xy^2)h^2\\
&\quad - 2xzh^3 - \tfrac{3}{8}xz^2\sigma(x^2+y^2) - \tfrac{3}{2}xz^2h^2 + \frac{1+\sigma}{4}xz^4\Big].
\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Die Mittelebene wird senkrecht zu der Richtung, in der sich der Druck ändert, etwas gereckt. In der Tat haben wir für $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \tfrac{1}{2}(1+\sigma)\frac{p_0 x}{E}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente sind durch die Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = 0, \quad T_2 = p_0 h x, \quad S_1 = 0,\\
&N_1 = \tfrac{1}{8}p_0(3x^2+y^2) + \tfrac{3}{10}p_0h^2, \ N_2 = \tfrac{1}{4}p_0xy,\\
&G_1 = \tfrac{1}{16}p_0\left[\tfrac{1}{3}(5+\sigma)x^3 + (1+\sigma)y^2x + \tfrac{2}{5}(14-\sigma)h^2x\right],\\
&G_2 = \tfrac{1}{16}p_0\left[\tfrac{1}{3}(1+5\sigma)x^3 + (1+\sigma)xy^2 - \tfrac{2}{5}(2+3\sigma)h^2x\right],\\
&H_1 = \tfrac{1}{16}p_0\left[-\tfrac{1}{3}(1-\sigma)(3x^2y+y^3) + \tfrac{2}{5}(2-\sigma)h^2y.\right.
\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Diese Ausdrücke genügen augenscheinlich den Gleichungen (11) und (12), in denen $X'$, $Y'$, $L'$, $M'$ gleich null und $Z'$ gleich $-p_0 x$ gesetzt ist.

Die Mittelebene wird zu einer Fläche gebogen, die sich durch die Gleichung

$$w = -\tfrac{1}{3}\frac{p_0}{D}\,x\left[\tfrac{1}{64}(x^2+y^2)^2 - \tfrac{1}{8}\frac{h^2}{1-\sigma}(x^2+3y^2)\right] \tag{76}$$

ausdrückt, und wir finden

$$G_1 = -D(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2) + \tfrac{1}{40}\frac{24-5\sigma+\sigma^2}{1-\sigma}p_0h^2x,$$

$$G_2 = -D(\varkappa_2+\sigma\varkappa_1) + \tfrac{1}{40}\frac{8+9\sigma+3\sigma^2}{1-\sigma}p_0h^2x,$$

$$H_1 = D(1-\sigma)\tau - \frac{8+\sigma}{40}p_0h^2y.$$

Die Formeln (18) sind angenähert erfüllt, wenn $h$ klein ist.

## § 309. Biegung einer am Rande gestützten Kreisplatte durch gleichförmigen Druck.

Wenn eine Platte, deren Randlinie eine gegebene Kurve ist, durch gleichförmigen oder linear veränderlichen einseitigen Druck etwas gebogen wird, so finden wir das Spannungssystem, indem wir mit der in § 307 oder § 308 erhaltenen Lösung solche Lösungen kombinieren, wie sie in § 301 und § 302 oder § 303 behandelt wurden, und letztere so bestimmen, daß die Randbedingungen befriedigt werden. Den Fall eines eingeklemmten Randes werden wir sogleich behandeln. Wenn der Rand gestützt ist, so lauten die Bedingungen auf der Randlinie

$$w = 0, \quad G = 0, \quad T = S = 0. \tag{77}$$

Die Platte erfahre gleichförmigen normalen Druck $p$ und sei am Rande gestützt, die Randlinie sei ein Kreis $r = a$. Die in (71) gegebene Lösung liefert für w, $G$, $T$, $S$ auf $r = a$ folgende Werte:

$$w = -\tfrac{1}{64}\frac{p}{D}a^2\left(a^2 - \frac{8h^2}{1-\sigma}\right), \quad G = \frac{3+\sigma}{16}pa^2 + \frac{3-\sigma}{20}ph^2,$$

$$T = \tfrac{1}{2}ph, \quad S = 0.$$

Die in § 301, 2) erhaltene Lösung ergibt die Werte

$$w = 0, \quad G = 0, \quad T = \tfrac{1}{2}ph, \quad S = 0,$$

wenn $\Theta_0 = \frac{1}{2}p$ gesetzt wird. Die in § 302 gegebene Lösung liefert für $T$ und $S$ den Wert null und ergibt für w und $G$ auf $r = a$ konstante Werte, falls $\chi_1 = \frac{1}{4}\beta(x^2+y^2)+\gamma$ gesetzt wird, unter $\gamma$ eine Konstante verstanden. Diese Werte sind

$$w = -\frac{1-\sigma}{4}\frac{\beta a^2}{E} + \frac{1+\sigma}{E}\gamma, \quad G = \tfrac{1}{3}h^3\beta.$$

Setzen wir

$$\beta = \frac{3p}{h^3}\left(\frac{3+\sigma}{16}a^2 + \frac{3-\sigma}{20}h^2\right), \quad \gamma = \frac{3(1-\sigma)pa^2}{2h^3}\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}\frac{a^2}{64} + \frac{8+\sigma+\sigma^2}{1-\sigma^2}\frac{h^2}{40}\right),$$

so werden die Werte von w und $G$ auf $r = a$, wie sie die Lösungen in § 302 und in § 307 liefern, identisch.

Wir können nun die drei Lösungen so kombinieren, daß die Bedingungen (77) auf $r = a$ befriedigt werden. Wir erhalten für die Verschiebungskomponenten folgende Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{px}{E}\Big[\tfrac{1}{2}\sigma - \frac{3(1-\sigma)}{32}\frac{z}{h^3}\left\{(3+\sigma)a^2 - (1+\sigma)r^2\right\} \\
&\qquad + \tfrac{3}{40}\frac{z}{h}(2+9\sigma-\sigma^2) - \tfrac{1}{8}\frac{z^3}{h^3}(2+\sigma-\sigma^2)\Big], \\
v &= \frac{py}{E}\Big[\tfrac{1}{2}\sigma - \frac{3(1-\sigma)}{32}\frac{z}{h^3}\left\{(3+\sigma)a^2 - (1+\sigma)r^2\right\} \\
&\qquad + \tfrac{3}{40}\frac{z}{h}(2+9\sigma-\sigma^2) - \tfrac{1}{8}\frac{z^3}{h^3}(2+\sigma-\sigma^2)\Big], \\
w &= \mathrm{w} + \frac{pz}{E}\Big[-\tfrac{1}{2} + \frac{3\sigma}{32}\frac{z}{h^3}\left\{(3+\sigma)a^2 - 2(1+\sigma)r^2\right\} \\
&\qquad - \tfrac{3}{40}\frac{z}{h}(5+2\sigma+\sigma^2) + \tfrac{1}{16}\frac{z^3}{h^3}(1+\sigma)^2\Big],
\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

wo

$$\mathrm{w} = -\tfrac{1}{8}\frac{p}{D}(a^2-r^2)\left\{\tfrac{1}{8}\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}a^2 - r^2\right) + \tfrac{1}{5}\frac{8+\sigma+\sigma^2}{1-\sigma^2}h^2\right\}. \quad (79)$$

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente am Rande verschwinden mit Ausnahme von $N$, und zwar wird $N = \frac{1}{2}pa$.

Die Mittelebene wird zu der Fläche gebogen, die sich durch Gleichung (79) ausdrückt, und die rechte Seite dieser Gleichung mit umgekehrtem Vorzeichen stellt die Durchbiegung in einem beliebigen Punkte dar. Vergleichen wir dies Resultat mit (57), § 305, so sehen wir, daß bei einer dünnen Platte die von gleichförmig verteilter Last herrührende Durchbiegung im Mittelpunkt dieselbe ist wie diejenige, die von einer konzentrierten Last im Mittelpunkt im Betrage von $\frac{1}{4}(5+\sigma)/(3+\sigma)$ der gesamten verteilten Last herrühren würde.

Die Mittelebene wird gleichmäßig gereckt, und der Betrag der Dehnung eines Linienelements derselben ist $\frac{1}{2}\sigma p/E$. Er ist halb so groß wie die Reckung, die die Mittelebene erfahren würde, wenn die eine Seite der Platte auf einer glatten starren Ebene aufläge und die andere Seite dem Druck $p$ ausgesetzt wäre.

Fasern, die im ungespannten Zustand zu den Seiten der Platte rechtwinklig laufen, bleiben nicht gerade und senkrecht zur Mittelebene. Die krummen Linien, in die sie sich deformieren, haben den durch folgende Gleichung ausgedrückten Typus:

$$U = U_0 + U_1 z + U_3 z^3,$$

wo $U$ die radiale Verschiebung bedeutet und $U_0$, $U_1$, $U_3$ durch die Formeln gegeben sind

$$U_0 = \tfrac{1}{4}\sigma\frac{pr}{E},$$

$$U_1 = -\frac{3pr}{Eh^3}\left[(3+\sigma)(1-\sigma)\frac{a^2}{32} - (1-\sigma^2)\frac{r^2}{32} - (2+9\sigma-\sigma^2)\frac{h^2}{40}\right],$$

$$U_2 = -\frac{pr}{Eh^3}\frac{2+\sigma-\sigma^2}{8}.$$

Diese Linien haben dieselbe Form wie die ursprünglich vertikalen Fasern eines schmalen rechteckigen Balkens, der durch eine Vertikallast gebogen wird (§ 95). Die Tangenten dieser Kurven schneiden die Fläche, zu der die Mittelebene gebogen ist, unter dem Winkel

$$\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{3}{4}(1+\sigma)pr/Eh.$$

## § 310. Biegung einer am Rande eingeklemmten Platte durch gleichförmigen Druck.

Es sei (u, v, w) die Verschiebung eines Punktes der Mittelebene. Wenn die Platte am Rande eingeklemmt ist, so lauten die Bedingungen, die auf der Randlinie zu erfüllen sind,

$$\mathrm{u} = 0, \quad \mathrm{v} = 0, \quad \mathrm{w} = 0, \quad \partial \mathrm{w}/\partial \nu = 0, \tag{80}$$

wo $\nu$ die Richtung der Normalen der Randlinie bezeichnet. Wir suchen diesen Bedingungen durch eine Kombination der Lösungen von § 301, § 303 und § 307 zu genügen. Wir haben

$$\mathrm{u} = \frac{1}{E}\left[\xi - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial x} + \tfrac{1}{4}(1+\sigma)px\right],$$

$$\mathrm{v} = \frac{1}{E}\left[\eta - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial y} + \tfrac{1}{4}(1+\sigma)py\right].$$

In diesen Ausdrücken sind $\xi$ und $\eta$ konjugierte Funktionen von $x$ und $y$, die mit einer ebenen harmonischen Funktion $\Theta_0$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \Theta_0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

und $\chi_0$ hat die Form $\frac{1}{2}x\xi + f$, wo $f$ eine ebene harmonische Funktion. Die Funktionen $\Theta_0$ und $f$ sind so zu wählen, daß u und v auf der Randlinie verschwinden. Eine Möglichkeit, diesen Bedingungen zu genügen, besteht darin, daß wir $\Theta_0$ konstant annehmen. Setzen wir

$$\Theta_0 = -\tfrac{1}{2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}p, \quad \xi = -\tfrac{1}{2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}px, \quad \eta = -\tfrac{1}{2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}py,$$

$$f = \tfrac{1}{8}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}p(x^2-y^2),$$

so erhalten wir

$$\chi_0 = -\tfrac{1}{8}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}p(x^2+y^2);$$

dann verschwinden u und v für alle Werte von $x$ und $y$.

Wir wollen zeigen, daß dies die einzig mögliche Art ist, die Randbedingungen zu befriedigen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$U = \xi - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial x}, \quad V = \eta - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial y}$$

und haben dann zu zeigen, daß es nur auf eine Weise möglich ist, $\Theta_0$, $\xi$, $\eta$, $\chi_0$ so zu wählen, daß $U$ und $V$ auf einer gegebenen Berandung gegebene Werte annehmen. Dies läuft darauf hinaus zu beweisen, daß $U$ und $V$ überall verschwinden, wenn sie am Rande verschwinden. Da $\nabla_1^2 \chi_0 = \Theta_0$, so haben wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{1-\sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Da $\nabla_1^2 \xi = 0$, so gilt

$$\frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0,$$

ebenso

$$\frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0.$$

Daraus folgt, daß

$$\iint\Bigg[U\left\{\frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+ V\left\{\frac{1}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}\Bigg] dx\,dy = 0,$$

wo die Integration über einen beliebigen Teil der Mittelebene erstreckt ist. Wenn sie über das Gebiet innerhalb der Randlinie erstreckt wird und $U$ und $V$ auf der Randlinie verschwinden, so läßt sich das Integral umformen in

$$-\iint\left[\frac{1}{1-\sigma}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

und dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Hieraus folgt, daß $V$ und $U$ konjugierte Funktionen von $x$ und $y$ sind; da sie auf dem Rande verschwinden, verschwinden sie überall.

Die Form von w ist durch die Gleichung gegeben

$$\mathrm{w} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\chi_1' + h^2\Theta_1 - \frac{3}{2^7}\frac{1-\sigma^2}{h^3}p(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{16}\frac{1+\sigma}{h}p(x^2+y^2)\right], \quad (81)$$

wo $\Theta_1$ eine ebene harmonische Funktion und $\nabla^2 \chi_1' = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\Theta_1$. Jede Lösung der Gleichung $D\nabla_1^4 \mathrm{w} = -p$ läßt sich auf diese Form bringen. Zur Bestimmung von w haben wir die Gleichung

$$D\nabla_1^4 \mathrm{w} = -p$$

und die Randbedingungen

$$\mathrm{w} = 0 \text{ und } \partial \mathrm{w}/\partial \nu = 0.$$

Es gibt nur einen Wert von w, der diesen Bedingungen genügt. Wenn w bekannt ist, ist $\Theta_1$ durch die Gleichung

$$\nabla_1^2 \mathrm{w} = \frac{1}{E}\left[-(1-\sigma)\Theta_1 - \frac{3}{8}\frac{1-\sigma^2}{h^3}p(x^2+y^2) + \frac{3}{4}\frac{1+\sigma}{h}p\right] \quad (82)$$

und $\chi_1'$ durch (81) gegeben.

Als Beispiel nehmen wir den Fall einer Kreisplatte vom Radius $a$. Die Durchbiegung w ist durch die Gleichung gegeben

$$\mathrm{w} = -\frac{1}{64}\frac{p}{D}(a^2 - r^2)^2, \quad (83)$$

wo $r$ den Abstand vom Mittelpunkt bezeichnet. Die Durchbiegung im Mittelpunkt beträgt ein Viertel derjenigen, die entstünde, wenn die Gesamtlast im Mittelpunkt konzentriert wäre (§ 305).

Ein anderes Beispiel liefert eine elliptische Platte[1]), deren Rand durch die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ gegeben ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$\mathrm{w} = -\frac{1}{8}\frac{p}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \Big/ \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right). \quad (84)$$

Im Falle der Kreisplatte ist $\Theta_1$ konstant, wie die Gleichungen (82) und (83) zeigen; es empfiehlt sich daher, die Lösung statt in der in § 303 gegebenen Form in der von § 302 anzuwenden. Wir haben

$$\mathrm{w} = -\frac{1}{2}\frac{\beta}{E}r^2 + \frac{1+\sigma}{E}\chi_1 + \frac{3}{16}(1+\sigma)\frac{p}{Eh^3}\left\{h^2 r^2 - \frac{1}{8}(1+\sigma)r^4\right\},$$

wo $\nabla_1^2 \chi_1 = \beta$. Vergleichen wir dies mit (82), so erkennen wir, daß

$$\chi_1 = \frac{1}{4}\beta r^2 - \frac{3}{2^7}(1-\sigma)\frac{pa^4}{h^3}, \quad \beta = -\frac{3}{16}\frac{p}{h^3}(1+\sigma)\left[a^2 - \frac{4h^2}{1-\sigma}\right].$$

Die vollständigen Ausdrücke für die Verschiebungskomponenten sind dann durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{pxz}{D}\left[\frac{1}{16}(a^2 - r^2) + \frac{1}{12}\frac{2-\sigma}{1-\sigma}z^2 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{1-\sigma}\right],\\
v &= -\frac{pyz}{D}\left[\frac{1}{16}(a^2 - r^2) + \frac{1}{12}\frac{2-\sigma}{1-\sigma}z^2 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{1-\sigma}\right],\\
w &= \mathrm{w} + \frac{pz}{D}\left[\frac{1}{24}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}z^3 + \frac{1}{16}\frac{\sigma}{1-\sigma}za^2\right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{8}\frac{\sigma}{1-\sigma}zr^2 - \frac{1}{4}\frac{zh^2}{(1-\sigma)^2} - \frac{1}{3}\frac{1-2\sigma}{(1-\sigma)^2}h^3\right],
\end{aligned}\right\} \quad (85)$$

wo w durch (83) gegeben ist. In diesem Falle wird die Mittelebene dehnungslos gebogen. Linienelemente der Platte, die im ungespannten Zustand normal zur Mittelebene sind, bleiben weder gerade noch senkrecht zur verbogenen Mittelfläche.

---

1) Das Ergebnis wurde dem Verfasser von Prof. G. H. Bryan mitgeteilt.

## § 311. Biegung einer am Rande eingeklemmten Platte durch linear veränderlichen Druck.

Wir suchen den Bedingungen (80) auf der Randlinie durch eine Kombination der Lösungen von § 301, § 303 und § 308 zu genügen. Für u und v haben wir die Ausdrücke

$$u = \frac{1}{E}\left[\xi - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial x} - \tfrac{1}{4}(1+\sigma)p_0 y^2\right],$$

$$v = \frac{1}{E}\left[\eta - (1+\sigma)\frac{\partial \chi_0}{\partial y} + \tfrac{1}{2}(1+\sigma)p_0 xy\right],$$

in denen die unbekannten Funktionen so zu wählen sind, daß u und v auf der Randlinie verschwinden. Wir können genau wie in § 310 zeigen, daß dies nur auf eine Weise möglich ist. Die unbekannten Funktionen hängen von der Form der Randlinie ab.

Ist die Randlinie ein Kreis oder eine Ellipse, so lassen sich die Bedingungen befriedigen, indem man $\xi$, $\eta$, $\Theta_0$, $\chi_0$ folgendermaßen wählt:

$$\xi = \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_1(x^2 - y^2), \quad \eta = \alpha_1 xy, \quad \Theta_0 = \alpha_1 x,$$

$$\chi_0 = \tfrac{1}{4}\alpha_1 x(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{3}\beta_1(x^3 - 3xy^2),$$

wo $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ Konstanten bedeuten. Für einen Kreis vom Radius $a$ würden wir finden

$$\alpha_1 = -\frac{3p_0(1+\sigma)}{6-2\sigma}, \quad \beta_1 = \frac{p_0(3+5\sigma)}{4(6-2\sigma)}, \quad \gamma_1 = -\frac{a^2\sigma(1+\sigma)p_0}{6-2\sigma},$$

und hieraus

$$u = -\frac{\sigma(1+\sigma)p_0}{6-2\sigma}\frac{}{E}(a^2 - r^2), \quad v = 0.$$

Für eine Ellipse, die durch die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ gegeben ist, würden wir finden

$$\alpha_1 = -\frac{(1+\sigma)(a^2+2b^2)p_0}{2a^2(1-\sigma)+4b^2}, \quad \beta_1 = \frac{\{a^2(1+3\sigma)+2b^2(1+\sigma)\}p_0}{4\{2a^2(1-\sigma)+4b^2\}},$$

$$\gamma_1 = -\frac{\sigma(1+\sigma)p_0 a^2 b^2}{2a^2(1-\sigma)+4b^2}$$

und hieraus

$$u = \frac{1}{E}\frac{\sigma(1+\sigma)p_0 a^2 b^2}{2a^2(1-\sigma)+4b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right), \quad v = 0.$$

In diesen Fällen wird die Mittelebene etwas gedehnt.

Weiterhin ist die Form von w durch die Gleichung

$$w = \frac{1}{E}[(1+\sigma)\chi_1' + h^2\Theta_1] - \tfrac{1}{3}\frac{p_0 x}{D}\left[\tfrac{1}{64}(x^2+y^2)^2 - \tfrac{1}{8}\frac{h^2}{1-\sigma}(x^2+3y^2)\right] \quad (86)$$

gegeben, sodaß w der Gleichung

$$D\nabla_1{}^4 w = -p_0 x$$

und auf der Randlinie den Bedingungen

$$w = 0, \quad \partial w/\partial \nu = 0$$

genügt. Hierdurch ist w bestimmt. Wenn w bekannt ist, ist $\Theta_1$ durch die Gleichung gegeben

$$\nabla_1^2 w = -\frac{1-\sigma}{E}\Theta_1 - \frac{p_0 x}{D}\left[\tfrac{1}{8}(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{1-\sigma}\right], \tag{87}$$

und $\chi_1'$ ist durch (86) bestimmt.

Für den Kreis haben wir

$$w = -\frac{1}{192}\frac{p_0 x}{D}(a^2 - r^2)^2; \tag{88}$$

für die Ellipse 1)

$$w = -\frac{1}{24}\frac{p_0 x}{D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \Big/ \left(\frac{5}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\right). \tag{89}$$

## § 312. Biegung einer Platte durch ihr Eigengewicht.

Wenn die Ebene der Platte horizontal ist und die Platte durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird, so ergibt sich die Lösung durch Überlagerung zweier Spannungssysteme. Bei dem einen dieser Spannungssysteme verschwinden alle Spannungskomponenten außer $Z_z$, und $Z_z$ ist gleich $g\varrho(z+h)$, wenn die $z$-Achse vertikal nach oben gerichtet ist. Die entsprechende Verschiebung ist durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} u = -\sigma g\varrho(z+h)x/E, \qquad v = -\sigma g\varrho(z+h)y/E, \\ w = \tfrac{1}{2}g\varrho\{z^2 + 2hz + \sigma(x^2+y^2)\}/E. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Bei dem zweiten Spannungssystem haben wir einen Druck $2g\varrho h$ auf die Seite $z = h$ der Platte, und die Lösung ergibt sich aus der von § 307, wenn $2g\varrho h$ für $p$ geschrieben wird. Die Fläche, zu der sich die Mittelebene biegt, hat die Gleichung

$$w = \frac{g\varrho\sigma}{2E}(x^2+y^2) - \frac{1}{32}\frac{g\varrho h}{D}(x^2+y^2)\left(x^2+y^2 - \frac{8h^2}{1-\sigma}\right), \tag{91}$$

und die Spannungsmomente sind gegeben durch

$$G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2) + \frac{24 + 23\sigma + 3\sigma^2}{80(1-\sigma)} g\varrho h^3,$$

$$G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) + \frac{24 + 23\sigma + 3\sigma^2}{80(1-\sigma)} g\varrho h^3,$$

$$H_1 = D(1-\sigma)\tau.$$

Die Formeln (18) sind angenähert erfüllt, wenn $h$ klein ist.

Um den Randbedingungen bei einer in bestimmter Weise gestützten Platte von gegebener Gestalt zu genügen, müssen wir mit

1) Das Resultat wurde dem Verfasser von Prof. G. H. Bryan mitgeteilt.

der hier angegebenen Lösung solche Lösungen kombinieren, wie sie in § 301 und § 303 behandelt wurden, und letztere so bestimmen, daß diese Bedingungen erfüllt werden.

## § 313. Näherungstheorie der Biegung einer Platte durch Querkräfte.[1])

Bei allen bisher gefundenen Lösungen trafen die Formeln (18), § 298, entweder genau oder angenähert zu. Wir dürfen hieraus wohl den Schluß ziehen, daß bei einer durch Querkräfte schwach gebogenen Platte diese Gleichungen als brauchbare Näherungsformeln für die Spannungsmomente angesehen werden können. Bei einer derartig gebogenen Platte lauten die betreffenden Gleichgewichtsgleichungen

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+Z'=0,\quad \frac{\partial H_1}{\partial x}-\frac{\partial G_2}{\partial y}+N_2=0,\quad \frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial H_1}{\partial y}-N_1=0.$$

Eliminieren wir aus ihnen $N_1$ und $N_2$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x\,\partial y}+Z'=0,$$

und wenn wir hierin (17) und (18) einführen, so finden wir

$$D\nabla_1{}^4 \mathrm{w}=Z'. \tag{92}$$

Die Spannungsmomente $G$, $H$ am Rande sind gemäß (17) und (18) durch die Formeln gegeben

$$G=-D\left\{\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \nu^2}+\sigma\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2}+\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \nu}\right)\right\},\quad H=D(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}\right).$$

Um die Schubkraft $N$ in Richtung der Normalen der Plattenebene auszudrücken, bemerken wir, daß

$$N=\cos\theta\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}-\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial G_2}{\partial y}-\frac{\partial H_1}{\partial x}\right);$$

führen wir hierin (17) und (18) ein, so erhalten wir die Formel

$$N=-D\frac{\partial}{\partial \nu}\nabla_1{}^2 \mathrm{w}. \tag{93}$$

Zur Bestimmung der Normalverschiebung w der Mittelebene haben wir die Differentialgleichung (92) und die Bedingungen, die am Rande der Platte gelten. An einem eingeklemmten Rande verschwinden w und $\partial \mathrm{w}/\partial \nu$, an einem gestützten Rande verschwinden w und $G$, an einem Rande, an dem gegebene Kräfte angreifen, haben $N-\partial H/\partial s$ und $G$ gegebene Werte.

---

1) Bezüglich der für die Näherungstheorie in Betracht kommenden Autoren siehe *Einleitung*, p. 33—35. Eine allgemeine Begründung, die sich auf denselben Linien bewegt wie die Näherungstheorie für Stäbe (§ 258), wird sich in § 329 (Kap. XXIV) ergeben. Eine eingehende Untersuchung betreffs strenger Lösungen für verschiedene Lastverteilungen hat J. Dougall, *Edinburgh R. Soc. Trans.*, vol. 41 (1904), gegeben. Diese Untersuchung lehrt, daß die Näherungstheorie in allen praktisch wichtigen Fällen sich bestätigt findet.

Dieselbe Differentialgleichung und dieselben Randbedingungen würden wir nach der Energiemethode erhalten, ausgehend von Formel (21) für die potentielle Energie pro Flächeneinheit der Mittelebene.[1])

Bei allen bisher gefundenen Lösungen war die Differentialgleichung (92) erfüllt, mochten die Formeln (18) und (21) streng oder nur angenähert gelten.[2]) Die Lösungen, die das in diesem Paragraphen beschriebene Näherungsverfahren geliefert haben würde, weichen von den strengen Lösungen, die sich nach den in früheren Paragraphen geschilderten Methoden ergeben, nur um sehr kleine Größen ab, welche von den kleinen Korrektionen abhängen, die in den Formeln (18) für die Spannungsmomente anzubringen wären. Im allgemeinen wird die Form der gebogenen Platte mit hinreichender Annäherung nach der in diesem Paragraphen entwickelten Methode bestimmt.

## § 314. Anwendungen der Näherungstheorie.

(a) *Symmetrisch belastete Kreisplatte.*[3])

Wenn eine Kreisplatte vom Radius $a$ eine Last $Z'$ pro Flächeneinheit trägt, die eine Funktion des Abstandes $r$ vom Kreismittelpunkt ist, so geht Gleichung (92) über in

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial r}\right)\right\}\right] = Z'/D,$$

wobei die Richtung der Verschiebung w mit der der Last $Z'$ übereinstimmt. Wir verzeichnen die Resultate für eine Reihe von Fällen.

1) Ist die Gesamtlast $W$ gleichförmig verteilt und die Platte am Rande gestützt, so ist

$$\mathrm{w} = \frac{W}{64\pi a^2 D}(a^2 - r^2)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}a^2 - r^2\right).$$

2) Ist die Gesamtlast $W$ gleichförmig verteilt und die Platte am Rande eingeklemmt, so ist

$$\mathrm{w} = \frac{W}{64\pi a^2 D}(a^2 - r^2)^2.$$

3) Ist die Last $W$ im Mittelpunkt konzentriert und die Platte am Rande gestützt, so ist

$$\mathrm{w} = \frac{W}{8\pi D}\left[-r^2\log\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(a^2 - r^2)\right].$$

1) Die Variation ist durchgeführt von Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, § 215.

2) Eine allgemeinere Form, die die Gleichung (92) in den behandelten Spezialfällen in sich schließt, gibt J. H. Michell, *loc. cit.* p. 535.

3) Die allgemeine Form der Lösung und die speziellen Lösungen 1) — 4) gab Poisson in seiner Abhandlung vom Jahre 1828. Siehe *Einleitung*, Fußnote 36. Lösungen, die sich mit den unter 5) und 6) verzeichneten decken, gab Saint-Venant in der Clebsch-Ausgabe, *Note du* § 45.

4) Ist die Last $W$ im Mittelpunkt konzentriert und die Platte am Rande eingeklemmt, so ist

$$w = \frac{W}{8\pi D}\left[-r^2 \log\frac{a}{r} + \tfrac{1}{2}(a^2 - r^2)\right].$$

5) Ist die Gesamtlast $W$ über den Umfang eines Kreises vom Radius $b$ verteilt und die Platte am Rande gestützt, so nimmt w verschiedene Formen an, je nachdem $r >$ oder $< b$. Wir finden

$$w_{r<b} = \frac{W}{8\pi D}\left[-(r^2 + b^2)\log\frac{a}{b} + (r^2 - b^2) + \frac{(3+\sigma)a^2 - (1-\sigma)b^2}{2(1+\sigma)a^2}(a^2 - r^2)\right],$$

$$w_{r>b} = \frac{W}{8\pi D}\left[-(r^2 + b^2)\log\frac{a}{r} + \frac{(3+\sigma)a^2 - (1-\sigma)b^2}{2(1+\sigma)a^2}(a^2 - r^2)\right].$$

6) Ist die Gesamtlast $W$ über den Umfang eines Kreises vom Radius $b$ verteilt und die Platte am Rande eingeklemmt, so finden wir

$$w_{r<b} = \frac{W}{8\pi D}\left[-(r^2 + b^2)\log\frac{a}{b} + (r^2 - b^2) + \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(a^2 - r^2)\right],$$

$$w_{r>b} = \frac{W}{8\pi D}\left[-(r^2 + b^2)\log\frac{a}{r} + \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)(a^2 - r^2)\right].$$

(b) *Anwendung des Inversionsverfahrens.*[1])

Die Lösungen unter (a), 3) und 4), oder auch die in § 305 zeigen, daß in der Nähe eines Punktes, in dem ein Druck $P$ angreift, die Verschiebung w in Richtung des Drucks von der Form $(P/8\pi D)r^2 \log r + \zeta$ ist, wo $\zeta$ eine analytische Funktion von $x$ und $y$, die in und nahe bei dem Punkte keine Singularitäten besitzt, und $r$ der Abstand von dem Punkte.

Da w die Gleichung $\nabla_1^4 w = 0$ in allen Punkten, in denen keine Last wirkt, befriedigt, so können wir das in § 154 dargelegte Inversionsverfahren anwenden. Es sei $O'$ ein beliebiger Punkt in der Ebene der Platte, $P$ ein Punkt der Platte, $P'$ der zu $P$ inverse Punkt, wenn $O'$ das Inversioszentrum, $x'$, $y'$ die Koordinaten von $P'$, $R'$ der Abstand des Punktes $P'$ von $O'$, w' diejenige Funktion von $x'$, $y'$, in die w durch die Inversion übergeht. Dann genügt $R'^2 w'$ der Gleichung $\nabla_1'^4(R'^2 w') = 0$, wo $\nabla_1'^4$ den Operator $\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2}$ bedeutet.

Es ist klar, daß wenn w und $\partial w/\partial \nu$ auf einer beliebigen Randkurve verschwinden, $R'^2 w'$ und $\partial(R'^2 w')/\partial \nu'$ auf der transformierten Randkurve verschwinden, wo $\nu'$ die Richtung der Normalen dieser Kurve bedeutet.

Wir wenden dies Verfahren auf eine am Rande eingeklemmte und in

1) J. H. Michell, *London Math. Soc. Proc*, vol. 34 (1902), p. 223.

einem Punkte $O$ belastete Platte an. Es sei $O'$ der zu $O$ in bezug auf den Kreis inverse Punkt, $C$ der Mittelpunkt des Kreises und $a$ der Radius; $c$ sei der Abstand des Punktes $O$ von $C$. Die Lösung für die am Rande eingeklemmte Platte, die in $C$ eine Last $W$ trägt, ist

$$w = \frac{W}{8\pi D}\left[-r^2 \log\frac{a}{r} + \tfrac{1}{2}(a^2 - r^2)\right],$$

wo $r$ den Abstand eines beliebigen Punktes $P$ von $C$ bedeutet. Nun invertieren wir die Figur von $O'$ aus mit der Inversionskonstanten $a^4/c^2 - a^2$. Der Kreis invertiert sich in sich selbst, $C$ geht in $O$ und $P$ in $P'$ über, wo

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{a^2/c},$$

wenn $OP' = R$ und $O'P' = R'$. Somit ist $R'^2 w'$ gleich

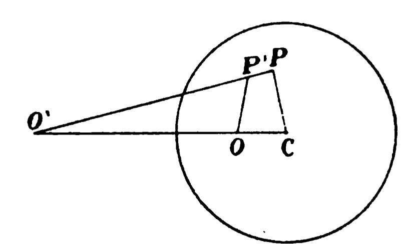


Fig. 70.

$$\frac{W}{8\pi D}R'^2\left[-\frac{a^4 R^2}{c^2 R'^2}\log\frac{cR'}{aR} + \tfrac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^4 R^2}{c^2 R'^2}\right)\right]$$

oder gleich

$$\frac{Wa^4}{8\pi c^2 D}\left[-R^2 \log\frac{cR'}{aR} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}R'^2 - R^2\right)\right].$$

Daraus folgt, daß die Verschiebung w einer am Rande eingeklemmten Kreisplatte, die im Punkte $O$ (im Abstande $c$ vom Mittelpunkt) eine Last $W'$ trägt, durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$w = \frac{W'}{8\pi D}\left[-R^2 \log\frac{cR'}{aR} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}R'^2 - R^2\right)\right], \tag{94}$$

wo $R$ den Abstand eines beliebigen Punktes der Platte von $O$ und $R'$ den Abstand desselben Punktes von $O'$, dem zu $O$ bezüglich des Kreises inversen Punkte, bedeutet.

Wir können zur Grenze übergehen, indem wir $a$ unbegrenzt wachsen lassen. Wir haben dann eine Platte, die längs einer geraden Kante eingeklemmt und in einem Punkte $a$ belastet ist. Ist $O'$ das optische Bild von $O$ in bezug auf den geradlinigen Rand, so ist die Verschiebung in Richtung der Last gegeben durch

$$w = \frac{W'}{8\pi D}\left[-R^2 \log\frac{R'}{R} + \tfrac{1}{2}(R'^2 - R^2)\right], \tag{95}$$

wo $R$, $R'$ die Abstände eines beliebigen Punktes der Platte von den Punkten $O$ und $O'$ bezeichnen.

In diesen beiden Fällen hat Michell (*loc. cit.*) die Konturlinien gezeichnet.

(c) *Rechteckige Platte, in zwei gegenüberliegenden Kanten gestützt.*

Der Koordinatenanfang möge mit einer Ecke, die $x$- und die $y$-Achse mit zwei Kanten zusammenfallen, die beiden anderen Kanten seien durch $x = 2a$, $y = 2b$ gegeben. Wir entwickeln $Z'$ in der Form

$$Z' = \sum\sum Z_{mn} \sin\frac{m\pi x}{2a} \sin\frac{n\pi y}{2b},$$

wo $m$ und $n$ ganze Zahlen. Eine partikuläre Lösung von Gleichung (92) ist dann

$$w_1 = \frac{16 Z}{\pi^4 D} \sum\sum Z_{mn} \frac{\sin(m\pi x/2a)\sin(n\pi y/2b)}{m^4/a^4 + n^4/b^4 + 2m^2n^2/a^2b^2}.$$

Sind die Kanten $x = 0$ und $x = 2a$ gestützt, so genügt diese Lösung den Randbedingungen auf diesen Kanten. Sind alle vier Kanten gestützt, so befriedigt die Lösung alle Bedingungen; sind aber die beiden anderen Kanten nicht einfach gestützt, so haben wir eine Lösung $w_2$ der Gleichung $\nabla_1^4 w_2 = 0$ so zu bestimmen, daß die Summe $w_1 + w_2$ den Bedingungen auf $y = 0$ und $y = 2b$ genügt. Wir setzen $w_2$ in der Form an[1])

$$w_2 = \sum Y_m \sin\frac{m\pi x}{2a},$$

wo $Y_m$ eine Funktion von $y$, aber nicht von $x$ ist. Dann erfüllt $Y_m$ die Gleichung

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - \frac{m^2\pi^2}{2a^2}\frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \frac{m^4\pi^4}{16a^4} Y_m = 0,$$

und das vollständige Integral derselben hat die Form

$$Y_m = A_m \cosh\frac{m\pi y}{2a} + B_m \sinh\frac{m\pi y}{2a} + y\left(A_m' \cosh\frac{m\pi y}{2a} + B_m' \sinh\frac{m\pi y}{2a}\right),$$

wo $A_m$, $B_m$, $A_m'$, $B_m'$ unbestimmte Konstanten. Die Konstanten lassen sich so wählen, daß die Randbedingungen auf $y = 0$ und $y = 2b$ befriedigt werden.[2])

(d) *Querschwingungen von Platten.*

Die Schwingungsgleichung ergibt sich ohne weiteres aus (92), wenn wir für $Z'$ den Ausdruck $-2\varrho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ einsetzen. Wir erhalten

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{2\varrho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (96)$$

Führt die Platte eine Normalschwingung aus, so ist w von der Form $W\cos(pt + \varepsilon)$, wo W eine Funktion von $x$ und $y$, die der Gleichung

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{3\varrho(1-\sigma)p^2}{Eh^2} W$$

genügt; die möglichen Werte von $p$ bestimmen sich durch Anpassung der Lösung dieser Gleichung an die Randbedingungen. Aus der Form des

1) Dieser Gedanke rührt her von M. Lévy, *Paris C. R.*, t. 129 (1899).

2) Den Fall vier gestützter Kanten behandelt Saint-Venant in der Clebsch-Ausgabe, *Note du* § 73. Eine ausführliche Erledigung einer Reihe von Fällen gibt E. Estanave, „Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque . ." (*Thèse*), Paris 1900. Elastische Konstanten werden zuweilen durch Beobachtung der Mittelpunkts-Durchbiegung einer rechteckigen Platte bestimmt, die in zwei gegenüberliegenden Kanten gestützt und im Mittelpunkt belastet ist; siehe A. E. H. Tutton, *Phil. Trans. R. Soc.* (Ser. A), vol. 202 (1903).

Koeffizienten von W auf der rechten Seite dieser Gleichung geht hervor, daß die Schwingungszahlen der Dicke direkt und dem Quadrat der linearen Abmessung des von der Randlinie begrenzten Flächenstücks umgekehrt proportional sind.

Die Theorie derjenigen Querschwingungen einer Kreisplatte, bei denen die Verschiebung W eine Funktion der Entfernung vom Mittelpunkt ist, wurde von Poisson[1]) entwickelt, und die zahlenmäßige Bestimmung der Frequenzen der tiefsten Schwingungen wurde von ihm durchgeführt. In diesem Falle werden die von ihm angenommenen Randbedingungen mit den Kirchhoffschen identisch, weil das Drillungsmoment $H$, das zu irgend einem mit der Randlinie konzentrischen Kreise gehört, verschwindet. Die allgemeine Theorie der Querschwingungen einer Kreisplatte wurde später von Kirchhoff aufgestellt[2]), der in erschöpfender Weise die Ergebnisse numerisch diskutierte. Das Problem ist außerdem sehr eingehend von Lord Rayleigh[3]) behandelt. Die freien Schwingungen einer quadratischen oder rechteckigen Platte sind theoretisch bisher nicht bestimmt worden. Den Fall elliptischer Platten haben E. Mathieu[4]) und A. Barthélémy[5]) untersucht.

(e) *Dehnungsschwingungen von Platten.*

In gleicher Weise können wir diejenigen freien Schwingungen einer Platte, bei denen keine transversale Verschiebung der Punkte der Mittelebene auftritt, untersuchen, indem wir für die Spannungsresultanten $T_1$, $T_2$, $S_1$ die Näherungsformeln [vgl. § 301, 4)]

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma\frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$
$$S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

bezw. für die potentielle Energie pro Flächeneinheit der Mittelebene die Formel

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2(1-\sigma\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\right]$$

ansetzen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} = 2\varrho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = 2\varrho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tfrac{1}{2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}(1+\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} &= \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \tfrac{1}{2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \tfrac{1}{2}(1+\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

---

1) In der Abhandlung vom Jahre 1828, die in der *Einleitung,* Fußnote 36, angezogen wurde.

2) *J. f. Math.* (*Crelle*), Bd. 40 (1850) = *Ges. Abhandlungen,* p. 237 = *Vorlesungen über math. Physik, Mechanik,* Vorlesung 30.

3) *Theory of Sound,* vol. 1, Kap. X.

4) *J. de math.* (*Liouville*), (Sér. 2), t. 14 (1869).

5) *Mém. de l'Acad. de Toulouse,* t. 9 (1877).

An einem freien Rande verschwinden $T$, $S$. Die Form der Gleichungen zeigt, daß eine völlige Scheidung der mit Querverschiebung oder Biegung verbundenen Schwingungen von denjenigen, die Verschiebung in der Ebene der Platte oder Dehnung aufzeigen, stattfindet und daß bei letzteren die Frequenzen von der Plattendicke unabhängig sind, während sie bei ersteren der Dicke proportional sind.

Die hier gegebene Behandlung der Theorie der Platten ist als eine vorläufige anzusehen. Eine ins einzelne gehende Untersuchung der Normalschwingungen und Frequenzen bei transversaler Schwingung erscheint überflüssig, da dieselben von den bereits zitierten Schriftstellern genau erforscht sind. Einige spezielle Resultate betreffend Dehnungsschwingungen sind in einer Bemerkung am Ende des Buches angegeben. Eine weitergehende Behandlung der Theorie, auf die sich die Schwingungsgleichungen gründen, werden wir in Kap. XXIV geben. Siehe insbesondere § 333.

## Kapitel XXIII.

### Dehnungslose Deformation krummer Platten oder Schalen.

§ 315. Eine krumme Platte oder Schale läßt sich durch ihre Mittelfläche, ihre Randlinie und ihre Dicke definieren. Die Dicke sei konstant und werde mit $2h$ bezeichnet, sodaß jede Normale der Mittelfläche die Seiten der Schale in zwei Punkten trifft, die von der Mittelfläche in entgegengesetztem Sinne um das Stück $h$ entfernt sind. Wir wollen annehmen, daß der Rand der Platte die Mittelfläche rechtwinklig durchsetzt; die Schnittkurve ist die Randlinie. Der Fall, wo die Platte oder Schale offen ist, sodaß ein Rand wirklich vorhanden ist, ist weit wichtiger als der Fall einer geschlossenen Schale, weil eine offene Schale, z. B. eine berandete ebene Platte, durch Biegung eine beträchtlich abweichende Form erhalten kann, ohne Verzerrungen zu erleiden, die die für die Anwendung der mathematischen Elastizitätstheorie zulässige Größe überschreiten.

Dieselbe Möglichkeit großer Gestaltänderungen bei kleinen Verzerrungen ist, wie wir in Kap. XVIII sahen, für das Verhalten eines dünnen Stabes charakteristisch; es besteht jedoch ein wichtiger Unterschied zwischen der Theorie der Stäbe und der der Platten, der von einer Beschränkung in geometrischer Beziehung herrührt. Die Dehnung eines beliebigen Linienelements der Mittelfläche einer verzerrten Platte oder Schale muß, ebenso wie die Dehnung der Zentrallinie eines verzerrten Stabes, klein sein. Im Falle eines Stabes beschränkt diese Bedingung die Gestalt der verzerrten Zentrallinie in keiner Weise, und diese läßt sich wie in Kap. XIX und XXI bestimmen, indem man die Zentrallinie als ungedehnt annimmt. Im Falle der Schale jedoch hat die Bedingung, daß kein Linienelement der Mittelfläche seine Länge ändert, die Beschränkung der verzerrten Mittelfläche auf eine bestimmte Schar von Flächen zur Folge, nämlich derjenigen, die auf die unverzerrte Mittelfläche verbiegbar sind.[1]) In dem besonderen

1) Was die Literatur über die Theorie der aufeinander verbiegbaren Flächen anbetrifft, so verweisen wir auf den Artikel von A. Voß, „Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander“ in der *Ency. d. math. Wiss.*, IIID6a.

Falle einer ebenen Platte muß die verzerrte Mittelfläche, wenn die Verschiebung dehnungslos ist, eine abwickelbare Fläche sein. Da die Mittelfläche nur eine geringe Dehnung erfahren darf, kann sich die verzerrte Mittelfläche immer nur wenig von einer der Flächen unterscheiden, die auf die unverzerrte Mittelfläche verbiegbar sind; mit anderen Worten, sie muß aus einer solchen Fläche durch eine Verschiebung abzuleiten sein, die überall klein ist.

## § 316. Krümmungsänderung bei dehnungsloser Deformation.

Wir beginnen mit dem Fall, wo die Mittelfläche dehnungslos deformiert wird durch eine Verschiebung, die überall klein ist.

Die Gleichungen der Krümmungslinien seien dargestellt durch $\alpha =$ const. und $\beta =$ const., wo $\alpha$ und $\beta$ Funktionen des Ortes auf der Fläche; $R_1$, $R_2$ seien die Krümmungsradien der Fläche in einem beliebigen Punkte, und zwar sei $R_1$ der Krümmungsradius desjenigen durch die Normale in dem Punkte gelegten Schnitts, der die Tangente an die betreffende Kurve aus der $\beta$-Schar (längs welcher $\alpha$ variiert) enthält. Wenn die Schale ohne Dehnung der Mittelfläche deformiert wird, gehen die Kurven $\alpha =$ const. und $\beta =$ const. in zwei Kurvenscharen auf der verzerrten Mittelfläche über, die sich rechtwinklig schneiden, im allgemeinen aber nicht Krümmungslinien der deformierten Fläche sind. Die Krümmung dieser Fläche kann durch ihre Hauptkrümmungsradien und durch die Winkel, unter denen ihre Krümmungslinien die Kurven $\alpha$ und $\beta$ schneiden, bestimmt werden. Es seien $\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_2}$ die neuen Krümmungsradien in einem Punkte. Da die Fläche ohne Reckung gebogen wird, so bleibt das Krümmungsmaß ungeändert[1]), d. h. wir haben

$$\left(\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1 R_2},$$

oder bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $\delta\frac{1}{R_1}$ und $\delta\frac{1}{R_2}$

$$\frac{1}{R_2}\,\delta\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\,\delta\frac{1}{R_2} = 0. \tag{1}$$

Es sei nun $\psi$ der Winkel, unter dem die der Hauptkrümmung $\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}$ entsprechende Krümmungslinie die Kurve $\beta =$ const. auf der deformierten Fläche schneidet; $R_1'$, $R_2'$ seien die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte dieser Fläche, die durch die Tangenten der Kurven $\beta =$ const. und $\alpha =$ const. gelegt sind. Im allgemeinen muß

1) Der Satz rührt her von Gauß, „Disquisitiones generales circa superficies curvas", *Göttingen Comm. Rec.*, t. 6 (1828) = *Werke*, Bd. 4, p. 217. Vgl. Salmon *Geometry of three dimensions*, 4. Aufl., p. 355.

$\psi$ klein sein, und $R_1'$, $R_2'$ dürfen sich nur wenig von $R_1$, $R_2$ unterscheiden. Die Indikatrix der Fläche, bezogen auf die mit diesen Tangenten zusammenfallenden $(x, y)$-Achsen, ist durch die Gleichung gegeben

$$\frac{x^2}{R_1'} + \frac{y^2}{R_2'} + xy \operatorname{tg} 2\psi \left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right) = \text{const.}$$

Bezogen auf die $(\xi, \eta)$-Achsen, die mit den Tangenten der Krümmungslinien zusammenfallen, lautet die Gleichung der Indikatrix

$$\xi^2\left(\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}\right) + \eta^2\left(\frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_2}\right) = \text{const.},$$

und wir haben daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_2}, \\ \frac{1}{R_1'R_2'} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2\psi\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 &= \left(\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1 R_2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Biegung der Fläche bestimmt sich durch die drei Größen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$, die durch die Gleichungen definiert sind

$$\varkappa_1 = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2}, \quad \tau = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\psi\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right). \quad (3)$$

Die Krümmung $1/R'$ des Normalschnitts, der durch diejenige Tangente der verzerrten Mittelfläche gelegt ist, die mit der Kurve $\beta = \text{const.}$ einen Winkel $\omega$ einschließt, ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\omega}{R_1'} + \frac{\sin^2\omega}{R_2'} + 2\tau \sin\omega\cos\omega$$

gegeben, und die Krümmung $\frac{1}{R}$ des entsprechenden Normalschnitts der unverzerrten Mittelfläche ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2},$$

sodaß die Krümmungsänderung in diesem Normalschnitt durch die Gleichung

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \varkappa_1 \cos^2\omega + \varkappa_2 \sin^2\omega + 2\tau \sin\omega\cos\omega \quad (4)$$

dargestellt ist. Wir werden $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ kurzweg die *Krümmungsänderungen* nennen.

Im allgemeinen, wenn $R_1 \neq R_2$, liefern die Gleichungen (2) bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung

$$\delta\frac{1}{R_1} = \varkappa_1, \quad \delta\frac{1}{R_2} = \varkappa_2, \quad \frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\varkappa_2}{R_1} = 0.$$

Wenn es sich z. B. um einen Zylinder oder eine beliebige abwickelbare Fläche handelt und die Kurven $\beta = \text{const.}$ die Erzeugenden sind, so verschwindet $\varkappa_1$ und $\operatorname{tg} 2\psi = -2\tau R_2$.

Der Fall einer Kugel stellt sich wegen der Unbestimmtheit der Krümmungslinien etwas exzeptionell. In diesem Falle erhalten wir, wenn wir $R_1 = R_2$ setzen, aus (1)

$$\delta\frac{1}{R_1} = -\delta\frac{1}{R_2} = \delta\frac{1}{R} \text{ etwa;}$$

bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung finden wir

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0, \quad \operatorname{tg} 2\psi = 2\tau/(\varkappa_1 - \varkappa_2) = \tau/\varkappa_1,$$

und bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung gilt

$$\left(\delta\frac{1}{R}\right)^2 = -\varkappa_1\varkappa_2 + \tau^2 = \varkappa_1{}^2 + \tau^2;$$

$\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind jedoch nur dann gleich $\delta\frac{1}{R_1}$ bezw. gleich $\delta\frac{1}{R_2}$, wenn $\tau = 0$, und $\psi$ ist nur dann klein, wenn $\tau$ klein ist gegen $\varkappa_1$.

Das Resultat, daß bei einem ohne Dehnung schwach deformierten Zylinder $\varkappa_1 = 0$ ist, also keine Krümmungsänderung in den die Erzeugenden enthaltenden Normalschnitten eintritt, verzeichnet Lord Rayleigh als „das Prinzip der Metallfältelung". Das Ergebnis, das hier in der Form $\varkappa_1/R_2 + \varkappa_2/R_1 = 0$ erhalten wurde, zieht er auch zur Erklärung des Verhaltens des Bourdonschen Manometers heran.[1])

## § 317. Typische Biegungsverzerrung.

Wir denken uns einen Verzerrungszustand in der Schale, bei dem die Linienelemente der Mittelfläche ihre Länge nicht ändern, während die ursprünglich zur unverzerrten Mittelfläche normalen Linienelemente gerade bleiben, zur verzerrten Mittelfläche normal werden und weder Dehnung noch Verkürzung erfahren. Wir beziehen die diesem Zustand entsprechenden Verzerrungskomponenten auf ein $(x, y, z)$-Koordinatensystem, dessen Achsen in die Tangenten der durch einen Punkt $P_1$ der verzerrten Mittelfläche gehenden Kurven $\beta$ und $\alpha$ und in die Normale dieser Fläche in $P_1$ fallen. Es sei $P$ derjenige Punkt der unverzerrten Mittelfläche, der durch die Verschiebung in $P_1$ übergeht; $\delta s$ sei ein Bogenelement einer Kurve, die von $P$ ausgeht und auf der unverzerrten Fläche verläuft; ferner sei $R$ der Krümmungsradius in dem Normalschnitt der Fläche, der durch die Tangente von $s$ in $P$ gelegt ist. Die Normalen der Mittelfläche in den Punkten von $s$ schneiden eine Fläche, die zur Mittelfläche in einem kleinen Abstand $z$ parallel läuft, in einer entsprechenden Kurve, und die Länge des entsprechenden Bogenelements dieser Kurve ist annähernd gleich $\{(R - z)/R\}\delta s$.[2]) Wenn die Fläche so gebogen wird, daß $R$

1) *Proc. R. Soc.*, vol. 45 (1889), p. 105 = *Scientific Papers,* vol. 3, p. 217.

2) In der Nähe eines Punktes der Mittelfläche kann $2\zeta = \xi^2/R_1 + \eta^2/R_2$

in $R'$ übergeht und $z$ und $\delta s$ ungeändert bleiben, so wird jenes Bogenelement annähernd gleich $\{(R'-z)/R'\}\delta s$. Mithin ist die Dehnung[1]) dieses Elements gleich

$$\left(\frac{R'-z}{R'}-\frac{R-z}{R}\right)\Big/\frac{R-z}{R}, \text{ oder angenähert gleich } -z\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right).$$

Die Tangente an $s$ in $P$ schneide die Kurve $\beta$ in $P$ unter einem Winkel $\omega$. Die Richtung der entsprechenden Kurve auf der Parallelfläche ist nahezu dieselbe; die Dehnung des Bogenelements dieser Kurve läßt sich ausdrücken durch

$$e_{xx}\cos^2\omega + e_{yy}\sin^2\omega + e_{xy}\sin\omega\cos\omega.$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke für diese Dehnung einander gleich und benutzen (4), so finden wir

$$e_{xx}\cos^2\omega + e_{yy}\sin^2\omega + e_{xy}\sin\omega\cos\omega = \\ -z(\varkappa_1\cos^2\omega + \varkappa_2\sin^2\omega + 2\tau\sin\omega\cos\omega),$$

mithin

$$e_{xx} = -z\varkappa_1, \quad e_{yy} = -z\varkappa_2, \quad e_{xy} = -2z\tau.$$

Bei dem gedachten Verzerrungszustand verschwinden $e_{zx}$, $e_{yz}$, $e_{zz}$. Mit dieser Verzerrung können wir irgend eine Verzerrung kombinieren, bei der die ursprünglich zur unverzerrten Mittelfläche normalen Linienelemente gedehnt oder gekrümmt oder zur verzerrten Mittelfläche geneigt werden. Der wichtigste Fall ist der, wo auf die zur Mittelfläche parallelen Flächen keine Spannung wirkt. In diesem Falle verschwinden die mit $X_z$, $Y_z$, $Z_z$ bezeichneten Spannungskomponenten, und die Verzerrungskomponenten $e_{zx}$, $e_{yz}$, $e_{zz}$ sind durch die Gleichungen gegeben

$$e_{zx} = 0, \quad e_{yz} = 0, \quad e_{zz} = -\{\sigma/(1-\sigma)\}(e_{xx}+e_{yy}),$$

wo $\sigma$ die Poissonsche Konstante des als isotrop vorausgesetzten Materials. Bei diesem Verzerrungszustand bleiben die ursprünglich zur unverzerrten Mittelfläche normalen Linienelemente gerade, werden normal zur verzerrten Mittelfläche und erfahren eine gewisse Dehnung, die durch den oben hingeschriebenen Wert von $e_{zz}$ gekennzeichnet ist. Es ist klar, daß diese Dehnung nur geringe Abweichungen[2]) in den

als Gleichung der Fläche angenommen werden, und die Koordinaten des Punktes, in dem die Normale in $(\xi', \eta')$ die Parallelfläche treffen, werden, wie sich durch Aufstellung der Gleichungen der Normalen zeigen läßt, annähernd gleich $\xi'(1-z/R_1)$ und $\eta'(1-z/R_2)$. Setzen wir $\xi' = \delta s\cdot\cos\omega$, $\eta' = \delta s\cdot\sin\omega$ und vernachlässigen $z^2/R_1^2$ und $z^2/R_2^2$, so erhalten wir das im Text angegebene Resultat.

1) Vgl. Lord Rayleigh, *Theory of Sound,* 2. Aufl., p. 411.

2) Die vollständigere Untersuchung von § 327 wird zeigen, daß derartige Abweichungen nicht gänzlich zu vernachlässigen sind.

Ausdrücken für $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{xy}$ mit sich bringen kann, und wir können daher folgende Näherungsausdrücke für die Verzerrungskomponenten ansetzen:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} = -z\varkappa_1, \quad e_{yy} = -z\varkappa_2, \quad e_{zz} = \frac{\sigma}{1-\sigma}z(\varkappa_1 + \varkappa_2), \\ e_{xy} = -2\tau z, \quad e_{zx} = e_{yz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieser Verzerrungszustand mag als *typische Biegungsverzerrung* (engl. *typical flexural strain*) bezeichnet werden.

Die entsprechenden Spannungskomponenten sind

$$X_x = -\frac{E}{1-\sigma^2}z(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \quad Y_y = -\frac{E}{1-\sigma^2}z(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1),$$

$$X_y = -\frac{E}{1+\sigma}z\tau, \quad X_z = Y_z = Z_z = 0,$$

wo $E$ der Youngsche Modul des Materials. Die Verzerrungsenergie-Funktion nimmt die Gestalt an

$$\frac{1}{2}\frac{Ez^2}{1-\sigma^2}[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2)].$$

Die *potentielle Energie der Biegung*, bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelfläche, ergibt sich, wenn wir obigen Ausdruck nach $z$ zwischen den Grenzen $-h$ und $h$ integrieren, wo $2h$ die Dicke der Schale. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}D[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2)], \tag{6}$$

wo $D$ die „Biegungssteifigkeit" (engl. „flexural rigidity") $\frac{2}{3}Eh^3/(1-\sigma^2)$. Im Falle eines Zylinders oder einer abwickelbaren Fläche wird dieser Ausdruck gleich $\frac{1}{2}D\{\varkappa_2^2 + 2(1-\sigma)\tau^2\}$. Im Falle einer Kugel wird er gleich $\frac{4}{3}\mu h^3(\varkappa_1^2 + \tau^2)$ oder gleich $\frac{4}{3}\mu h^3\left(\delta\frac{1}{R}\right)^2$, wo $\mu$ die Steifigkeit des Materials.[1])

## § 318. Verfahren zur Berechnung der Krümmungsänderungen.

Die Bedingungen, die die Verschiebung erfüllen muß, wenn die Mittelfläche keine Dehnung erleiden soll, lassen sich durch ein direktes Verfahren ermitteln. Es sei $A\delta\alpha$ das zwischen zwei Kurven $\alpha$ und $\alpha + \delta\alpha$ liegende Bogenelement einer Kurve $\beta = \text{const.}$, $B\delta\beta$ das zwischen zwei Kurven $\beta$ und $\beta + \delta\beta$ liegende Bogenelement einer Kurve $\alpha = \text{const.}$, ferner seien $x'$, $y'$, $z'$ die auf geeignete Achsen bezogenen Koordinaten eines Punktes der verzerrten Mittelfläche. Wir drücken $x'$, $y'$, $z'$ durch die Koordinaten des Punktes vor der Verzerrung und

1) Diese Werte gebraucht Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 2. Aufl., Kap. X A.

die Verschiebungskomponenten aus. Da Kurven auf der Mittelfläche ihre Länge nicht ändern und nach der Verzerrung sich unter demselben Winkel schneiden wie vor der Verzerrung, so haben wir

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{1}{B}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial x'}{\partial \beta} + \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial y'}{\partial \beta} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha}\frac{\partial z'}{\partial \beta} = 0.$$

Diese Gleichungen liefern uns drei partielle Differentialgleichungen, die zwischen den Verschiebungskomponenten bestehen müssen.

Die Krümmungsänderungen lassen sich ebenfalls ziemlich einfach berechnen. Die Richtungskosinus $l$, $m$, $n$ der in bestimmtem Sinne gezogenen Normalen der verzerrten Mittelfläche lassen sich durch Formeln vom Typus

$$l = \pm \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{\partial z'}{\partial \beta} - \frac{\partial z'}{\partial \alpha}\frac{\partial y'}{\partial \beta}\right)$$

ausdrücken; das Vorzeichen kann in jedem Falle ermittelt werden. Die Gleichungen der Normalen lauten

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n};$$

ist $(x, y, z)$ ein Hauptkrümmungszentrum, so haben wir

$$x = x' + l\varrho', \quad y = y' + m\varrho', \quad z = z' + n\varrho',$$

wo $\varrho'$ der entsprechende Hauptkrümmungsradius; $\varrho'$ wird positiv gerechnet, wenn die Normale $(l, m, n)$ von $(x', y', z')$ nach $(x, y, z)$ hin gerichtet ist. Ist $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$ ein Punkt der Fläche in der Nähe von $(x', y', z')$ auf derjenigen durch $(x', y', z')$ gehenden Krümmungslinie, für die der Krümmungsradius $\varrho'$ ist, so bleiben die Größen $x, y, z, \varrho'$ bei Beschränkung auf Größen erster Ordnung in $\delta\alpha$, $\delta\beta$ ungeändert, wenn $\alpha$ mit $\alpha + \delta\alpha$, $\beta$ mit $\beta + \delta\beta$ vertauscht wird. Die Größe, die wir bereits $\operatorname{tg}\psi$ nannten, stellt einen der beiden Werte des Quotienten $B\delta\beta / A\delta\alpha$ dar. Mithin bestimmen sich $\operatorname{tg}\psi$ und $\varrho'$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial x'}{\partial \beta}\delta\beta + \varrho'\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial l}{\partial \beta}\delta\beta\right) = 0,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial y'}{\partial \beta}\delta\beta + \varrho'\left(\frac{\partial m}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial m}{\partial \beta}\delta\beta\right) = 0,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial z'}{\partial \beta}\delta\beta + \varrho'\left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial n}{\partial \beta}\delta\beta\right) = 0.$$

Diese drei Gleichungen sind in Wirklichkeit gleichwertig mit nur zweien, denn aus der Art der Bildung der Ausdrücke für $l$, $m$, $n$ und aus der Gleichung $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ folgt, daß die Summe der mit $l, m, n$ multiplizierten linken Seiten verschwindet. Eliminieren wir den

Quotienten $\delta\alpha/\delta\beta$ aus zweien dieser Gleichungen, so erhalten wir eine Gleichung für $\varrho'$, und die Werte von $1/\varrho'$ sind $\frac{1}{R_1} + \delta\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2} + \delta\frac{1}{R_2}$; eliminieren wir $\varrho'$ aus zweien dieser Gleichungen, so erhalten wir eine Gleichung für $\delta\beta/\delta\alpha$, welche $\operatorname{tg}\psi$ bestimmt.

Wir werden diese Methoden im Falle zylindrischer und kugelförmiger Schalen anwenden. In schwierigeren Fällen oder wenn sowohl Dehnung wie Krümmungsänderung auftritt, empfiehlt es sich, ein leistungsfähigeres Verfahren anzuwenden. Eine derartige Methode werden wir später entwickeln; andere Methoden sind von H. Lamb[1]) und Lord Rayleigh[2]) angegeben. Die Resultate für Zylinder- und Kugelschalen können natürlich auch mit Hilfe der allgemeinen Methoden abgeleitet werden; diese Fälle sind jedoch so wichtig, daß es der Mühe wert zu sein scheint zu zeigen, wie sie mit analytischen Hilfsmitteln behandelt werden können, die keine weiteren Schwierigkeiten als die Handhabung einiger etwas langer Ausdrücke mit sich bringen. Die Resultate für diese Fälle gab Lord Rayleigh.[3])

## § 319. Dehnungslose Deformation einer zylindrischen Schale.

a) *Formeln für die Verschiebung.*

Ist die Mittelfläche ein Kreiszylinder vom Radius $a$, so mögen als Größen $\alpha$ und $\beta$ in jedem Punkt bezüglich der Abstand von einem festen Kreisschnitt, gemessen längs der durch den Punkt gehenden Erzeugenden, und der Winkel zwischen der durch den Punkt und die Achse gelegten Ebene und einer festen Axialebene gewählt werden; statt $\alpha$ und $\beta$ schreiben wir $x$ und $\Phi$. Wir zerlegen die Verschiebung des Punktes in Komponenten: $u$ längs der Erzeugenden, $v$ längs der Tangente des Schnittkreises, $w$ längs der nach innen gerichteten Normalen der Fläche. Die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des entsprechenden Punktes der verzerrten Mittelfläche sind durch die Gleichungen gegeben

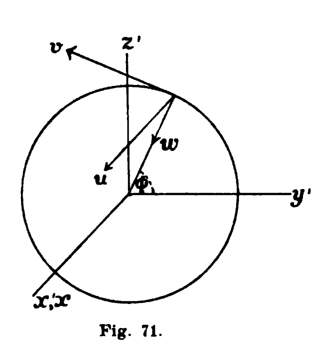


Fig. 71.

$$x' = x + u, \quad y' = (a - w)\cos\Phi - v\sin\Phi, \quad z' = (a - w)\sin\Phi + v\cos\Phi.$$

Die Bedingungen dafür, daß die Verschiebung dehnungslos ist, lauten

---

1) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 21 (1891), p. 119.

2) *Theory of Sound*, 2. Aufl., vol. 1, Kap. XA.

3) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 13 (1882) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 551, ferner die auf p. 570 oben zitierte Abhandlung. Außerdem *Theory of Sound*, 2. Aufl., vol. 1, Kap. XA.

$$\left\{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 1, \qquad \frac{1}{a}\left\{\left(\frac{\partial x'}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \Phi}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial \Phi} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial \Phi} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial \Phi} = 0.$$

Schreiben wir die Gleichungen hin

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\Phi, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}\sin\Phi + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\Phi,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \Phi} = \frac{\partial u}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial y'}{\partial \Phi} = -\left(\frac{\partial w}{\partial \Phi} + v\right)\cos\Phi - \left(a - w + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right)\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \Phi} = \left(a - w + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi - \left(\frac{\partial w}{\partial \Phi} + v\right)\sin\Phi,$$

so sehen wir, daß diese Bedingungen bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $u$, $v$, $w$ folgendermaßen lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad w = \frac{\partial v}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \Phi} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß $u$ von $x$ unabhängig ist und daß $v$ und $w$ lineare Funktionen von $x$ sind.

Besteht die Randlinie aus zwei Kreisen $x = \text{const.}$, so müssen $u$, $v$, $w$ periodische Funktionen von $\Phi$ mit der Periode $2\pi$ sein, und die allgemeinsten möglichen Formen lauten

$$\left.\begin{aligned} u &= -\sum \frac{a}{n} B_n \sin(n\Phi + \beta_n), \\ v &= \sum [A_n \cos(n\Phi + \alpha_n) + B_n x \cos(n\Phi + \beta_n)], \\ w &= -\sum n [A_n \sin(n\Phi + \alpha_n) + B_n x \sin(n\Phi + \beta_n)], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wo $A_n$, $B_n$, $\alpha_n$, $\beta_n$ Konstanten bedeuten und die Summationen auf verschiedene ganzzahlige Werte von $n$ gehen.

b) *Krümmungsänderungen.*

Die Richtungskosinus $l$, $m$, $n$ der nach innen gerichteten Normalen der verzerrten Mittelfläche sind

$$l = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial \Phi} - \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial \Phi}\right), \ldots$$

Wir schreiben die durch Anwendung von (7) vereinfachten Werte von $\partial x'/\partial x, \ldots$ in der Form hin

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \Phi}\sin\Phi - \frac{\partial w}{\partial x}\cos\Phi, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \Phi}\cos\Phi - \frac{\partial w}{\partial x}\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \Phi} = \frac{\partial u}{\partial \Phi}, \quad \frac{\partial y'}{\partial \Phi} = -a\sin\Phi - \left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi, \quad \frac{\partial z'}{\partial \Phi} = a\cos\Phi - \left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\sin\Phi;$$

bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $u$, $v$, $w$ finden wir

$$l = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad m = -\cos\Phi + \frac{1}{a}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\sin\Phi,$$
$$n = -\sin\Phi - \frac{1}{a}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi.$$

Die Hauptkrümmungsradien und die Richtungen der Krümmungslinien sind durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{1}{\varrho'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial \Phi} - \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial \Phi}\right) + \frac{1}{\varrho'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial m}{\partial \Phi} + \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial \Phi} - \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial \Phi} - \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial \Phi}\right) + \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial m}{\partial \Phi} - \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial \Phi} = 0$$

und

$$(\delta x)^2\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial x}\right) + (\delta\Phi)^2\left(\frac{\partial x'}{\partial \Phi}\frac{\partial m}{\partial \Phi} - \frac{\partial y'}{\partial \Phi}\frac{\partial l}{\partial \Phi}\right) + \delta x\,\delta\Phi\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial m}{\partial \Phi} + \frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial \Phi} - \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial \Phi} - \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial \Phi}\right) = 0.$$

Um die Koeffizienten in diesen Gleichungen zu berechnen, schreiben wir die Werte von $\partial l/\partial x, \ldots$ in der etwas vereinfachten Form hin, die aus (7) und daraus, daß $v$ und $w$ lineare Funktionen von $x$ sind, folgt. Wir haben

$$\frac{\partial l}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\sin\Phi}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right),$$
$$\frac{\partial l}{\partial \Phi} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \Phi}, \quad \frac{\partial m}{\partial \Phi} = \sin\Phi\left\{1 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} + w\right)\right\} + \frac{\cos\Phi}{a}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right).$$

Wir wissen von vornherein, daß bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in $u, v, w$ ein Wert von $1/\varrho'$ null und der andere $1/a + \varkappa_2$ ist; ebenso ist der Wert von $a\,\delta\Phi/\delta x$ gleich $\operatorname{tg}\psi$, und $\operatorname{tg}2\psi = -2a\tau$. Wir können nun obige Gleichungen für $\varrho'$ und $\delta x/\delta\Phi$ in der (bis auf Glieder erster Ordnung in $u, v, w$ geltenden) Form schreiben

$$\left(\frac{1}{a} + \varkappa_2\right)\left[-a\sin\Phi - \left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi\right] + \left[\sin\Phi + \frac{1}{a}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} + w\right)\sin\Phi\right] = 0$$

und

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\sin\Phi + \frac{1}{a^2}\operatorname{tg}^2\psi\left(\frac{\partial u}{\partial \Phi} - a\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \Phi}\right)\sin\Phi + \frac{1}{a}\operatorname{tg}\psi\left[\sin\Phi + \frac{1}{a}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\cos\Phi + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} + w\right)\sin\Phi\right] = 0.$$

Die erstere dieser Gleichungen liefert die bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $u, v, w$ geltende Formel

$$\varkappa_2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} + w\right), \tag{9}$$

und die letztere liefert in gleicher Annäherung

$$\operatorname{tg} 2\psi = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right),$$

oder

$$\tau = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\right). \tag{10}$$

Bei Einführung der in (8) gegebenen Werte von $u$, $v$, $w$ erhalten wir hieraus

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_2 &= \sum \frac{n^3 - n}{a^2}[A_n \sin(n\Phi + \alpha_n) + B_n x \sin(n\Phi + \beta_n)], \\ \tau &= -\sum \frac{n^2 - 1}{a} B_n \cos(n\Phi + \beta_n). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

## § 320. Dehnungslose Deformation einer Kugelschale.

a) *Formeln für die Verschiebung.*

Ist die Mittelfläche eine Kugel vom Radius $a$, so wählen wir als Koordinaten $\alpha$ und $\beta$ gewöhnliche Polarkoordinaten auf der Kugel und schreiben $\theta$, $\Phi$ für $\alpha$, $\beta$. Die Verschiebung hat die Komponenten $u$ längs der Tangente des Meridians in Richtung von wachsendem $\theta$, $v$ längs der Tangente des Parallelkreises in Richtung von wachsendem $\Phi$, $w$ längs der nach innen gerichteten Normalen der Fläche. Die kartesischen Koordinaten eines Punktes der verzerrten Mittelfläche sind durch die Gleichungen gegeben

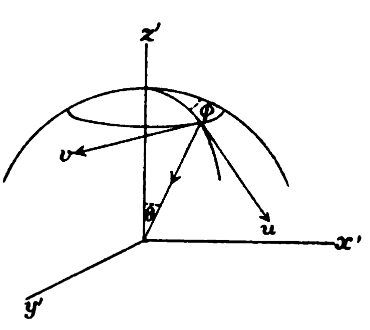



Fig. 72.

$$\begin{aligned} x' &= (a - w)\sin\theta\cos\Phi + u\cos\theta\cos\Phi - v\sin\Phi, \\ y' &= (a - w)\sin\theta\sin\Phi + u\cos\theta\sin\Phi + v\cos\Phi, \\ z' &= (a - w)\cos\theta - u\sin\theta. \end{aligned}$$

Die Bedingungen dafür, daß die Verschiebung dehnungslos ist, lauten

$$\frac{1}{a}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{1}{a\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \Phi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta}\frac{\partial x'}{\partial \Phi} + \frac{\partial y'}{\partial \theta}\frac{\partial y'}{\partial \Phi} + \frac{\partial z'}{\partial \theta}\frac{\partial z'}{\partial \Phi} = 0.$$

Wir schreiben folgende Gleichungen hin:

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = \left[\left(a - w + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right)\sin\theta\right]\cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \theta} = \left[\left(a - w + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right)\sin\theta\right]\sin\Phi + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\Phi,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \theta} = -\left(a - w + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sin\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right)\cos\theta$$

und

$$\frac{\partial x'}{\partial \Phi} = -\left[(a-w)\sin\theta + u\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right]\sin\Phi + \left[\frac{\partial u}{\partial \Phi}\cos\theta - v - \frac{\partial w}{\partial \Phi}\sin\theta\right]\cos\Phi,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \Phi} = \left[(a-w)\sin\theta + u\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right]\cos\Phi + \left[\frac{\partial u}{\partial \Phi}\cos\theta - v - \frac{\partial w}{\partial \Phi}\sin\theta\right]\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \Phi} = -\frac{\partial u}{\partial \Phi}\sin\theta - \frac{\partial w}{\partial \Phi}\cos\theta.$$

Die Bedingungen dafür, daß die Verschiebung dehnungslos sei, lauten bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $u$, $v$, $w$

$$w = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad w\sin\theta = u\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \Phi},$$

$$\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta} + \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial \Phi}\cos\theta - v - \frac{\partial w}{\partial \Phi}\sin\theta\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial \Phi}\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial \Phi}\cos\theta\right) = 0,$$

oder, wie wir auch schreiben können,

$$w = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{u}{\sin\theta} = \frac{\partial}{\partial \Phi}\frac{v}{\sin\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi}\frac{u}{\sin\theta} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{v}{\sin\theta} = 0. \quad (12)$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen zeigen, daß $u/\sin\theta$ und $v/\sin\theta$ konjugierte Funktionen von $\log(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta)$ und $\Phi$ sind.

Besteht die Randlinie aus zwei Breitenkreisen, so müssen $u$, $v$, $w$ periodische Funktionen von $\Phi$ mit der Periode $2\pi$ sein, und die allgemeinsten möglichen Formen derselben sind

$$\left.\begin{aligned} u &= \sin\theta\sum\left[A_n\operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\cos(n\Phi+\alpha_n) + B_n\operatorname{cotg}^n\frac{\theta}{2}\cos(n\Phi+\beta_n)\right],\\ v &= \sin\theta\sum\left[A_n\operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\sin(n\Phi+\alpha_n) - B_n\operatorname{cotg}^n\frac{\theta}{2}\sin(n\Phi+\beta_n)\right],\\ w &= \sum\left[(n+\cos\theta)A_n\operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\cos(n\Phi+\alpha_n)\right.\\ &\qquad \left. - (n-\cos\theta)B_n\operatorname{cotg}^n\frac{\theta}{2}\cos(n\Phi+\beta_n)\right], \end{aligned}\right\} (13)$$

wo $A_n$, $B_n$, $\alpha_n$, $\beta_n$ Konstanten; die Summationen gehen auf die verschiedenen ganzzahligen Werte von $n$.

Setzen wir in den Formeln (12) $n = 0$, so erhalten wir Verschiebungen vom Typus

$$u = A_0\sin\theta\cos\alpha, \quad v = A_0\sin\theta\sin\alpha, \quad w = A_0\cos\theta\cos\alpha.$$

(Die Glieder in $B_0$ sind von demselben Typus.) Die Komponenten dieser Verschiebung in Richtung von $x'$, $y'$, $z'$ sind

$$-A_0 \sin\alpha \sin\theta \sin\Phi, \quad A_0 \sin\alpha \sin\theta \cos\Phi, \quad -A_0 \cos\alpha,$$

und diese Verschiebung setzt sich aus einer Translation $-A_0 \cos\alpha$ in Richtung der $z'$-Achse und einer Drehung $A_0 a^{-1} \sin\alpha$ um diese Achse zusammen.

Setzen wir in den Formeln (13) $n = 1$, so bekommen wir Verschiebungen vom Typus

$$u = A_1(1 - \cos\theta)\cos(\Phi + \alpha), \quad v = A_1(1 - \cos\theta)\sin(\Phi + \alpha),$$
$$w = A_1 \sin\theta \cos(\Phi + \alpha),$$

und

$$u = B_1(1 + \cos\theta)\cos(\Phi + \beta), \quad v = -B_1(1 + \cos\theta)\sin(\Phi + \beta),$$
$$w = -B_1 \sin\theta \cos(\Phi + \beta).$$

Die erstere ist gleichwertig mit einer Translation $(-A_1 \cos\alpha, A_1 \sin\alpha, 0)$ und einer Drehung $A_1 a^{-1}(\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$; die letztere ist gleichwertig mit einer Translation $(B_1 \cos\beta, -B_1 \sin\beta, 0)$ und einer Drehung $B_1 a^{-1}(\sin\beta, \cos\beta, 0)$.

Aus dem eben Gesagten geht hervor, daß alle Verschiebungen, die sich aus (13) für $n = 0$ oder $n = 1$ ergeben, in einem starren Körper möglich sind; die Terme, welche diesen Werten von $n$ entsprechen, können daher in den Summationen fortgelassen werden. Entsprechende Resultate erhält man für zylindrische Schalen.

Wenn die Randlinie aus einem Breitenkreis besteht und der Pol $\theta = 0$ auf der Schale liegt, so müssen wir aus (13) die Glieder in $\cot g^n \frac{1}{2}\theta$, $(n > 1)$, streichen, da diese im Pole unendlich groß werden. Ist die Kugel geschlossen, so müssen die Glieder in $\operatorname{tg}^n \frac{1}{2}\theta$, $(n > 1)$, ebenfalls fortgelassen werden; mit anderen Worten, in einer geschlossenen Kugelschale sind, abgesehen von den in einem starren Körper möglichen Verrückungen, dehnungslose Verschiebungen nicht möglich.[1])

b) *Krümmungsänderungen.*

Wir bilden zunächst Ausdrücke für die Richtungskosinus $l$, $m$, $n$ der Normalen der deformierten Fläche mit Hilfe der Formeln vom Typus

$$l = \frac{1}{a^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial y'}{\partial \Phi}\frac{\partial z'}{\partial \theta} - \frac{\partial z'}{\partial \Phi}\frac{\partial y'}{\partial \theta}\right);$$

zu diesem Zwecke schreiben wir die mittels der Gleichungen (12) vereinfachten Ausdrücke für $\partial x'/\partial\theta, \ldots$ hin. Wir haben

1) Das Resultat ist im Einklang mit dem Satz, daß eine geschlossene Fläche ohne Reckung nicht gebogen werden kann. Diesen Satz verdankt man J. H. Jellett, *Dublin Trans. R. Irish Acad.*, vol. 22 (1855).

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = a \cos\theta \cos\Phi - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \sin\theta \cos\Phi - \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin\Phi,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \theta} = a \cos\theta \sin\Phi - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \sin\theta \sin\Phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos\Phi,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \theta} = - a \sin\theta - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \cos\theta,$$

und

$$\frac{\partial x'}{\partial \Phi} = - a \sin\theta \sin\Phi + \left(\frac{\partial u}{\partial \Phi} \cos\theta - v - \frac{\partial w}{\partial \Phi} \sin\theta\right) \cos\Phi,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \Phi} = \quad a \sin\theta \cos\Phi + \left(\frac{\partial u}{\partial \Phi} \cos\theta - v - \frac{\partial w}{\partial \Phi} \sin\theta\right) \sin\Phi,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \Phi} = - \frac{\partial u}{\partial \Phi} \sin\theta - \frac{\partial w}{\partial \Phi} \cos\theta.$$

Hieraus erhalten wir bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $u$, $v$, $w$

$$l = - \sin\theta \cos\Phi - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \cos\theta \cos\Phi + \frac{1}{a}\left(v + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right) \sin\Phi,$$

$$m = - \sin\theta \sin\Phi - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \cos\theta \sin\Phi - \frac{1}{a}\left(v + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right) \cos\Phi,$$

$$n = - \cos\theta + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right) \sin\theta.$$

Genau wie im Falle des Zylinders bestimmen sich die Hauptkrümmungen und die Richtungen der Krümmungslinien durch die kompatiblen Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial x'}{\partial \Phi}\delta\Phi + \varrho'\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial l}{\partial \Phi}\delta\Phi\right) = 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Wir schreiben daher folgende Gleichungen hin, in denen wir der Kürze halber $X = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\right)$, $Y = \frac{1}{a}\left(v + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)$ setzen:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{\partial X}{\partial \theta}\right) \cos\theta \cos\Phi + X \sin\theta \cos\Phi + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \sin\Phi,$$

$$\frac{\partial m}{\partial \theta} = -\left(1 + \frac{\partial X}{\partial \theta}\right) \cos\theta \sin\Phi + X \sin\theta \sin\Phi - \frac{\partial Y}{\partial \theta} \cos\Phi,$$

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{\partial X}{\partial \theta}\right) \sin\theta + X \cos\theta$$

und

$$\frac{\partial l}{\partial \Phi} = \quad \left(\sin\theta + X \cos\theta + \frac{\partial Y}{\partial \Phi}\right) \sin\Phi - \left(\frac{\partial X}{\partial \Phi} \cos\theta - Y\right) \cos\Phi,$$

$$\frac{\partial m}{\partial \Phi} = -\left(\sin\theta + X \cos\theta + \frac{\partial Y}{\partial \Phi}\right) \cos\Phi - \left(\frac{\partial X}{\partial \Phi} \cos\theta - Y\right) \sin\Phi,$$

$$\frac{\partial n}{\partial \Phi} = \sin\theta \frac{\partial X}{\partial \Phi}.$$

Wir müssen hier nun etwas anders verfahren als beim Zylinder, weil in erster Annäherung die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen durch die Verzerrung nicht geändert werden. Wir beginnen daher mit der Aufstellung der Gleichung für $\operatorname{tg}\psi$ oder $\sin\theta\,\delta\Phi/\delta\theta$. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\frac{\partial x'}{\partial\Phi}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\frac{\partial m}{\partial\Phi}\right)=\left(\frac{\partial y'}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\frac{\partial y'}{\partial\Phi}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\frac{\partial l}{\partial\Phi}\right),$$

und durch Einsetzen der oben hingeschriebenen Werte von $\partial x'/\partial\theta,\ldots$ geht sie über in

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}-a\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\cos\theta+\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\,a\left(\sin\theta\frac{\partial X}{\partial\theta}-X\cos\theta-\frac{\partial Y}{\partial\Phi}\right)\cos\theta$$
$$+\frac{\operatorname{tg}^2\psi}{\sin^2\theta}\left\{a\left(\frac{\partial X}{\partial\Phi}\cos\theta-Y\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial\Phi}\cos\theta-v-\frac{\partial w}{\partial\Phi}\sin\theta\right)\right\}\sin\theta=0.$$

Nun haben wir

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}-a\frac{\partial Y}{\partial\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\Phi}\right),$$

$$a\left(\frac{\partial X}{\partial\Phi}\cos\theta-Y\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial\Phi}\cos\theta-v-\frac{\partial w}{\partial\Phi}\sin\theta\right)=\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\Phi}\right),$$

$$a\left(\sin\theta\frac{\partial X}{\partial\theta}-X\cos\theta-\frac{\partial Y}{\partial\Phi}\right)=\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)-\cos\theta\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}+u\right)$$
$$-\frac{\partial v}{\partial\Phi}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\Phi^2}=\sin\theta\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right)-\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\Phi^2}+\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}+w\right)\right],$$

wo in der letzten Zeile von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht ist. Da aber $w=\partial u/\partial\theta$ ist und $u$ der Gleichung genügt, die durch Elimination von $v$ aus der zweiten und dritten der Gleichungen (12) folgt, nämlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\Phi^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+u=0,$$

so ergibt sich, daß

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\Phi^2}+\operatorname{cotg}\frac{\partial w}{\partial\theta}+w=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-u\right)$$
$$+\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}+w=-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-w.$$

Die Gleichung für $\operatorname{tg}\psi$ wird daher

$$\operatorname{tg}2\psi=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\Phi}\right)\Big/\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right).$$

Eine der Gleichungen zur Bestimmung von $\varrho'$ lautet

$$\frac{\partial z'}{\partial\theta}\delta\theta+\frac{\partial z'}{\partial\Phi}\delta\Phi+\varrho'\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\delta\theta+\frac{\partial n}{\partial\Phi}\delta\Phi\right)=0,$$

oder

$$\frac{a}{\varrho'} = \frac{\left(1+\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)\sin\theta + X\cos\theta + \frac{\partial X}{\partial \Phi}\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta + X\cos\theta + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial \Phi} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\operatorname{tg}\psi}$$

$$= 1 + \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial X}{\partial \Phi} - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial \Phi} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w\right) + \frac{\operatorname{tg}\psi}{a}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w\right)\sec 2\psi.$$

Benutzen wir jedoch die Bezeichnungen von § 316, so haben wir

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{a} = \varkappa_1 \cos^2\psi + \varkappa_2 \sin^2\psi + \tau\sin 2\psi$$
$$= \varkappa_1(\cos 2\psi + \sin 2\psi \operatorname{tg} 2\psi)$$
$$= \varkappa_1 \sec 2\psi.$$

Daraus folgt, daß

$$\varkappa_1 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w\right), \qquad \tau = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \Phi}\right). \tag{14}$$

Mit den in (13) gegebenen Werten von $u$, $v$, $w$ finden wir nun

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \sum \frac{n^3-n}{a^2\sin^2\theta}\Big[A_n \operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\cos(n\Phi+\alpha_n) \\
- B_n \operatorname{cotg}^n\frac{\theta}{2}\cos\left(n\Phi+\beta_n\right)\Big], \\
\tau = -\sum \frac{n^3-n}{a^2\sin^2\theta}\Big[A_n \operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\sin(n\Phi+\alpha_n) \\
+ B_n \operatorname{cotg}^n\frac{\theta}{2}\sin(n\Phi+\beta_n)\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

## § 321. Dehnungslose Schwingungen.

Haben wir in einer schwingenden Schale den Verzerrungszustand, der in § 317 als die typische Biegungsverzerrung geschildert wurde, so können wir die Frequenz der Schwingungen berechnen, indem wir die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie aufstellen.[1]) Wir erläutern dies Verfahren an dem Beispiel der Zylinder- und der Kugelschale.

1) Die Theorie der dehnungslosen Schwingungen verdankt man Lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc*, vol. 13 (1881) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 551, und *Proc. R. Soc.*, vol. 45 (1889), p. 105 = *Scientific Papers*, vol. 3, p. 217. Siehe auch *Theory of Sound*, 2. Aufl., Kap. X A. Eine Untersuchung der Bedingung für das Auftreten praktisch dehnungsloser Schwingungsarten werden wir in Kap. XXIV unten geben.

1) *Zylindrische Schale.*

Die kinetische Energie, bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelfläche, ist gleich

$$\varrho h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right];$$

hier bedeutet $\varrho$ die Dichte des Materials, und $u$, $v$, $w$ sind durch die Gleichungen (8) gegeben, in denen die Koeffizienten $A_n$, $B_n$ als Funktionen von $t$ anzusehen sind. Die kinetische Energie $T$ der schwingenden Schale ergibt sich, wenn wir diesen Ausdruck über das Gebiet der Mittelfläche integrieren. Sind die Ränder der Schale durch $x = \pm l$ gegeben, so finden wir

$$T = 2\pi\varrho a l h \sum\left[(1+n^2)\left(\frac{dA_n}{dt}\right)^2+\left\{\frac{a^2}{n^2}+\tfrac{1}{3}(1+n^2)l^2\right\}\left(\frac{dB_n}{dt}\right)^2\right]. \quad (16)$$

Die potentielle Energie der Biegung, bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelfläche, ist gleich

$$\tfrac{1}{2}D\left[\varkappa_2^2+2(1-\sigma)\tau^2\right],$$

wo $\varkappa_2$ und $\tau$ durch (11) gegeben sind. Die potentielle Energie $V$ der schwingenden Schale ergibt sich, wenn wir diesen Ausdruck über das Gebiet der Mittelfläche integrieren. Wir finden

$$V = D\pi l\sum\frac{(n^2-1)^2}{a^3}\left[n^2A_n^2+\left\{\tfrac{1}{3}n^2l^2+2(1-\sigma)a^2\right\}B_n^2\right]. \quad (17)$$

Die Koeffizienten $A_n$, $B_n$ in den Ausdrücken (8) für die Verschiebung können als verallgemeinerte Koordinaten angesehen werden, und die Ausdrücke für $T$ und $V$ zeigen, daß sie „Normalkoordinaten" darstellen, sodaß die durch verschiedene $A$ oder $B$ bezeichneten Schwingungen unabhängig voneinander ausgeführt werden. Die Schwingungen, bei denen die $B$ sämtlich und die $A$ sämtlich bis auf eines verschwinden, haben zweidimensionalen Charakter und finden in den zur Zylinderachse senkrechten Ebenen statt. Sie drücken sich aus durch die Gleichungen

$$u = 0,\quad v = A_n\cos n\Phi,\quad w = -nA_n\sin n\Phi;$$

hierin ist $A_n$ einer einfachen harmonischen Funktion der Zeit mit der Periode $2\pi/p$ proportional, wo $p$ durch die Gleichung gegeben ist

$$p^2 = \frac{D}{2\varrho h a^4}\,\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} = \frac{Eh^2}{3\varrho(1-\sigma^2)a^4}\,\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}. \quad (18)$$

Die Schwingungen, bei denen die $A$ sämtlich und die $B$ sämtlich bis auf eines verschwinden, sind dreidimensional. Ihr Typus ist durch die Gleichungen gegeben

$$u = -\frac{a}{n}B_n\sin n\Phi,\quad v = xB_n\cos n\Phi,\quad w = -nxB_n\sin n\Phi,$$

und die Frequenz $p/2\pi$ bestimmt sich durch die Gleichung

$$p^2 = \frac{Eh^2}{3\varrho(1-\sigma^2)a^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \frac{1+6(1-\sigma)a^2/n^2l^2}{1+3a^2/n^2(n^2+1)l^2}. \tag{19}$$

Ist entweder $n$ oder $l/a$ einigermaßen groß, so sind die beiden Werte von $p$, die zu demselben Werte von $n$ gehören, sehr nahe einander gleich.

2) *Kugelschale.*

Die Mittelfläche sei von einem Breitenkreise $\theta = \alpha$ begrenzt, und der Pol $\theta = 0$ liege auf der Schale. Dann verschwinden in (13) und (15) die Koeffizienten $B_n$. Die kinetische Energie $T$ ist durch die Gleichung gegeben

$$T = \pi\varrho a^2 h \sum \left[\left(\frac{dA_n}{dt}\right)^2 \int_0^\alpha \sin\theta \left\{2\sin^2\theta + (\cos\theta + n)^2\right\} \operatorname{tg}^{2n}\frac{\theta}{2}\, d\theta\right]. \tag{20}$$

Die potentielle Energie der Biegung, bezogen auf die Flächeneinheit der Mittelfläche, ist gleich $\frac{1}{3}\mu h^3(\varkappa_1{}^2 + \tau^2)$, wo $\varkappa_1$ und $\tau$ durch (15) bei Streichung der $B$ gegeben sind. Somit ist die potentielle Energie der schwingenden Schale durch die Gleichung gegeben

$$V = \tfrac{8}{3}\pi\mu\frac{h^3}{a^2} \sum \left[n^2(n^2-1)^2 A_n{}^2 \int_0^\alpha \operatorname{tg}^{2n}\frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\sin^3\theta}\right]. \tag{21}$$

Die Koeffizienten $A_n$ in den Ausdrücken für die Verschiebungskomponenten können als „Normalkoordinaten“ angesehen werden[1]), und die Schwingungszahl läßt sich hinschreiben.

Der Typus einer Normalschwingung drückt sich aus durch die Gleichungen

$$u = A_n \sin\theta \operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\cos n\Phi, \quad v = A_n \sin\theta \operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\sin n\Phi,$$
$$w = A_n(n + \cos\theta)\operatorname{tg}^n\frac{\theta}{2}\cos n\Phi,$$

worin $A_n$ einer einfachen harmonischen Funktion der Zeit proportional ist. Die Schwingungszahl $p_n/2\pi$ ist durch die Gleichung gegeben

$$p_n{}^2 = \tfrac{8}{3}\frac{\mu}{\varrho}\frac{h^2}{a^4} n^2(n^2-1)^2 \left(\int_0^\alpha \operatorname{tg}^{2n}\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{\sin^3\theta}\right) \Big/ \left(\int_0^\alpha \sin\theta \left\{2\sin^2\theta + (\cos\theta+n)^2\right\} \operatorname{tg}^{2n}\frac{\theta}{2}\, d\theta\right).$$

In diesem Ausdruck kann $n$ irgend eine ganze Zahl bedeuten, die größer ist als 1.

1) Wenn die Randlinie aus zwei Breitenkreisen besteht, sodaß sowohl die Koeffizienten $B$ wie die Koeffizienten $A$ vorkommen, sind die $A$ und $B$ nicht Normalkoordinaten; denn in dem Ausdruck für $T$ treten Glieder auf, die Produkte wie $(dA_n/dt)\cdot(dB_n/dt)$ enthalten. Siehe Lord Rayleigh, *Theory of Sound,* 2. Aufl., Kap. X A.

Die Integrationen lassen sich stets ausführen. Wir haben

$$\int_0^{\alpha} \mathrm{tg}^{2n}\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{\sin^3\theta} = \tfrac{1}{8}\left[\frac{\mathrm{tg}^{2n-2}\frac{\alpha}{2}}{n-1} + 2\,\frac{\mathrm{tg}^{2n}\frac{\alpha}{2}}{n} + \frac{\mathrm{tg}^{2n+2}\frac{\alpha}{2}}{n+1}\right],$$

$$\int_0^{\alpha} \sin\theta\,\{2\sin^2\theta + (\cos\theta + n)^2\}\,\mathrm{tg}^{2n}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \int_{1+\cos\alpha}^{2} \frac{(2-x)^n}{x^n}\,[(n-1)^2 + 2\,(n+1)\,x - x^2]\,dx,$$

und das letztere Integral läßt sich für jeden ganzzahligen Wert von $n$ auswerten. Im Falle einer Halbkugel ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) findet Lord Rayleigh (*loc. cit.*), daß die Frequenzen $p_2, p_3, p_4$ für $n = 2, 3, 4$ gegeben sind durch

$$p_2 = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\mu}{\varrho}}\,(5{,}240), \quad p_3 = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\mu}{\varrho}}\,(14{,}726),$$

$$p_4 = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\mu}{\varrho}}\,(28{,}462).$$

Im Falle einer Schale von $120^0$ ($\alpha = \frac{1}{3}\pi$) findet er

$$p_2 = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\mu}{\varrho}}\,(7{,}9947), \quad p_3 = \frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\mu}{\varrho}}\,(20{,}911).$$

Handelt es sich um eine nahezu geschlossene Kugel (annähernd $\alpha = \pi$) mit sehr kleiner Öffnung, so ist die aus der obigen Formel berechnete Frequenz[1]) angenähert gleich

$$p_n^2 = \frac{h^2}{a^4}\,\frac{8}{3}\,\frac{\mu}{\varrho}\,\frac{n^2(n^2-1)}{(\pi - a)^4}.$$

1) Vgl. H. Lamb, *loc. cit.* p. 574.

## Kapitel XXIV.

### Allgemeine Theorie dünner Platten und Schalen.

---

#### § 322. Formeln betreffend die Krümmung von Flächen.

Für die Untersuchungen im letzten Kapitel reichen die Elemente der Theorie der krummen Flächen hin. Um eine allgemeinere Methode zur Behandlung des Problems der krummen Platten oder Schalen zu gewinnen, brauchen wir einige weitergehende Resultate dieser Theorie. Wir werden am besten tun, mit der Ableitung dieser Resultate zu beginnen.

Es mögen $\alpha, \beta$ zwei Parameter bezeichnen, durch die die Lage eines Punktes auf einer Fläche sich ausdrücken läßt, sodaß die Gleichungen $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ Kurvenscharen auf der Fläche darstellen. $\chi$ sei der Winkel, den die Tangenten dieser Kurven in einem Punkte einschließen; dann ist $\chi$ im allgemeinen eine Funktion von $\alpha$ und $\beta$. Das Linienelement $ds$ einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Kurve ist durch die Formel gegeben

$$(ds)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2 + 2 AB \cos\chi \, d\alpha \, d\beta, \tag{1}$$

wo $A$ und $B$ im allgemeinen Funktionen von $\alpha, \beta$. Wir konstruieren ein bewegliches rechtshändiges $(x, y, z)$-Achsensystem in der Weise, daß der Koordinatenanfang in einem Punkt $(\alpha, \beta)$ der Fläche liegt, die $z$-Achse in die in verabredeter Richtung gezogene Normale der Fläche in jenem Punkte, die $x$-Achse in die Tangente der durch den Koordinatenanfang gehenden Kurve $\beta = \text{const.}$ im Sinne von wachsendem $\alpha$ und die $y$-Achse in die zur $x$-Achse senkrechte Tangente der Fläche fällt.[1]) Wenn der Ursprung dieses Achsendreikants sich über die Fläche bewegt, so ändern sich die Richtungen der Achsen. Bedeutet $t$ die Zeit, so sind die Geschwindigkeitskomponenten des Ursprungspunktes

---

1) Wenn die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ sich rechtwinklig schneiden, so mögen die Parameter $\alpha$ und $\beta$ und die positive Richtung der Normalen der Fläche so gewählt sein, daß die Richtungen, in denen $\alpha$ und $\beta$ wachsen, und diese Normale die Achsen eines rechtshändigen Systems darstellen.

$$A\frac{d\alpha}{dt} + B\frac{d\beta}{dt}\cos\chi, \quad B\frac{d\beta}{dt}\sin\chi, \; 0$$

in Richtung der instantanen Lagen der $(x, y, z)$-Achsen. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Achsensystems, bezogen auf dieselben Richtungen, lassen sich in der Form ausdrücken

$$p_1\frac{d\alpha}{dt} + p_2\frac{d\beta}{dt}, \quad q_1\frac{d\alpha}{dt} + q_2\frac{d\beta}{dt}, \quad r_1\frac{d\alpha}{dt} + r_2\frac{d\beta}{dt},$$

wo die Größen $p_1, \ldots$ Funktionen von $\alpha$ und $\beta$ sind.

Die Größen $p_1, \ldots$ sind untereinander und mit $A, B, \chi$ durch die Gleichungssysteme (2) und (3) unten verknüpft. Dies läßt sich folgendermaßen zeigen:

$x, y, z$ seien die Koordinaten eines festen Punktes, bezogen auf die beweglichen Achsen. Dann sind $x, y, z$ Funktionen von $\alpha$ und $\beta$, und die Bedingungen dafür, daß der Punkt fest bleibt, während die Achsen sich bewegen, drücken sich aus durch die drei Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} - y\left(r_1\frac{d\alpha}{dt} + r_2\frac{d\beta}{dt}\right) + z\left(q_1\frac{d\alpha}{dt} + q_2\frac{d\beta}{dt}\right) + A\frac{d\alpha}{dt} + B\frac{d\beta}{dt}\cos\chi = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} - z\left(p_1\frac{d\alpha}{dt} + p_2\frac{d\beta}{dt}\right) + x\left(r_1\frac{d\alpha}{dt} + r_2\frac{d\beta}{dt}\right) + B\frac{d\beta}{dt}\sin\chi = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} - x\left(q_1\frac{d\alpha}{dt} + q_2\frac{d\beta}{dt}\right) + y\left(p_1\frac{d\alpha}{dt} + p_2\frac{d\beta}{dt}\right) = 0.$$

Da diese für alle Werte von $d\alpha/dt$ und $d\beta/dt$ gelten, erhalten wir die sechs Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = -A + r_1 y - q_1 z, \qquad \frac{\partial x}{\partial\beta} = -B\cos\chi + r_2 y - q_2 z,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha} = p_1 z - r_1 x, \qquad \frac{\partial y}{\partial\beta} = -B\sin\chi + p_2 z - r_2 x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha} = q_1 x - p_1 y, \qquad \frac{\partial z}{\partial\beta} = q_2 x - p_2 y.$$

Als Kompatibilitätsbedingungen für diese Gleichungen haben wir drei Gleichungen von der Form $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)$; um die Differentialquotienten zu bilden, können wir die obigen Ausdrücke für $\partial x/\partial\alpha, \ldots$ benutzen. Die entstehenden Formeln müssen für alle Werte von $x, y, z$ gelten.

Das angedeutete Verfahren führt auf die Gleichungen[1])

1) Die Gleichungssysteme (2) und (3) wurden von D. Codazzi, *Paris Mém. par divers savants*, t. 27 (1882), aufgestellt.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} - \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} &= q_1 r_2 - q_2 r_1,\\ \frac{\partial q_1}{\partial \beta} - \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} &= r_1 p_2 - r_2 p_1,\\ \frac{\partial r_1}{\partial \beta} - \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} &= p_1 q_2 - p_2 q_1,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und

$$\left.\begin{aligned}r_1 &= -\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B \sin \chi}\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \cos \chi \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right),\\ r_2 &= \frac{1}{A \sin \chi}\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \cos \chi \frac{\partial A}{\partial \beta}\right),\\ \frac{q_2}{B} + \frac{p_1}{A} \sin \chi &= \frac{q_1}{A} \cos \chi.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um die Krümmung der Fläche auszudrücken, stellen wir die Gleichungen der Normalen in $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$ in bezug auf die $(x, y, z)$-Achsen in $(\alpha, \beta)$ auf. Die Richtungskosinus der Normalen sind in hinreichender Annäherung gleich $(q_1 \delta\alpha + q_2 \delta\beta)$, $-(p_1 \delta\alpha + p_2 \delta\beta)$, 1, und die Gleichungen lauten

$$\frac{x - (A\delta\alpha + B\delta\beta\cos\chi)}{(q_1 \delta\alpha + q_2 \delta\beta)} = \frac{y - B\delta\beta \sin\chi}{-(p_1 \delta\alpha + p_2 \delta\beta)} = z.$$

Daraus folgt, daß die Krümmungslinien durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}A p_1 (d\alpha)^2 + B(p_2 \cos\chi + q_2 \sin\chi)(d\beta)^2 \\ + \{A p_2 + B(p_1 \cos\chi + q_1 \sin\chi)\}\, d\alpha\, d\beta = 0\end{aligned} \tag{4}$$

gegeben sind und daß die Hauptkrümmungsradien die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned}R^2(p_1 q_2 - p_2 q_1) - R\,\{A p_2 - B(p_1 \cos\chi + q_1 \sin\chi)\} \\ + AB\sin\chi = 0\end{aligned} \tag{5}$$

sind. Aus diesen Formeln ergibt sich leicht als Gleichung der Indikatrix

$$-\frac{q_1}{A} x^2 + \left(\frac{p_2}{B \sin\chi} - \frac{p_1}{A} \operatorname{cotg}\chi\right) y^2 + 2\frac{p_1}{A} xy = \text{const.} \tag{6}$$

Das Krümmungsmaß ist durch (5) und die dritte der Gleichungen (2) in der Form gegeben

$$\frac{1}{AB\sin\chi}\left(\frac{\partial r_1}{\partial \beta} - \frac{\partial r_2}{\partial \alpha}\right).$$

## § 323. Vereinfachte Formeln betreffend die Krümmung von Flächen.

Wenn die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ Krümmungslinien der Fläche sind, so vereinfachen sich die Formeln erheblich. In diesem Falle sind die $x$- und die $y$-Achse die Haupttangenten in einem Punkte, während die $z$-Achse die Normale in diesem Punkte ist. Wir haben

$$\chi = \tfrac{1}{2}\pi, \quad p_1 = 0, \quad q_2 = 0, \tag{7}$$

und die Wurzeln von Gleichung (5) sind $-A/q_1$ und $B/p_2$. Wir wollen schreiben

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{q_1}{A}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{p_2}{B}, \tag{8}$$

sodaß $R_1$, $R_2$ die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte der Fläche, die durch die mit den $(x, y)$-Achsen in dem betreffenden Punkte zusammenfallenden Tangenten gelegt sind. Wir haben ferner

$$\left.\begin{aligned} r_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad r_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \frac{AB}{R_1 R_2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{R_1}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial \beta}. \tag{10}$$

## § 324. Dehnung und Krümmung der Mittelfläche einer Platte oder Schale.

Im allgemeinen werden wir die Mittelfläche im ungespannten Zustand als eine krumme Fläche betrachten und die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien zusammenfallen lassen. Im Falle einer ebenen Platte können $\alpha$ und $\beta$ gewöhnliche kartesische Koordinaten oder krummlinige rechtwinklige Koordinaten sein. Im Falle einer Kugel würden für $\alpha$ und $\beta$ gewöhnliche sphärische Polarkoordinaten gewählt werden können. Die Gleichungen (7)—(10) gelten im ungespannten Zustand. Wird die Platte deformiert, so gehen die Kurven, die Krümmungslinien waren, in zwei Scharen von Kurven auf der verzerrten Mittelfläche über, die sich unter einem Winkel schneiden, der von einem Rechten wenig abweichen wird. Wir bezeichnen diesen Winkel mit $\chi$ und seinen Kosinus mit $\varpi$; mit $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ bezeichnen wir die Dehnungen der Linienelemente, die im ungespannten Zustand den Kurven $\beta = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$ angehören. Die Größen $\alpha$ und $\beta$ können als Parameter angesehen werden, die einen Punkt der verzerrten Mittelfläche bestimmen, und die Formel für das Linienelement lautet

$$\begin{aligned}(ds)^2 = A^2(1+\varepsilon_1)^2(d\alpha)^2 + B^2(1+\varepsilon_2)^2(d\beta)^2 \\ + 2AB(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\,\varpi\, d\alpha\, d\beta.\end{aligned}$$

Wie in § 322 konstruieren wir ein bewegliches rechtwinkliges $(x, y, z)$-Achsensystem mit dem Anfangspunkt auf der verzerrten Mittelfläche, der $z$-Achse in Richtung der Normalen dieser Fläche und der $x$-Achse in Richtung der Tangente der durch den Anfangspunkt gehenden Kurve $\beta = \text{const.}$ Die Geschwindigkeitskomponenten des Ursprungs-

punktes in Richtung der instantanen Lage der $x$- und der $y$-Achse sind

$$A(1+\varepsilon_1)\frac{d\alpha}{dt}+B(1+\varepsilon_2)\varpi\frac{d\beta}{dt},\quad B(1+\varepsilon_2)\sin\chi\frac{d\beta}{dt}.$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Achsendreikants, bezogen auf dieselben Richtungen, mögen mit

$$p_1'\frac{d\alpha}{dt}+p_2'\frac{d\beta}{dt},\quad q_1'\frac{d\alpha}{dt}+q_2'\frac{d\beta}{dt},\quad r_1'\frac{d\alpha}{dt}+r_2'\frac{d\beta}{dt}$$

bezeichnet werden. Wir haben dann in den Gleichungen (2) und (3) $A$ durch $A(1+\varepsilon_1)$, $B$ durch $B(1+\varepsilon_2)$, $p_1, p_2, \ldots, r_2$ durch $p_1'$, $p_2', \ldots, r_2'$ zu ersetzen. Die Richtungen der Krümmungslinien der verzerrten Mittelfläche, die Werte der Summe und des Produkts der Hauptkrümmungen und die Gleichungen der Indikatrix ergeben sich, wenn wir die entsprechenden Vertauschungen in den Formeln (4) bis (6) vornehmen.

Behalten wir nur erste Potenzen von $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ bei, so liefern die Gleichungen (3)

$$\left.\begin{aligned}
r_1' &= -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha}+\frac{\varpi}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\varepsilon_2}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{A}{B}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta},\\
r_2' &= \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{\varpi}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\varepsilon_1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{B}{A}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha},\\
\frac{q_2'}{B}&+\frac{p_1'}{A}=\varpi\frac{q_1'}{A}+\varepsilon_1\frac{p_1'}{A}+\varepsilon_2\frac{q_2'}{B}.
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Die Indikatrix der verzerrten Mittelfläche ist mit derselben Annäherung durch die Formel

$$-\frac{q_1'}{A}(1-\varepsilon_1)x^2+\left\{\frac{p_2'}{B}(1-\varepsilon_2)-\frac{p_1'}{A}\varpi\right\}y^2+2\frac{p_1'}{A}(1-\varepsilon_1)xy=\text{const.}$$

gegeben. Bezeichnen $R_1'$, $R_2'$ die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte der verzerrten Mittelfläche, die in einem bestimmten Punkte durch die $x$- und die $y$-Achse gelegt sind, und $\psi$ den Winkel, den eine der durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien der Fläche mit der $x$-Achse in dem Punkte einschließt, so haben wir in gleicher Annäherung

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{R_1'}&=-\frac{q_1'}{A}(1-\varepsilon_1),\quad \frac{1}{R_2'}=\frac{p_2'}{B}(1-\varepsilon_2)-\frac{p_1'}{A}\varpi,\\
\operatorname{tg}2\psi&=-\frac{2p_1'}{A}(1-\varepsilon_1)\Big/\left[\frac{q_1'}{A}(1-\varepsilon_1)+\frac{p_2'}{B}(1-\varepsilon_2)-\frac{p_1'}{A}\varpi\right].
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Aus diesen Formeln erhellt, daß, wenn die Dehnung bekannt, der Krümmungszustand der verzerrten Mittelfläche durch die Größen

$$-q_1'/A,\ p_2'/B,\ p_1'/A$$

definiert ist. Wir schreiben

$$-\frac{q_1'}{A} - \frac{1}{R_1} = \varkappa_1, \quad \frac{p_2'}{B} - \frac{1}{R_2} = \varkappa_2, \quad \frac{p_1'}{A} = \tau \tag{13}$$

und werden $\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ die „Krümmungsänderungen" nennen. In den besonderen Fällen der ebenen Platte, die schwach gebogen wird, und einer Schale, die eine kleine dehnungslose Verschiebung erfährt, werden diese Größen identisch mit denjenigen, die in Kap. XXII und Kap. XXIII mit denselben Buchstaben bezeichnet wurden.

Das Krümmungsmaß ist durch die Formel gegeben

$$\frac{1-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{AB}\left(\frac{\partial r_1'}{\partial \beta} - \frac{\partial r_2'}{\partial \alpha}\right),$$

wo $r_1', r_2'$ durch die ersten beiden der Gleichungen (11) gegeben sind. Ist Dehnung nicht vorhanden, so sind die Werte von $r_1', r_2'$ für die deformierte Fläche identisch mit den Werten von $r_1, r_2$ für die unverzerrte Fläche, und das Krümmungsmaß bleibt bei der Verzerrung ungeändert (Gaußscher Satz). Die Summe der Hauptkrümmungen, $1/R_1' + 1/R_2'$, läßt sich aus den Formeln (12) bestimmen.

## § 325. Verfahren zur Berechnung der Dehnung und der Krümmungsänderungen.

Um $\varepsilon_1, \ldots, p_1', \ldots$ durch die Koordinaten eines Punktes auf der verzerrten Mittelfläche oder durch die Verschiebung eines Punktes der unverzerrten Mittelfläche auszudrücken, führen wir ein Schema von neun Richtungskosinus ein, die die Richtungen der beweglichen $(x, y, z)$-Achsen in einem Punkte gegen feste $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$-Achsen ausdrücken. Das Schema sei

| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| $x$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

(14)

Bezeichnen nun x, y, z die Koordinaten eines Punktes der verzerrten Mittelfläche, so sind die Richtungskosinus $l_1, m_1, n_1$ der Tangente der Kurve $\beta = \text{const.}$, die durch den Punkt geht, durch die Gleichungen gegeben

$$A(1+\varepsilon_1)l_1 = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \alpha}, \quad A(1+\varepsilon_1)m_1 = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \alpha}, \quad A(1+\varepsilon_1)n_1 = \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \alpha}. \tag{15}$$

Die Richtungskosinus der Tangente der Kurve $\alpha = \text{const.}$, die durch den Punkt hindurchgeht, sind $l_2 \sin\chi + l_1 \cos\chi, \ldots$; werden daher $\varpi^2$ und $\varpi\varepsilon$ vernachlässigt, so sind $l_2, m_2, n_2$ durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{array}{c} B\{(1+\varepsilon_2)l_2+\varpi l_1\}=\frac{\partial x}{\partial \beta}, \quad B\{(1+\varepsilon_2)m_2+\varpi m_1\}=\frac{\partial y}{\partial \beta}, \\ B\{(1+\varepsilon_2)n_2+\varpi n_1\}=\frac{\partial z}{\partial \beta}. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Die Richtungskosinus $l_3$, $m_3$, $n_3$ der Normalen der verzerrten Mittelfläche sind durch die Gleichungen gegeben

$$l_3=m_1n_2-m_2n_1, \quad m_3=n_1l_2-n_2l_1, \quad n_3=l_1m_2-l_2m_1. \quad (17)$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) erhalten wir bei Beschränkung auf Größen erster Ordnung in $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$

$$\left.\begin{array}{l} 1+2\varepsilon_1=\frac{1}{A^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right\}, \\ 1+2\varepsilon_2=\frac{1}{B^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\right\}, \\ \varpi=\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}+\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right\}. \end{array}\right\} \quad (18)$$

Da ferner diejenige Gerade, deren Richtungskosinus, auf die beweglichen Achsen bezogen, $l_1$, $l_2$, $l_3$ sind, d. h. die x-Achse, gegen das feste Achsensystem eine feste Lage hat, so liefern die gewöhnlichen Formeln für bewegliche Koordinatensysteme drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial l_1}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt}-l_2\left(r_1'\frac{d\alpha}{dt}+r_2'\frac{d\beta}{dt}\right)+l_3\left(q_1'\frac{d\alpha}{dt}+q_2'\frac{d\beta}{dt}\right)=0;$$

wenn wir ausdrücken, daß die y- und die z-Achse fest sind, erhalten wir zwei andere, entsprechende Gleichungssysteme. Aus diesen ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} p_1'=l_3\frac{\partial l_2}{\partial \alpha}+m_3\frac{\partial m_2}{\partial \alpha}+n_3\frac{\partial n_2}{\partial \alpha}, & p_2'=l_3\frac{\partial l_2}{\partial \beta}+m_3\frac{\partial m_2}{\partial \beta}+n_3\frac{\partial n_2}{\partial \beta}, \\ q_1'=l_1\frac{\partial l_3}{\partial \alpha}+m_1\frac{\partial m_3}{\partial \alpha}+n_1\frac{\partial n_3}{\partial \alpha}, & q_2'=l_1\frac{\partial l_3}{\partial \beta}+m_1\frac{\partial m_3}{\partial \beta}+n_1\frac{\partial n_3}{\partial \beta}, \\ r_1'=l_2\frac{\partial l_1}{\partial \alpha}+m_2\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}+n_2\frac{\partial n_1}{\partial \alpha}, & r_2'=l_2\frac{\partial l_1}{\partial \beta}+m_2\frac{\partial m_1}{\partial \beta}+n_2\frac{\partial n_1}{\partial \beta}, \end{array}\right\} \quad (19)$$

Die Formeln (18) ermöglichen uns die Berechnung von $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$, und die Formeln (19) bestimmen $p_1'$, . . .

## § 326. Formeln im Falle kleiner Verschiebungen.

Es seien $u$, $v$, $w$ die Verschiebungskomponenten eines Punktes der unverzerrten Mittelfläche, bezogen auf die Tangenten der Kurven $\beta=$ const. und $\alpha=$ const. in diesem Punkte und die Normale der

Fläche in demselben Punkte. Wir wollen die Dehnung und die Krümmungsänderungen durch die Größen $u, v, w$ und ihre Differentialquotienten nach $\alpha$ und $\beta$ ausdrücken.

a) *Die Dehnung.*

Den Formeln (18) gemäß benötigen wir Ausdrücke für $\partial x/\partial \alpha, \ldots$, wo x, y, z die Koordinaten eines Punktes der verzerrten Mittelfläche in bezug auf ein festes Achsensystem. Als feste Achsen wählen wir die Bezugsachsen für $u, v, w$ in einem bestimmten Punkt der unverzerrten Mittelfläche und erhalten die gewünschten Ausdrücke durch Anwendung der Methode der beweglichen Achsen.

Es sei $P(\alpha, \beta)$ der betreffende Punkt der unverzerrten Mittelfläche, $P'(\alpha + \delta\alpha,\ \beta + \delta\beta)$ ein Nachbarpunkt auf dieser Fläche. Die Bezugsgeraden für $u, v, w$ bilden ein bewegliches Achsendreikant, und die Lage dieser Achsen in dem Fall, wo der Ursprungspunkt in $P'$ liegt, ergibt sich aus der Lage in dem Falle, wo der Ursprung in $P$ liegt, durch eine kleine Translation und eine kleine Drehung. Die Komponenten der Translation, auf die Achsen in $P$ bezogen, sind $A\delta\alpha$, $B\delta\beta$, 0. Die Komponenten der Drehung, auf dieselben Achsen bezogen, werden nach den Formeln von § 3?3 dargestellt durch

$$\frac{B\delta\beta}{R_2}, \quad -\frac{A\delta\alpha}{R_1}, \quad -\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\delta\beta}{A}.$$

Wird $P$ nach $P_1$ und $P'$ nach $P_1'$ verschoben, so sind die x, y, z von $P_1$ identisch mit den $u, v, w$ von $P$; die x, y, z von $P_1'$ sind

$$x + (\partial x/\partial\alpha)\delta\alpha + (\partial x/\partial\beta)\delta\beta, \ldots,$$

und die $u, v, w$ von $P'$ sind

$$u + (\partial u/\partial\alpha)\delta\alpha + (\partial u/\partial\beta)/\delta\beta, \ldots$$

Diese Größen sind durch die bekannten Formeln aus der Theorie der beweglichen Achsen verknüpft:

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial x}{\partial\beta}\delta\beta = A\delta\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial u}{\partial\beta}\delta\beta\right) - v\left(-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\delta\beta}{A}\right) + w\left(-\frac{A\delta\alpha}{R_1}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial y}{\partial\beta}\delta\beta = B\delta\beta + \left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial v}{\partial\beta}\delta\beta\right) - w\frac{B\delta\beta}{R_2} + u\left(-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\delta\beta}{A}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial z}{\partial\beta}\delta\beta = \left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial w}{\partial\beta}\delta\beta\right) - u\left(-\frac{A\delta\alpha}{R_1}\right) + v\frac{B\delta\beta}{R_2};$$

in diesen Formeln sind die Koeffizienten von $\delta\alpha$ bezw. $\delta\beta$ links und rechts einander gleichzusetzen.

Das geschilderte Verfahren führt auf folgende Ausdrücke für $\partial \mathfrak{x}/\partial \alpha, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha} = A + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{A w}{R_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \alpha} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{A u}{R_1}, \\ &\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \beta} = B + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{B w}{R_2}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \beta} = \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{B v}{R_2}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Werden Produkte der Größen $u, v, w$ und ihrer Differentialquotienten vernachlässigt, so liefern die Formeln (18) und (20)

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_2}, \\ &\varpi = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Diese Formeln bestimmen die *Dehnung.*

Ist die Verschiebung dehnungslos, so genügen $u, v, w$ dem System partieller Differentialgleichungen, das sich aus (21) ergibt, wenn die rechten Seiten gleich null gesetzt werden. Wie wir in besonderen Fällen in § 319 und § 320 sahen, ist die Annahme, daß die Verschiebung dehnungslos sei, beinahe hinreichend, um $u, v, w$ als Funktionen von $\alpha$ und $\beta$ zu bestimmen.

b) *Die Krümmungsänderungen.*

Den Formeln (19) gemäß benötigen wir Ausdrücke für die auf die festen Achsen bezogenen Richtungskosinus $l_1, \ldots$ der beweglichen Achsen; ebenso brauchen wir Ausdrücke für $\partial l_1/\partial \alpha, \ldots$ Als feste Achsen wählen wir wie vorhin die Bezugsgeraden für $u, v, w$ in einem Punkt $P$ der unverzerrten Mittelfläche. Mittels (15), (16), (17), (20), (21) können wir Ausdrücke für die Werte von $l_1, \ldots$ in dem entsprechenden Punkt $P_1$ der unverzerrten Mittelfläche in folgender Form hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &l_1 = 1, \quad m_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad n_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}, \\ &l_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad m_2 = 1, \quad n_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}, \\ &l_3 = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}, \quad m_3 = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}, \quad n_3 = 1. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Dies sind nicht die allgemeinen Ausdrücke für $l_1, \ldots$ in einem beliebigen Punkte. Vielmehr sind es Ausdrücke für die Richtungskosinus der beweglichen Achsen in einem Punkte der verzerrten Mittelfläche, bezogen auf die Bezugsgeraden für $u, v, w$ in dem *ent-*

*sprechenden Punkt* der unverzerrten Mittelfläche. Für diese letzteren Richtungskosinus können wir das Orthogonalschema einführen

| | $u$ | $v$ | $w$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $L_1$ | $M_1$ | $N_1$ |
| $y$ | $L_2$ | $M_2$ | $N_2$ |
| $z$ | $L_3$ | $M_3$ | $N_3$ |

Dann haben wir die Werte

$$\left.\begin{aligned} &L_1 = 1, \quad M_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad N_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}, \\ &L_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad M_2 = 1, \quad N_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}, \\ &L_3 = -\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}, \quad M_3 = -\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}, \quad N_3 = 1; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

dieselben gelten für alle Punkte. ' Wir wenden die Methode der beweglichen Achsen an, um Ausdrücke für $\partial l_1/\partial \alpha, \ldots$ abzuleiten; darauf stellen wir nach Formel (19) die Ausdrücke für $p_1', \ldots$ auf.

Die Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen in einem Nachbarpunkt $P_1'$, bezogen auf die Bezugsgeraden für $u$, $v$, $w$ in $P'$, würden mit $L_1 + (\partial L_1/\partial \alpha)\delta\alpha + (\partial L_1/\partial \beta)\delta\beta, \ldots$ bezeichnet werden; die Richtungskosinus der $(x, y, z)$-Achsen in $P_1'$, bezogen auf die festen Achsen, die mit den Bezugsgraden für $u, v, w$ in $P$ zusammenfallen, würden mit $l_1 + (\partial l_1/\delta\alpha)\delta\alpha + (\partial l_1/\partial\beta)\delta\beta, \ldots$ zu bezeichnen sein. Da die Komponenten der Drehung der Bezugsgeraden für $u$, $v$, $w$ gleich

$$\frac{B\delta\beta}{R_2}, \quad -\frac{A\delta\alpha}{R_1}, \quad -\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\delta\beta}{A}$$

sind, so haben wir die bekannten Formeln für bewegliche Achsensysteme in der Form

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial l_1}{\partial \beta}\delta\beta = \left(\frac{\partial L_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial L_1}{\partial \beta}\delta\beta\right) - \left(M_1 - \frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\delta\beta}{A}\right) + N_1\left(-\frac{A\delta\alpha}{R_1}\right)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial m_1}{\partial \beta}\delta\beta = \left(\frac{\partial M_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial M_1}{\partial \beta}\delta\beta\right) - N_1\frac{B\delta\beta}{R_2} + L_1\left(-\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\delta\alpha}{B} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\delta\beta}{A}\right)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial n_1}{\partial \beta}\delta\beta = \left(\frac{\partial N_1}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial N_1}{\partial \beta}\delta\beta\right) - L_1\left(-\frac{A\delta\alpha}{R_1}\right) + M_1\frac{B\delta\beta}{R_2},$$

und es gelten entsprechende Formeln, in denen der Index 1 an $l$, $m$, $n$ und $L$, $M$, $N$ durch 2 bezw. durch 3 ersetzt ist. Setzen wir für $L_1, \ldots$ die in (23) gegebenen Werte ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial l_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{Au}{R_1}\right),$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \beta} = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) - \frac{B}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{A}{R_1},$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{B}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)$$

und

$$\frac{\partial l_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(-\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{A}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right),$$

$$\frac{\partial l_2}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{Bv}{R_2}\right) - \frac{1}{A^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}\right) + \frac{B}{R_2}.$$

Um $p_1', \ldots$ aus den Formeln (19) zu berechnen, führen wir für $l_1, \ldots$ die in (22) gegebenen Werte und für $\partial l_1/\partial \alpha, \ldots$ die eben erhaltenen Werte ein und bemerken, daß zwei der Formeln (19) sich schreiben lassen

$$q_1' = -\left(l_3\frac{\partial l_1}{\partial \alpha} + m_3\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} + n_3\frac{\partial n_1}{\partial \alpha}\right), \quad q_2' = -\left(l_3\frac{\partial l_1}{\partial \beta} + m_3\frac{\partial m_1}{\partial \beta} + n_3\frac{\partial n_1}{\partial \beta}\right),$$

da (14) ein Orthogonalschema darstellt.

Das eben geschilderte Verfahren führt auf die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
p_1' &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)-\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right),\\
q_1' &= -\frac{A}{R_1}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right),\\
r_1' &= -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\frac{A}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
p_2' &= \frac{B}{R_2}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right),\\
q_2' &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{B}{AR_2}\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right),\\
r_2' &= \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)-\frac{B}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Wir können nun die Formeln für die Krümmungsänderungen wie folgt hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right),\\
\varkappa_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right),\\
\tau &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{AR_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha}.
\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

Die obigen Formeln lassen sich verschiedentlich verifizieren:

1) Im Falle einer ebenen Platte haben wir, wenn $\alpha$ und $\beta$ kartesische Koordinaten,

$$\varkappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},\quad \varkappa_2=\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2},\quad \tau=\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Diese Formeln stimmen mit denjenigen in § 298 überein.

2) Im Falle von Zylinder- oder Kugelschalen können die Bedingungen dafür, daß die Verschiebung dehnungslos ist, als besondere Fälle der Formeln (21) erhalten werden, und die Ausdrücke für die Krümmungsänderungen, die sich ergeben, wenn wir (26) durch diese Bedingungen vereinfachen, stimmen mit den in § 319 und § 320 erhaltenen überein.

3) Eine Kugel werde durch rein normale Verschiebung schwach deformiert, und zwar so, daß der Radius gleich $a+b\,P_n(\cos\theta)$ wird, wo $b$ eine kleine Größe, $P_n$ den $n$ten Legendreschen Koeffizienten und $\theta$ das Komplement der Breite bedeutet. Die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen der deformierten Oberfläche werden, wie sich mittels der Formeln dieses Paragraphen und derjenigen von § 324 zeigen läßt, bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in $b$ gleich

$$\frac{2}{a}+\frac{b}{a^2}(n-1)(n+2)P_n(\cos\theta)\quad\text{und}\quad\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a^3}(n-1)(n+2)P_n(\cos\theta),$$

Dies deckt sich mit bekannten Resultaten.

4) Für eine beliebige Fläche sind, wenn $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ durch (21) und $p_1'$,... durch (24) und (25) gegeben sind, die Gleichungen (11) identisch befriedigt, falls natürlich Quadrate und Produkte der Größen $u$, $v$, $w$ und ihrer Differentialquotienten vernachlässigt werden.

## § 327. Natur der Verzerrung in einer gebogenen Platte oder Schale.

Um den Verzerrungszustand in einer gebogenen Platte oder Schale zu untersuchen, nehmen wir an, die Mittelfläche werde unter geringer Dehnung ihrer Linienelemente tatsächlich so deformiert, daß sie in eine Fläche übergeht, die sich von irgend einer der auf die unverzerrte Mittelfläche verbiegbaren Flächen nur wenig unterscheidet. Wir betrachten die verzerrte Mittelfläche als gegeben; wir denken uns einen Zustand der Platte, bei dem die Linienelemente, die ursprünglich zur unverzerrten Mittelfläche normal sind, gerade bleiben, zur verzerrten Mittelfläche normal werden und keine Dehnung erfahren. Es sei $P$ ein Punkt der unverzerrten Mittelfläche, und es werde $P$ nach $P_1$ auf der verzerrten Mittelfläche verschoben. $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$ seien die auf die festen Achsen bezogenen Koordinaten von $P_1$. Die Punkte $P$ und $P_1$ haben dasselbe $\alpha$ und dasselbe $\beta$. $Q$ sei ein Punkt der Normalen der unverzerrten Mittelfläche in $P$, und $z$ sei der Abstand des Punktes $Q$ von $P$, positiv gerechnet in dem für die Richtung der Normalen der Fläche verabredeten Sinne. Erfährt die Platte die oben geschilderte Verschiebung, so rückt $Q$ nach dem Punkt $Q_1$, dessen Koordinaten

$$\mathrm{x} + l_3 z, \quad \mathrm{y} + m_3 z, \quad \mathrm{z} + n_3 z$$

sind, wo $l_3$, $m_3$, $n_3$ wie in § 325 die Richtungskosinus der Normalen der verzerrten Mittelfläche bedeuten.

Der tatsächliche Zustand, den die Platte infolge einer Deformation annimmt, die die Mittelfläche in die vorgeschriebene Form überführt, ergibt sich aus diesem gedachten Zustand durch Überlagerung einer zusätzlichen Verschiebung der Punkte $Q_1$. Es seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Komponenten dieser zusätzlichen Verschiebung, bezogen auf ein wie in § 324 definiertes $(x, y, z)$-Achsensystem mit dem Ursprung in $P_1$. Dann sind die Koordinaten der Endlage von $Q$

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{x} + l_1\xi + l_2\eta + l_3(z + \zeta), \quad \mathrm{y} + m_1\xi + m_2\eta + m_3(z + \zeta), \\ \mathrm{z} + n_1\xi + n_2\eta + n_3(z + \zeta).\end{array}\right\} \quad (27)$$

In diesen Ausdrücken bedeuten $l_1$,... die in § 325 so bezeichneten Richtungskosinus, $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$, $l_1$,... $n_3$ sind Funktionen von $\alpha$ und $\beta$, und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $z$.

Wir überlegen, welche Änderungen in diesen Ausdrücken Platz zu greifen haben, wenn wir statt der Punkte $P$, $Q$ die Nachbarpunkte

$P'$, $Q'$ einführen, so daß $Q'$ auf der Normalen der unverzerrten Mittelfläche in $P'$ liegt und die Entfernung $P'Q'$ gleich $z + \delta z$ ist, wo $\delta z$ klein. $P$ sei durch $(\alpha, \beta)$, $P'$ durch $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$ definiert, wo $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ klein; ferner bezeichne $\mathrm{r}$ die Entfernung $QQ'$, und $l, m, n$ seien die Richtungskosinus der Geraden $QQ'$, bezogen auf die Tangenten der durch $P$ gehenden Kurven $\beta = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$ und die Normale der unverzerrten Mittelfläche in $P$. Die Größen $\alpha$, $\beta$, $z$ können als die Parameter dreier orthogonaler Flächenscharen angesehen werden. Die Flächen $z = \text{const.}$ sind zur Mittelfläche parallel, und die Flächen $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ sind abwickelbare Flächen, deren Erzeugende die Normalen der unverzerrten Mittelfläche in den Punkten der verschiedenen Krümmungslinien sind. Das Linienelement $QQ' = \mathrm{r}$ drückt sich durch diese Parameter mittels der Formel aus

$$\left[\left\{A\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)\delta\alpha\right\}^2 + \left\{B\left(1 - \frac{z}{R_2}\right)\delta\beta\right\}^2 + (\delta z)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

und die Projektionen dieses Elements auf die Tangenten der auf der Mittelfläche gezogenen Kurven $\beta = \text{const.}$, $\alpha = \text{const.}$ und auf die Normale dieser Fläche sind $l\mathrm{r}$, $m\mathrm{r}$, $n\mathrm{r}$. Somit haben wir die Formeln

$$\delta\alpha = \frac{l\mathrm{r}}{A(1 - z/R_1)}, \quad \delta\beta = \frac{m\mathrm{r}}{B(1 - z/R_2)}, \quad \delta z = n\mathrm{r}. \tag{28}$$

Um die Koordinaten der Endlage von $Q'$ zu berechnen, haben wir in (27)

$$\mathrm{x} \text{ durch } \mathrm{x} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\beta}\delta\beta, \ldots$$

$$l_1 \text{ durch } l_1 + l_2(r_1'\delta\alpha + r_2'\delta\beta) - l_3(q_1'\delta\alpha + q_2'\delta\beta),$$

$$l_2 \text{ durch } l_2 + l_3(p_1'\delta\alpha + p_2'\delta\beta) - l_1(r_1'\delta\alpha + r_2'\delta\beta),$$

$$l_3 \text{ durch } l_3 + l_1(q_1'\delta\alpha + q_2'\delta\beta) - l_2(p_1'\delta\alpha + p_2'\delta\beta),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\xi \text{ durch } \xi + \frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\delta\beta + \frac{\partial\xi}{\partial z}\delta z, \ldots$$

$$z \text{ durch } z + \delta z$$

zu ersetzen. Wir wenden dann die Formeln (15) und (16) für $\partial\mathrm{x}/\partial\alpha, \ldots$ und die Formeln (28) für $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta z$ an.

Es bezeichne $\mathrm{r}_1$ den Abstand zwischen den Endlagen von $Q$ und $Q'$. Wir drücken $\mathrm{r}_1$ als homogene quadratische Funktion von $l, m, n$ aus und leiten mit Hilfe der Formel

$$\mathrm{r}_1^2 = \mathrm{r}^2[(l^2 + m^2 + n^2) + 2(e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + e_{yz}mn + e_{zx}nl + e_{xy}lm)]$$

Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten ab. Der Unterschied der x-Koordinaten der Endlagen von $Q$ und $Q'$ ist nun

$$
\begin{aligned}
&l_1(1+\varepsilon_1)\frac{l\mathrm{r}}{1-z/R_1} + \left\{l_1\varpi + l_2(1+\varepsilon_2)\right\}\frac{m\mathrm{r}}{1-z/R_2}\\
&+ \xi\left\{(l_2 r_1' - l_3 q_1')\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + (l_2 r_2' - l_3 q_2')\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)}\right\}\\
&+ \eta\left\{(l_3 p_1' - l_1 r_1')\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + (l_3 p_2' - l_1 r_2')\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)}\right\}\\
&+ (z+\zeta)\{(l_1 q_1' - l_2 p_1')\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + (l_1 q_2' - l_2 p_2')\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)}\\
&+ l_1\left\{\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)} + \frac{\partial\xi}{\partial z}n\mathrm{r}\right\}\\
&+ l_2\left\{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + \frac{\partial\eta}{\partial\beta}\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)} + \frac{\partial\eta}{\partial z}n\mathrm{r}\right\}\\
&+ l_3\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{l\mathrm{r}}{A(1-z/R_1)} + \frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\frac{m\mathrm{r}}{B(1-z/R_2)} + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)n\mathrm{r}\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Unterschiede der y- und der z-Koordinaten ergeben sich, wenn wir $m_1$, $m_2$, $m_3$ bezw. $n_1$, $n_2$, $n_3$ für $l_1$, $l_2$, $l_3$ substituieren. Da (14) ein Orthogonalschema darstellt, erhalten wir den Wert von $\mathrm{r}_1^2$ in der Form

$$
\begin{aligned}
\mathrm{r}_1^2 = \mathrm{r}^2\Big[l &+ \frac{l}{1-z/R_1}\left\{\frac{z}{R_1} + \varepsilon_1 - \frac{r_1'}{A}\eta + \frac{q_1'}{A}(z+\zeta) + \frac{1}{A}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right\}\\
&+ \frac{m}{1-z/R_2}\left\{\varpi - \frac{r_2'}{B}\eta + \frac{q_2'}{B}(z+\zeta) + \frac{1}{B}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right\} + n\frac{\partial\xi}{\partial z}\Big]^2\\
+ \mathrm{r}^2\Big[&\frac{l}{1-z/R_1}\left\{-\frac{p_1'}{A}(z+\zeta) + \frac{r_1'}{A}\xi + \frac{1}{A}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right\} + m\\
&+ \frac{m}{1-z/R_2}\left\{\frac{z}{R_2} + \varepsilon_2 - \frac{p_2'}{B}(z+\zeta) + \frac{r_2'}{B}\xi + \frac{1}{B}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right\} + n\frac{\partial\eta}{\partial z}\Big]^2\\
+ \mathrm{r}^2\Big[&\frac{l}{1-z/R_1}\left\{-\frac{q_1'}{A}\xi + \frac{p_1'}{A}\eta + \frac{1}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right\}\\
&+ \frac{m}{1-z/R_2}\left\{-\frac{q_2'}{B}\xi + \frac{p_2'}{B}\eta + \frac{1}{B}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right\} + n\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\Big]^2. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Bei Ableitung von Ausdrücken für die Verzerrungskomponenten bemerken wir, daß, wenn die Verzerrungen klein sein sollen, offenbar folgende Größen klein sein müssen:

$$
\frac{z}{1-z/R_1}\left(\frac{q_1'}{A} + \frac{1}{R_1}\right), \qquad \frac{z}{1-z/R_2}\left(-\frac{p_2'}{B} + \frac{1}{R_2}\right),
$$

$$
\frac{z}{1-z/R_2}\frac{q_2'}{B} - \frac{z}{1-z/R_1}\frac{p_1'}{A}.
$$

Die dritte der Gleichungen (11), § 324, zeigt, daß $p_1'/A + q_2'/B$ eine kleine Größe ist, und wir erkennen daher, daß in den Bezeichnungen von (13), § 324, die Größen $z\varkappa_1$, $z\varkappa_2$, $z\tau$ klein sein müssen.

Die Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten, die wir aus (29) erhalten, lauten

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{1-z/R_1}\left\{\varepsilon_1 - z\varkappa_1 + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} - r_1'\eta + q_1'\zeta\right)\right\},\\
e_{yy} &= \frac{1}{1-z/R_2}\left\{\varepsilon_2 - z\varkappa_2 + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\beta} - p_2'\zeta + r_2'\xi\right)\right\},\\
e_{xy} &= \frac{\varpi}{1-z/R_2} - \tau z\left(\frac{1}{1-z/R_1} + \frac{1}{1-z/R_2}\right) + \frac{z}{1-z/R_2}\left(\frac{q_2'}{B} + \frac{p_1'}{A}\right)\\
&+ \frac{1}{1-z/R_1}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} - p_1'\zeta + r_1'\xi\right) + \frac{1}{1-z/R_2}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\beta} - r_2'\eta + q_2'\zeta\right),\\
e_{zz} &= \frac{\partial\zeta}{\partial z},\\
e_{zx} &= \frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{1}{1-z/R_1}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} - q_1'\xi + p_1'\eta\right),\\
e_{yz} &= \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{1}{1-z/R_2}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} - q_2'\xi + p_2'\eta\right).
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

In diesen Ausdrücken sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $z$, die für alle Werte von $\alpha$, $\beta$ mit $z$ verschwinden.

Wir bemerken, daß wir die in § 317 für $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{xy}$ gefundenen Werte aus den obigen erhalten würden, wenn wir $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ streichen und $1 - z/R_1$ und $1 - z/R_2$ durch eins ersetzen.

## § 328. Kennzeichnung der Spannung in einer gebogenen Platte oder Schale.

Die Spannungsresultanten und Spannungsmomente in einer krummen Platte oder Schale oder in einer stark gebogenen ebenen Platte lassen sich in ähnlicher Weise definieren wie bei einer schwach deformierten ebenen Platte (§ 294). Es bezeichne $s$ eine beliebige Kurve auf der verzerrten Mittelfläche, $\nu$ die in bestimmtem Sinne gezogene Normale dieser Kurve in der Tangentialebene der Fläche in einem Punkt $P_1$; der Umlaufungssinn von $s$ möge so gewählt sein, daß die Richtungen der Normalen $\nu$ und der Tangente an $s$ und die als positiv angenommene Richtung der Flächennormalen in $P_1$ die Achsen eines rechtshändigen Systems bilden. Wir legen durch die Tangente von $s$ in $P_1$ einen Normalschnitt der verzerrten Mittelfläche und begrenzen auf ihm ein kleines Flächenstück durch die Normale der Fläche in $P_1$ und die Normale der (ebenen) Schnittkurve in einem Nachbarpunkt $P_1'$. Die Spannungen, die in diesem Flächenstück von dem Teil der Platte, der auf der von der Normalenrichtung $\nu$ be-

zeichneten Seite von $s$ liegt, auf den übrigen Teil ausgeübt werden, reduzieren sich auf eine Kraft in $P_1$ und ein Kräftepaar. Die Mittelwerte der Komponenten dieser Kraft und dieses Kräftepaars pro Längeneinheit von $P_1 P_1'$ bestimmen sich als Quotienten der Beträge der Komponenten und des Betrages dieser Länge. Die Grenzwerte dieser Mittelwerte stellen die zu der Kurve $s$ im Punkte $P_1$ gehörenden Spannungsresultanten und Spannungsmomente dar. Wir bezeichnen sie wie in § 294 mit $T$, $S$, $N$, $H$, $G$. Um sie auszudrücken, führen wir vorübergehend $(x', y', z)$-Achsen ein, die in die Normale $\nu$, die Tangente von $s$ und die Normale der verzerrten Mittelfläche in $P_1$ fallen, und bezeichnen mit $X'_{x'}, \ldots$ die auf diese Achsen bezogenen Spannungskomponenten. Ist dann $R'$ der Krümmungsradius des Normalschnitts der Fläche, der durch die Tangente von $s$ in $P_1$ gelegt ist, so haben wir die Formeln

$$T = \int_{-h}^{h} X'_{x'}\left(1 - \frac{z}{R'}\right) dz, \qquad S = \int_{-h}^{h} X'_{y'}\left(1 - \frac{z}{R'}\right) dz,$$

$$N = \int_{-h}^{h} X'_{z}\left(1 - \frac{z}{R'}\right) dz,$$

$$H = \int_{-h}^{h} - z X'_{y'}\left(1 - \frac{z}{R'}\right) dz, \qquad G = \int_{-h}^{h} z X'_{x'}\left(1 - \frac{z}{R'}\right) dz.$$

Führen wir die $(x, y, z)$-Achsen von § 324 ein und bezeichnen die Spannungsresultanten und Spannungsmomente, die zu den zur $x$- und zur $y$-Achse normalen Kurven gehören, durch $T, \ldots$ mit dem Index 1 oder 2, so erhalten wir die Formeln

$$\left.\begin{aligned} T_1 = \int_{-h}^{h} X_x\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dz, \qquad S_1 = \int_{-h}^{h} X_y\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dz, \\ N_1 = \int_{-h}^{h} X_z\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dz, \\ H_1 = \int_{-h}^{h} - z X_y\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dz, \qquad G = \int_{-h}^{h} z X_x\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dz \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

und

$$\left.\begin{array}{c} T_2 = \int_{-h}^{h} Y_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)dz, \qquad S_2 = \int_{-h}^{h} - X_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)dz, \\ N_2 = \int_{-h}^{h} Y_z\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)dz, \\ H_2 = \int_{-h}^{h} z X_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)dz, \qquad G_2 = \int_{-h}^{h} z Y_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right)dz, \end{array}\right\} \quad (32)$$

in denen $R_1'$ und $R_2'$ wie in § 324 die Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte bezeichnen, die durch die $x$- und die $y$-Achse gelegt sind.

Wir bemerken, daß die Beziehungen $S_1 + S_2 = 0$ und $H_1 + H_2 = 0$ die im Falle einer schwach deformierten ebenen Platte gelten, nicht zutreffen, wenn die verzerrte Mittelfläche stark gekrümmt ist. Die Relationen zwischen den $T, S, N, G, H$ für eine bestimmte Richtung $\nu$ und den $T, S, N, G, H$ für zwei spezielle Richtungen $x$ und $y$, die wir in § 295 für eine schwach deformierte ebene Platte fanden, werden gleichfalls bei erheblicher Krümmung eine Änderung erleiden.

## § 329. Näherungsformeln für die Verzerrung, die Spannungsresultanten und die Spannungsmomente.

Wir können aus (30), § 327, durch ein ganz ähnliches Verfahren wie in § 257 und § 259 Näherungsausdrücke für die Verzerrungskomponenten ableiten. Da $\xi$, $\eta$, $\zeta$ für alle Werte von $\alpha$ und $\beta$ mit $z$ verschwinden und $\partial\xi/\partial z, \ldots$ kleine Größen von der Ordnung zulässiger Verzerrungen sein müssen, so können $\xi, \eta, \zeta$ und ihre Differentialquotienten nach $\alpha$ und $\beta$ in erster Annäherung weggelassen werden. Ferner können wir in erster Annäherung die Produkte von $z/R_1$ oder $z/R_2$ und irgend einer Verzerrungskomponente vernachlässigen. Insbesondere können wir, da $q_2'/B + p_1'/A$ von der Ordnung $\varepsilon_1/R_1$ ist, das Produkt aus dieser Größe und $z$ weglassen; aus demselben Grunde ersetzen wir Terme wie $\frac{\varepsilon_1}{1 - z/R_1}$ und $\frac{z\varkappa_1}{1 - z/R_1}$ durch $\varepsilon_1$ und $z\varkappa_1$. Auf diese Weise erhalten wir die Näherungsformeln[1])

$$\left.\begin{array}{c} e_{xx} = \varepsilon_1 - z\varkappa_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2 - z\varkappa_2, \quad e_{xy} = \varpi - 2z\tau, \\ e_{zx} = \frac{\partial\xi}{\partial z}, \quad e_{yz} = \frac{\partial\eta}{\partial z}, \quad e_{zz} = \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \end{array}\right\} \quad (33)$$

Hierin können $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in erster Annäherung als unabhängig von $\alpha$

1) Hiermit gleichwertige Formeln im Falle einer ebenen Platte gab Kirchhoff, *Vorlesungen über math. Physik, Mechanik*, Vorlesung 30.

und $\beta$ angesehen werden. Bleibt die Mittelfläche ungedehnt oder sind die Dehnungsgrößen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ klein gegen die Biegungsverzerrungen $z\varkappa_1$, $z\varkappa_2$, $z\tau$, so lassen sich diese Ausdrücke weiterhin durch Streichung von $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ vereinfachen.

Sowohl die Näherungsformeln (33) für die Verzerrungskomponenten als auch die strengeren Formeln (30) enthalten die unbekannten Verschiebungen $\xi$, $\eta$, $\zeta$; daher ist es nötig, für diese Größen oder jedenfalls für ihre Differentialquotienten nach $z$ Werte abzuleiten, die wenigstens annähernd richtig sind.

Wir beginnen mit dem Falle einer ebenen Platte und wählen für $\alpha, \beta$ kartesische rechtwinklige Koordinaten, sodaß $A$ und $B$ gleich eins sind und $1/R_1$ und $1/R_2$ verschwinden. In den Formeln (33) sind $\xi, \eta, \zeta$ nahezu unabhängig von $\alpha, \beta$. Wir betrachten ein dünnes zylindrisches oder prismatisches Stück der Platte, das in eine feine Durchbohrung derselben hineinpassen würde. Wir wollen den Querschnitt dieses Prismas so klein annehmen, daß $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varpi$ und $\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$ in ihm als Konstante behandelt werden können. Dann haben die durch (33) ausgedrückten Verzerrungskomponenten in allen Punkten eines Querschnitts des dünnen Prismas denselben Wert. Wenn weder Massenkräfte noch Spannungen auf die Plattenseiten wirken, haben wir, wie wir aus § 306 wissen, in dem dünnen Prisma, in dem die Verzerrungen über jeden Querschnitt konstant sind, einen ebenen Spannungszustand. In dem Grade der Annäherung, mit dem wir es hier zu tun haben, verschwinden daher $X_z$, $Y_z$, $Z_z$, und wir haben

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - z(\varkappa_1 + \varkappa_2)\right\}. \tag{34}$$

Die übrigen Spannungskomponenten sind dann durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 - z(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2)\right\}, \\ Y_y &= \frac{E}{1-\sigma^2}\left\{\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1 - z(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1)\right\}, \\ X_y &= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\varpi - 2\tau z\right). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Aus diesen Ergebnissen können wir Näherungsformeln für die Spannungsresultanten und Spannungsmomente ableiten. Zu diesem Zwecke streichen wir in den Formeln (31) und (32) die Faktoren $(1 - z/R_2')$ und $(1 - z/R_1')$. Für $N_1$, $N_2$ würden wir den Wert null erhalten, während $T_1, \ldots$ und $G_1, \ldots$ durch die Formeln

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \quad -S_2 = S_1 = \frac{Eh}{1+\sigma}\varpi \tag{36}$$

und

$$G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2),\ G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1),\ -H_2 = H_1 = D(1-\sigma)\tau \quad (37)$$

gegeben wären. In derselben Annäherung ist die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\left.\begin{array}{l}\{Eh/(1-\sigma^2)\}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\varpi^2)] \\ \quad + \tfrac{1}{2}D[(\varkappa_1+\varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2)].\end{array}\right\} \quad (38)$$

Um im Falle einer ebenen Platte eine weitergehende Annäherung zu erhalten, betrachten wir die Verzerrung in dem dünnen Prisma als linear über die Querschnitte veränderlich. Wie wir aus § 306 wissen, verschwinden dann $X_z$ und $Y_z$ nicht, aber die dritte der Gleichungen (34) und die Formeln (35) bleiben bestehen, daher gelten auch (36) und (37) noch angenähert, während $N_1$ und $N_2$ dem Ergebnis von § 306 gemäß durch die Formeln

$$N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}(\varkappa_1 + \varkappa_2), \qquad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}(\varkappa_1 + \varkappa_2)$$

gegeben sind. Diese Werte für $N_1$, $N_2$ würden sich auch aus den Gleichungen (12) von § 296 ergeben, wenn darin die Kräftepaare $L'$, $M'$ gestrichen und die Werte von $G_1$, $G_2$, $H_1$ aus (37) eingesetzt werden.

Aus dieser Untersuchung des Falles der ebenen Platte können wir schließen, daß die Näherungsausdrücke (33) und ( 4) für die Verzerrungskomponenten genau genug sind zur Bestimmung der Spannungsmomente, daß sie aber zur Bestimmung der Spannungsresultanten nur dann hinreichen, wenn die Deformation wesentlich durch die Dehnung der Mittelebene gekennzeichnet ist. Die Formeln (37) für die Spannungsmomente stimmen überein mit denjenigen, die wir in §§ 313, 314 benutzten. Die in §§ 307, 308, 312 erhaltenen Resultate scheinen den Schluß zu bestätigen, daß die Ausdrücke (37) für die Spannungsmomente in praktisch wichtigen Fällen eine hinreichende Annäherung liefern, gleichgültig ob die Platte von Massenkräften und Spannungen auf ihre Seiten beansprucht wird oder nicht.

Im Falle einer krummen Platte oder Schale können wir in erster Annäherung die Formeln (33) und den Satz von § 306 ebenso wie bei einer ebenen Platte anwenden. Die Gleichungen (34) und (35) bleiben also annähernd richtig. Aus ihnen können wir die Terme niedrigster Ordnung in den Ausdrücken für die Spannungsresultanten vom Typus $T$, $S$ und die Spannungsmomente ableiten. Durch Einsetzen in (31) und (32) erhalten wir die die Glieder erster Ordnung in $h$ umfassenden Werte

$$\left.\begin{array}{c}T_1 = \dfrac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad T_2 = \dfrac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \\ -S_2 = S_1 = \dfrac{Eh}{1+\sigma}\varpi,\end{array}\right\} \quad (36')$$

und die die Glieder dritter Ordnung in $h$ einschließenden Werte

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -D\left\{\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2 + \frac{1}{R_2'}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2)\right\}, \\ G_2 &= -D\left\{\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1 + \frac{1}{R_1'}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1)\right\}, \\ H_1 = D\left(1-\sigma\right)\left(\tau + \tfrac{1}{2}\frac{\varpi}{R_2'}\right), &\quad H_2 = -D\left(1-\sigma\right)\left(\tau + \tfrac{1}{2}\frac{\varpi}{R_1'}\right). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Diese erste Annäherung umfaßt zwei extreme Fälle. Im ersten Falle sind die Dehnungsgrößen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ klein gegen die Biegungsverzerrungen $z\varkappa_1$, $z\varkappa_2$, $z\tau$. Die Spannungsmomente sind dann durch die Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned} G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1), \\ -H_2 = H_1 = D(1-\sigma)\tau, \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

und die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit ist durch die Formel gegeben, die wir in § 317 mittels einer gewissen Annahme gewannen, nämlich

$$\tfrac{1}{2}D[(\varkappa_1 + \varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varkappa_1\varkappa_2 - \tau^2)],$$

die Spannungsresultanten aber sind unzureichend bestimmt.

In dem zweiten extremen Fall sind die Biegungsverzerrungen $z\varkappa_1$, $z\varkappa_2$, $z\tau$ klein gegen die Reckungen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$. Dann sind die Spannungsresultanten vom Typus $T$, $S$ durch die Formeln (36) gegeben, und die Spannungsresultanten vom Typus $N$ und die Spannungsmomente sind unbedeutend. Die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit ist durch die Formel gegeben

$$\{Eh/(1-\sigma^2)[\}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\varpi^2)]. \tag{40}$$

Wenn die Dehnungsgrößen mit den Biegungsverzerrungen vergleichbar sind, sodaß z. B. $\varpi$ von der Ordnung $h\tau$ ist, so sind die Spannungsresultanten vom Typus $T$, $S$ mit hinreichender Annäherung durch (36) gegeben, und die Spannungsmomente sind mit hinreichender Annäherung durch (37) gegeben, während die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit durch (38) dargestellt ist.

Aus dieser Untersuchung der verschiedenen möglichen Fälle geht hervor, daß die Spannungsmomente $G_1$, $G_2$, $H_1$, $H_2$, falls sie überhaupt berechnet werden müssen, nach den Formeln (37) statt nach (39) ermittelt werden können.

Wenn die Reckungen groß sind gegen die Biegungsverzerrungen, so lassen sich angenähert geltende Gleichgewichtsgleichungen mittels des in § 115 geschilderten Variationsverfahrens aufstellen, indem die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit gemäß Formel (40) angesetzt wird. In demselben Falle lassen sich näherungsweise geltende Schwingungs-

gleichungen durch Benutzung dieses Ausdrucks (40) für die Verzerrungsenergie und des Ausdrucks $\varrho h\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]$ für die kinetische Energie pro Flächeneinheit aufstellen.

Die Verzerrungsenergie pro Flächeneinheit drückt sich im allgemeinen durch (38) nicht genau bis zur dritten Ordnung in $h$ aus. Der vollständige Ausdruck würde noch weitere Glieder enthalten. Im allgemeinen muß der Ausdruck für die Verzerrungsenergie aufgestellt sein, bevor Gleichgewichts- und Schwingungsgleichungen durch das Variationsverfahren abgeleitet werden können.[1] Wir wollen die Gleichungen nach einem andern Verfahren aufstellen.

Der Näherungsausdruck (38) für die Verzerrungsenergie läßt als die strenge Form derselben eine nach steigenden Potenzen von $h$ entwickelbare Funktion vermuten, in der die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $h$ Ausdrücke sind, die durch die Verschiebung der Mittelfläche allein bestimmt sind. Lord Rayleigh[2]) macht darauf aufmerksam, daß eine solche Form nicht möglich ist, wenn auf die Seiten der Schale Spannungen wirken, und erläutert dies an dem Beispiel der zweidimensionalen Verschiebung eines zylindrischen Rohrs, das von Oberflächendruck beansprucht wird. Bei diesem Problem erleidet die durch (40) gegebene erste Approximation durch die Oberflächendrucke keine Abänderung.

## § 330. Zweite Approximation im Falle einer krummen Platte oder Schale.

Im Falle einer erheblich gekrümmten Mittelfläche können wir zu einer zweiten Approximation fortschreiten, vorausgesetzt daß die Verschiebung klein ist. Diese weitere Annäherung ist nur dann erforderlich, wenn die Reckungen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ klein sind gegen die Biegungsverzerrungen $z\varkappa_1$, $z\varkappa_2$, $z\tau$. Dieser Fall liege vor. Wir bemerken, indem wir die Verzerrungen $e_{xx}, \ldots$ aus (30) statt aus (33) berechnen, daß das Glied $\varepsilon_1(1 - z/R_1)^{-1}$ immerhin durch $\varepsilon_1$ und der Term $-z\varkappa_1(1 - z/R_1)^{-1}$ durch $-z\varkappa_1 - z^2\varkappa_1/R_1$ ersetzt werden mag. Die Werte von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, die die erste Annäherung ergab, waren

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - \tfrac{1}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2)z^2\},$$

und diese Werte können wir in die ersten drei der Gleichungen (30) einsetzen. Ferner können wir in denjenigen Termen von (30), die $\xi$, $\eta$, $\zeta$ enthalten, $p_1', \ldots$ durch die entsprechenden Größen bei der unverzerrten Schale ersetzen, d. h. wir können $p_1' = q_2' = 0$, $p_2'/B = 1/R_2$, $-q_1'/A = 1/R_1$ setzen. Wir streichen alle Glieder wie $\varepsilon_1 z/R_1$, $\varepsilon_1\varkappa_1 z$, $\varkappa_1^2 z^2$. Wir erhalten so die Gleichungen

1) A. B. Basset, *Phil. Trans. R. Soc.*, (Ser. A), vol. 181 (1890).

2) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 20 (1889), p. 372 = *Scientific Papers*, vol. 3, p. 280.

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx} &= \varepsilon_1 - z\varkappa_1 - z^2\frac{\varkappa_1}{R_1} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{R_1},\\
e_{yy} &= \varepsilon_2 - z\varkappa_2 - z^2\frac{\varkappa_2}{R_2} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{R_2},\\
e_{xy} &= \varpi - 2\tau z - \tau z^2(1/R_1 + 1/R_2).
\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Aus der Formel für $e_{xy}$ können wir $S_1$ und $S_2$ mittels (31) und (32), § 328, berechnen, und hierbei können wir $1/R_1'$ und $1/R_2'$ durch $1/R_1$ und $1/R_2$ ersetzen. Wir finden

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{Eh}{1+\sigma}\varpi + D(1-\sigma)\frac{\tau}{R_2} - \frac{1}{2}D(1-\sigma)\tau\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\\
S_2 &= -\frac{Eh}{1+\sigma}\varpi - D(1-\sigma)\frac{\tau}{R_1} + \frac{1}{2}D(1-\sigma)\tau\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Bei Berechnung einer zweiten Approximation für $T_1$ und $T_2$ dürfen wir nicht annehmen, daß $Z_z$ verschwindet. Wie im Falle der ebenen Platte setzen wir voraus, daß keine Massenkräfte und keine Spannungen auf die Seiten der Schale wirken. Wir bemerken, daß die in § 323 definierten $(x, y, z)$-Achsen zu den Normalen der Flächen dreier orthogonaler Scharen parallel sind. Es sind dies die in § 327 betrachteten Flächenscharen, und ihre Parameter sind $\alpha$, $\beta$, $z$. Wir schreiben vorübergehend $\gamma$ statt $z$ und gebrauchen die Bezeichnungen von § 19 und § 58. Die Werte von $h_1$, $h_2$, $h_3$ sind durch die Gleichungen gegeben

$$\frac{1}{h_1} = A\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right), \quad \frac{1}{h_2} = B\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right), \quad \frac{1}{h_3} = 1.$$

Wir schreiben eine Gleichung vom Typus der Gleichung (19) von § 58 hin, indem wir nach der Richtung der Normalen zur Fläche $\gamma$ auflösen. Diese Gleichung lautet

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right)^{-1}\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{B\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right)\widehat{\gamma\alpha}\right\} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{A\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right)\widehat{\gamma\beta}\right\}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{AB\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right)\widehat{\gamma\gamma}\right\}\right]\\
&-\frac{\widehat{\alpha\alpha}}{A}\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{A\left(1-\frac{\gamma}{R_1}\right)\right\} - \frac{\widehat{\beta\beta}}{B}\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{B\left(1-\frac{\gamma}{R_2}\right)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Zu unserer früheren Bezeichnungsweise zurückkehrend, schreiben wir diese Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)X_z\right\} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)Y_z\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)Z_z\right\}\\
&\qquad + \frac{AB}{R_1}\left(1-\frac{z}{R_2}\right)X_x + \frac{AB}{R_2}\left(1-\frac{z}{R_1}\right)Y_y = 0.
\end{aligned}$$

Um einen Näherungsausdruck für $Z_z$ zu erhalten, setzen wir in dieser

Gleichung für $X_x, \ldots$ die durch die erste Approximation gegebenen Werte ein und integrieren nach $z$. Wir bestimmen die Integrationskonstante so, daß $Z_z$ für $z = h$ und $z = -h$ verschwindet. Wir müssen die Glieder, die $X_z$ und $Y_z$ enthalten, streichen und die in (35) für $X_x$ und $Y_y$ gegebenen Näherungswerte anwenden. Ferner können wir die Faktoren $1 - z/R_1$ und $1 - z/R_2$ und Terme wie $\varepsilon_1 z/R_1$ fortlassen. Wir finden so die Formel

$$Z_z = -\tfrac{1}{2}\frac{E}{1-\sigma^2}(h^2 - z^2)\left(\frac{\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2}{R_1} + \frac{\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1}{R_2}\right). \tag{43}$$

Wir haben nun

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{xx} + \sigma e_{yy}) + \frac{\sigma}{1-\sigma}Z_z, \quad Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2}(e_{yy} + \sigma e_{xx}) + \frac{\sigma}{1-\sigma}Z_z,$$

und hieraus berechnen wir mit Hilfe der Formeln für $e_{xx}$, $e_{yy}$, $Z_z$ Näherungswerte für $T_1$, $T_2$ in der Form[1])

$$\left.\begin{aligned}
T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) + D\Big[\varkappa_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{1-\sigma}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma}{R_2}\right) \\
- \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2}{R_1} + \frac{\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1}{R_2}\right)\Big], \\
T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) + D\Big[\varkappa_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{1-\sigma}(\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma}{R_1}\right) \\
- \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2}{R_1} + \frac{\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1}{R_2}\right)\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Die Formeln für die Spannungsmomente werden von der zweiten Approximation nicht berührt, wenigstens soweit Glieder von der Ordnung $D\varkappa_1$ in Frage kommen.

## § 331. Gleichungen des Gleichgewichts.

Die Gleichungen des Gleichgewichts ergeben sich, wenn wir die Resultante und das resultierende Moment aller an einem Teil der Platte oder Schale angreifenden Kräfte gleich null setzen. Der betrachtete Teil sei begrenzt von den Seiten der Schale und denjenigen Flächen, die von den Normalen der verzerrten Mittelfläche in den Punkten eines krummlinigen Vierseits gebildet werden, das sich aus

1) Die in diesem Paragraphen gefundenen Näherungsausdrücke für $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ stimmen sachlich mit den von A. B. Basset, *loc. cit.* p. 607, nach einem andern Verfahren erhaltenen Ausdrücken überein, jedenfalls im Falle von Zylinder- oder Kugelschalen, auf den Basset seine Untersuchung beschränkt. In seinen Formeln treten einige zusätzliche Glieder auf, die von der hier vernachlässigten Größenordnung sind.

je zwei benachbarten Bogenstücken der Kurvenscharen $\alpha$ und $\beta$ zusammensetzt. Da die Dehnung der Mittelfläche klein ist, so können wir die Dehnungen der Seiten des Vierseits vernachlässigen und können es als Kurvenrechteck ansehen. Wir bezeichnen die Grenzkurven des krummlinigen Rechtecks mit $\alpha$, $\alpha + \delta\alpha$, $\beta$, $\beta + \delta\beta$ und zerlegen die auf die Seiten wirkenden Spannungsresultanten nach den Richtungen der (x, y, z)-Achsen, die mit den Tangenten der Kurven $\alpha$ und $\beta$ in ihrem Schnittpunkt und der Normalen der verzerrten Mittelfläche in diesem Punkt zusammenfallen (Fig. 73).

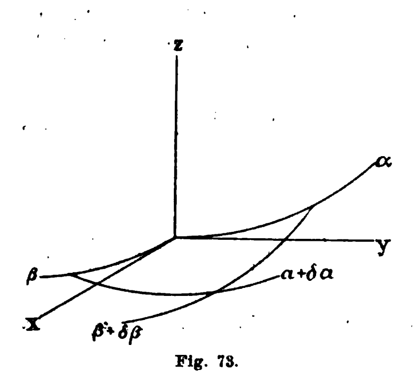


Fig. 73.

Fig. 74 stellt die Spannungsresultanten, die auf die Seiten des Kurvenrechtecks wirken, nach Richtung und Richtungssinn dar; diejenigen, die auf die Ränder $\alpha + \delta\alpha$ und $\beta + \delta\beta$ wirken, sind durch Akzente bezeichnet. Die Achsen der Spannungsmomente $H_1$, $G_1$ haben dieselben Richtungen wie $T_1$, $S_1$; die von $H_2$, $G_2$ haben dieselben Richtungen wie $T_2$, $S_2$.

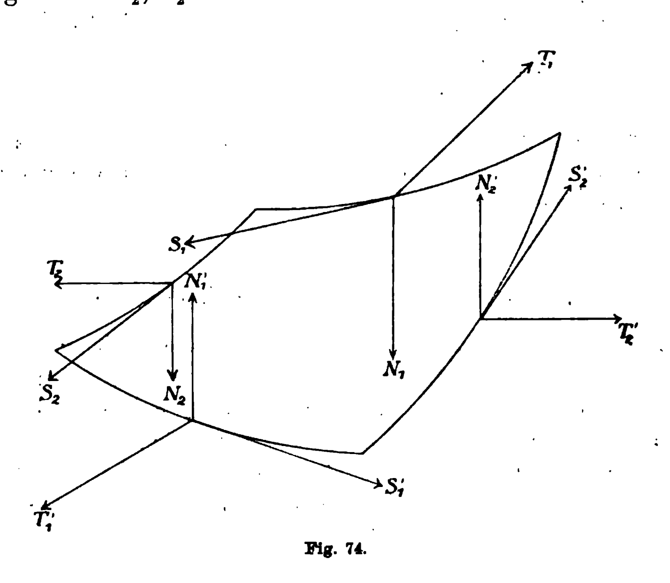


Fig. 74.

Die Spannungsresultanten auf die Seite $\alpha$ des Rechtecks liefern eine Kraft mit den Komponenten

$$-T_1 B\delta\beta, \quad -S_1 B\delta\beta, \quad -N_1 B\delta\beta$$

in Richtung der (x, y, z)-Achsen. Die entsprechenden Kraftkomponenten für die Seite $\alpha + \delta\alpha$ ergeben sich durch Anwendung der gewöhnlichen auf bewegliche Achsen sich beziehenden Formeln; denn die Größen $T_1$, $S_1$, $N_1$ sind die Komponenten eines Vektors, bezogen auf bewegliche $(x, y, z)$-Achsen, die durch die Tangente der durch einen bestimmten Punkt gehenden Kurve $\beta =$ const. und die Normale der verzerrten Mittelfläche in dem Punkte definiert sind. Wenn wir die auf die Seite $\alpha + \delta\alpha$ wirkenden Kräfte nach den festen Achsenrichtungen zerlegen, müssen wir die Vertauschung von $\alpha$ mit $\alpha + \delta\alpha$ und die kleine Drehung $(p_1'\delta\alpha,\ q_1'\delta\alpha,\ r_1'\delta\alpha)$ in Rücksicht ziehen. Die zu den (x, y, z)-Achsen parallelen Komponenten der auf die Seite $\alpha + \delta\alpha$ wirkenden Kraft werden mithin

$$T_1 B\delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1 B\delta\beta) - S_1 B\delta\beta \cdot r_1'\delta\alpha + N_1 B\delta\beta \cdot q_1'\delta\alpha,$$

$$S_1 B\delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}(S_1 B\delta\beta) - N_1 B\delta\beta \cdot p_1'\delta\alpha + T_1 B\delta\beta \cdot r_1'\delta\alpha,$$

$$N_1 B\delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha}(N_1 B\delta\beta) - T_1 B\delta\beta \cdot q_1'\delta\alpha + S_1 B\delta\beta \cdot p_1'\delta\alpha\cdot$$

Ebenso schreiben wir hin, welche Kräfte auf die Seiten $\beta$ und $\beta + \delta\beta$ wirken. Für $\beta$ haben wir

$$S_2 A\delta\alpha, \ -T_2 A\delta\alpha, \ -N_2 A\delta\alpha,$$

und für $\beta + \delta\beta$ haben wir

$$-S_2 A\delta\alpha - \delta\beta \frac{\partial}{\partial\beta}(S_2 A\delta\alpha) - T_2 A\delta\alpha \cdot r_2'\delta\beta + N_2 A\delta\alpha \cdot q_2'\delta\beta,$$

$$T_2 A\delta\alpha + \delta\beta \frac{\partial}{\partial\beta}(T_2 A\delta\alpha) - N_2 A\delta\alpha \,.\, p_2'\delta\beta - S_2 A\delta\alpha \cdot r_2'\delta$$

$$N_2 A\delta\alpha + \delta\beta \frac{\partial}{\partial\beta}(N_2 A\delta\alpha) + S_2 A\delta\alpha \cdot q_2'\delta\beta + T_2 A\delta\alpha \cdot p_2'\delta\beta,$$

Es mögen $X'$, $Y'$, $Z'$ und $L'$, $M'$, 0 wie in § 296 die zu den (x, y, z)-Achsen parallelen Komponenten der Resultante und des resultierenden Moments der von außen angreifenden Kräfte pro Flächeneinheit der Mittelfläche bezeichnen. Da das von dem Rechteck umrandete Flächenstück gleich $AB\delta\alpha\delta\beta$ gesetzt werden kann, so können wir drei der Gleichgewichtsgleichungen folgendermaßen hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial (T_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (S_2 A)}{\partial \beta} - (r_1' S_1 B + r_2' T_2 A) + (q_1' N_1 B + q_2' N_2 A) \\
&\qquad + ABX' = 0. \\
&\frac{\partial (S_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (T_2 A)}{\partial \beta} - (p_1' N_1 B + p_2' N_2 A) + (r_1' T_1 B - r_2' S_2 A) \\
&\qquad + ABY' = 0. \\
&\frac{\partial (N_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (N_2 A)}{\partial \beta} - (q_1' T_1 B - q_2' S_2 A) + (p_1' S_1 B + p_2' T_2 A) \\
&\qquad + ABZ' = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Andererseits lassen sich die Momente der Kräfte und die auf die Seiten des Rechtecks wirkenden Kräftepaare hinschreiben. Für die Seite $\alpha$ haben wir die Kräftepaarkomponenten

$$-H_1 B\delta\beta, \; -G_1 B\delta\beta, \; 0,$$

und für die Seite $\alpha + \delta\alpha$ kaben wir die Kräftepaarkomponenten

$$H_1 B\delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_1 B\delta\beta) - G_1 B\delta\beta \cdot r_1'\delta\alpha,$$

$$G_1 B\delta\beta + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}(G_1 B\delta\beta) + H_1 B\delta\beta \cdot r_1'\delta\alpha,$$

$$-H_1 B\delta\beta \cdot q_1'\delta\alpha + G_1 B\delta\beta \cdot p_1'\delta\alpha;$$

für die Seite $\beta$ haben wir die Kräftepaarkomponenten

$$G_2 A\delta\alpha, \; -H_2 A\delta\alpha, \; 0,$$

und für die Seite $\beta + \delta\beta$ haben wir die Kräftepaarkomponenten

$$-G_2 A\delta\alpha - \delta\beta \frac{\partial}{\partial \beta}(G_2 A\delta\alpha) - H_2 A\delta\alpha \cdot r_2'\delta\beta,$$

$$H_2 A\delta\alpha + \delta\beta \frac{\partial}{\partial \beta}(H_2 A\delta\alpha) - G_2 A\delta\alpha \cdot r_2'\delta\beta,$$

$$G_2 A\delta\alpha \cdot q_2'\delta\beta + H_2 A\delta\alpha \cdot p_2'\delta\beta.$$

Ferner sind die Momente der Kräfte, die auf die Seiten $\alpha + \delta\alpha$ und $\beta + \delta\beta$ wirken, gleich

$$B\delta\beta \cdot N_2 A\delta\alpha, \; -A\delta\alpha \cdot N_1 B\delta\beta,$$

$$A\delta\alpha \cdot S_1 B\delta\beta + B\delta\beta \cdot S_2 A\delta\alpha.$$

Die Momentengleichungen lassen sich daher in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(H_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(G_2 A)}{\partial \beta} - (G_1 B r_1' + H_2 A r_2') + (N_2 + L')AB = 0.\\ \frac{\partial(G_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(H_2 A)}{\partial \beta} + (H_1 B r_1' - G_2 A r_2') - (N_1 - M')AB = 0.\\ G_1 B p_1' + G_2 A q_2' - (H_1 B q_1' - H_2 A p_2') + (S_1 + S_2)AB = 0.\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Die Gleichungen (45) und (46) sind die Gleichungen des Gleichgewichts.

## § 332. Randbedingungen.

Das System der Spannungsresultanten und Spannungsmomente, das zu einer Kurve $s$ auf der Mittelfläche gehört, läßt sich in der in § 294 dargelegten Weise kennzeichnen, doch muß die Krümmung in Betracht gezogen werden. Wir betrachten die Kurve $s$ als ein Polygon von großer Seitenzahl und ersetzen das Kräftepaar $H\delta s$, das auf die Seite $\delta s$ wirkt, durch zwei Kräfte je vom Betrage $H$, die in den Enden dieser Seite parallel der Normalen der Fläche in dem einen Endpunkt von $\delta s$ im entgegengesetzten Sinne wirken; entsprechend verfahren wir mit den Kräftepaaren, die auf die anstoßenden Seiten wirken. Ist $P'PP''$ ein kurzes Bogenstück von $s$ und sind die Bogen $P'P$ und $PP''$ je gleich $\delta s$, so bleibt bei diesen Operationen eine Kraft von gewisser Größe und Richtung und bestimmtem Richtungssinn im Punkte $P$ übrig. Die Kräfte in $P$ und $P''$, die von dem Kräftepaar auf dem Bogen $PP''$ herrühren, sind je gleich $H$, ihre Wirkungslinien sind der Normalen in $P$ parallel, und zwar fällt die Kraft in $P$ in die negative Richtung dieser Normalen. Die Kräfte in $P'$ und $P$, die von dem Kräftepaar auf dem Bogen $P'P$ herrühren, sind je gleich $H - \delta H$; ihre Wirkungslinien sind der Normalen in $P'$ parallel, und zwar fällt die Kraft in $P$ in die positive Richtung dieser Normalen. Nun seien $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$ die Hauptkrümmungsradien der verzerrten Mittelfläche in $P$, sodaß die Gleichung dieser Fläche bezogen auf $(\xi, \eta, z)$-Achsen, die mit den Haupttangenten in $P$ und der Normalen zusammenfallen, näherungsweise folgendermaßen lautet:

$$z - \tfrac{1}{2}\{\xi^2/R_1^{(1)} + \eta^2/R_2^{(1)}\} = 0.$$

Ferner sei $\Phi$ der Winkel, den die Tangente in $P$ an $P'PP''$ mit der $\xi$ Achse einschließt. Der Punkt $P'$ hat die Koordinaten $-\delta s \cos\Phi$, $-\delta s \sin\Phi$, 0, und die Richtungskosinus der Normalen in $P'$ sind mit hinreichender Annäherung gleich $\delta s \cos\Phi/R_1^{(1)}$, $\delta s \sin\Phi/R_2^{(1)}$, 1. Die Kraft in $P$, die von dem Kräftepaar auf $P'P$ herrührt, hat die Komponenten $H\delta s \cos\Phi/R_1^{(1)}$, $H\delta s \sin\Phi/R_2^{(1)}$, $H - \delta H$ in Richtung der $(\xi, \eta, z)$-Achsen. Mithin hat die Kraft in $P$, die von den Kräftepaaren auf $P'P$ und $PP''$ herrührt, Komponenten in Richtung der

in der Fläche gelegenen Normalen von $s$, der Tangente von $s$ und der Normalen der Fläche, die gegeben sind durch

$$H\delta s \sin\Phi \cos\Phi\,(1/R_1^{(1)} - 1/R_2^{(1)}), \quad H\delta s/R', \quad -\delta H,$$

wo $R' = [\cos^2\Phi/R_1^{(1)} + \sin^2\Phi/R_2^{(1)}]^{-1}$ der Krümmungsradius des Normalschnitts, der durch die Tangente von $s$ gelegt ist. Die Spannungsresultanten $T$, $S$, $N$ und die Spannungsmomente $H$, $G$ lassen sich daher durch die Spannungsresultanten

$$T + \tfrac{1}{2} H \sin 2\Phi\,\{1/R_1^{(1)} - 1/R_2^{(1)}\}, \quad S + H/R', \quad N - \delta H/\partial s \qquad (47)$$

und ein Biegungsmoment $G$ ersetzen.

Die Randbedingungen für einen Rand, an dem Kräfte angreifen, oder für einen freien Rand lassen sich jetzt in der in § 297 dargelegten Weise hinschreiben. Die Formeln (47) vereinfachen sich, falls die Platte oder Schale nur schwach gebogen wird, denn dann können die Krümmungsradien und die Lage der Randlinie gegen die Krümmungslinien von der unverzerrten statt von der verzerrten Mittelfläche aus bestimmt werden. Sie vereinfachen sich noch weiter, falls der Rand eine Krümmungslinie ist[1]), denn in diesem Fall liefert $H$ keinen Anteil zu $T$.

## § 333. Theorie der Schwingungen dünner Schalen.

Die Schwingungsgleichungen ergeben sich, wenn wir in den Gleichungen (45) und (46), § 331, statt der äußeren Kräfte und Momente, $X'$, $Y'$, $Z'$ und $L'$, $M'$, die Ausdrücke für die umgekehrten kinetischen Reaktionen und ihre Momente einsetzen. Wenn wir „rotatorische Trägheit" vernachlässigen, so sind die für $L'$, $M'$ einzusetzenden Werte gleich null. Beziehen wir uns auf die in § 326 definierten Komponenten $u$, $v$, $w$ der Verschiebung, so sind die für $(X', Y', Z')$ einzuführenden Werte gleich $-2\varrho h(\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$, $\partial^2 w/\partial t^2)$.

Bei Aufstellung der Gleichungen streichen wir sämtliche Produkte der Größen $u$, $v$, $w$ und ihrer Differentialquotienten; da ferner die Spannungsresultanten und Spannungsmomente lineare Funktionen dieser Größen sind, so können wir die Gleichungen dadurch vereinfachen, daß wir die Größen $p_1'$, ... durch ihre Werte im unverzerrten Zustand, d. h. durch die in § 323 gegebenen Werte für $p_1$, ... ersetzen.

---

1) Das Resultat, daß in diesem Fall $H$ sowohl zu $S$ wie zu $N$ beiträgt, bemerkte A. B. Basset, *loc. cit.* p. 607. Siehe auch die auf p. 574 zitierte Abhandlung von H. Lamb.

Die Gleichungen (46) von § 331 gehen über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(H_1 B)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(G_2 A)}{\partial\beta} + G_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - H_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\} + N_2 = 0,\\ &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(G_1 B)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(H_2 A)}{\partial\beta} - H_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - G_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\} - N_1 = 0,\\ &\frac{H_1}{R_1} + \frac{H_2}{R_2} + S_1 + S_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

und die Gleichungen (45) gehen über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(T_1 B)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(S_2 A)}{\partial\beta} + S_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\} - \frac{N_1}{R_1} = 2\varrho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(S_1 B)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(T_2 A)}{\partial\beta} - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\} - \frac{N_2}{R_2} = 2\varrho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\ &\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial(N_1 B)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(N_2 A)}{\partial\beta}\right\} + \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = 2\varrho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Die Gleichungen (49) stellen die Schwingungsgleichungen dar, wobei zu bemerken, daß einige der in ihnen auftretenden Größen durch die Relationen (48) verknüpft sind.

Diese Gleichungen sind in ein System partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung von $u, v, w$ überzuführen, indem die verschiedenen in ihnen vorkommenden Größen durch $u, v, w$ und ihre Ableitungen ausgedrückt werden. Diese Transformation läßt sich mit Hilfe der in früheren Paragraphen dieses Kapitels entwickelten Theorie ausführen. Die Gleichungen (37), § 329, drücken $G_1$, $G_2$, $H_1$, $H_2$ durch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ aus, und die Gleichungen (26), § 326, drücken $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ durch $u, v, w$ aus. Durch die ersten beiden der Gleichungen (48) sind daher $N_1$, $N_2$ in $u, v, w$ ausgedrückt. Die Gleichungen (36), § 329, stellen $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ in erster Annäherung durch $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ dar, und die Gleichungen (21), § 326, drücken $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ durch $u, v, w$ aus. Eine weitergehende Annäherung für die Größen $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ liefern die Gleichungen (42) und (44), § 330; sie werden dadurch in $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ und in $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ ausgedrückt, sodaß wiederum alles in $u, v, w$ sich ausdrücken läßt. Wenn diese Näherungswerte in der dritten der Gleichungen (48) eingesetzt werden, wird diese eine Identität. Wenn $N_1$, $N_2$, $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ durch $u, v, w$ ausgedrückt sind, ist die gewünschte Transformation geleistet.

Die *Theorie der Schwingungen einer ebenen Platte*, von der eine vorläufige Behandlung in § 314, (d) und (e) gegeben wurde, ist in dieser Theorie mit eingeschlossen. In allen Gleichungen haben wir $1/R_1$ und $1/R_2$ gleich null zu setzen. Die Gleichungen (48) und (49) zerlegen sich in zwei Gruppen. Die eine Gruppe enthält $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 v/\partial t^2$ und die Spannungsresultanten vom Typus $T$, $S$; die andere Gruppe enthält $\partial^2 w/\partial t^2$, die Spannungsresultanten vom Typus $N$ und

die Spannungsmomente. Nun lassen sich in diesem Fall die Spannungsresultanten vom Typus $T, S$ mittels der Formel (36), § 329, in $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ ausdrücken, und $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ lassen sich mittels der Formeln

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \varpi = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

unter $\alpha$ und $\beta$ gewöhnliche kartesische Koordinaten verstanden, in $u$, $v$ ausdrücken. Mithin wird eine der beiden Gleichungsgruppen, in die (48) und (49) zerfallen, identisch mit den in § 314, (e) aufgestellten Gleichungen der Dehnungsschwingungen. Ferner lassen sich die Spannungsmomente mittels der Formeln (37), § 329, durch $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ ausdrücken, und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau$ lassen sich mittels der Formeln

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}$$

durch $w$ darstellen, während $N_1$ und $N_2$ mittels der Gleichungen

$$N_1 = \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_2}{\partial \beta}, \quad N_2 = \frac{\partial G_2}{\partial \beta} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}$$

durch die Spannungsmomente ausgedrückt werden. Die zweite der Gleichungsgruppen, in die (48) und (49) zerfallen, deckt sich mit der in § 314, (d) aufgestellten Gleichung der Querschwingungen.

Bei Anwendung der Resultate von § 329 und § 330 auf Schwingungen machen wir eine bestimmte Annahme. Eine ähnliche Annahme wird, wie wir in § 277 bemerkten, in der Regel in der Theorie der Schwingungen dünner Stäbe gemacht. In der Tat nehmen wir an, daß der Verzerrungszustand in einer dünnen Platte oder Schale, welche schwingt, einen Typus besitzt, der durch Anwendung der Gleichgewichtsgleichungen abgeleitet ist. Beispielsweise setzen wir im Falle einer ebenen Platte die transversal schwingt, voraus, daß die innere Verzerrung in einem kleinen Teil der Platte nahezu dieselbe ist, wie wenn dieser Teil so im Gleichgewicht gehalten würde, daß die verbogene Mittelebene dieselbe Krümmung hat. Betrachten wir etwas genauer den Zustand eines zylindrischen oder prismatischen Stücks einer ebenen Platte, das in eine feine transversale Durchbohrung hineinpassen würde. Unsere Annahme ist, daß, wenn die Platte schwingt, jedes derartige prismatische Stück praktisch genommen in jedem Augenblick einer Periode auf Gleichgewicht eingestellt ist. Ist dies der Fall, so sind die Ausschlag gebenden Verzerrungskomponenten in dem Stück, wenn die Platte transversal schwingt, durch

$$e_{xx} = -z\varkappa_1, \quad e_{yy} = -z\varkappa_2, \quad e_{xy} = -2z\tau,$$
$$e_{zz} = \{\sigma/(1-\sigma)\}\, z(\varkappa_1 + \varkappa_2)$$

gegeben, und wenn sie in ihrer Ebene schwingt, durch

$$e_{xx} = \varepsilon_1, \quad e_{yy} = \varepsilon_2, \quad e_{xy} = \varpi, \quad e_{zz} = -\{\sigma/(1-\sigma)\}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

in beiden Fällen ist $e_{zz}$ so gewählt, daß die Spannungskomponente $Z_z$ verschwindet. Es ist klar, daß unsere Annahme gerechtfertigt ist, wenn die Schwingungsperioden der Platte lang sind im Vergleich zu den Perioden derjenigen freien Schwingungen des prismatischen Stückes, bei welchen Verzerrungen von dem angenommenen Typus auftreten. Nun ist die Periode jeder Querschwingung der Platte, direkt proportional dem Quadrat einer linearen Abmessung des von der Randlinie eingeschlossenen Flächenstücks und umgekehrt proportional der Dicke, und die Periode irgend einer Dehnungsschwingung ist direkt proportional einer linearen Abmessung des von der Randlinie begrenzten Flächenstücks und unabhängig von der Dicke, während die Periode einer freien Schwingung des prismatischen Stücks, bei der Verzerrungen von dem zugrunde gelegten Typus auftreten, den linearen Abmessungen des Stücks, also etwa der Dicke der Platte, proportional ist. In dieser Schlußweise liegt nichts, was einer ebenen Platte eigentümlich wäre; wir folgern daraus, daß wir annehmen dürfen, daß in einer schwingenden Platte oder Schale der Verzerrungszustand in einem kleinen Stück praktisch genommen in jedem Augenblick derselbe ist, wie wenn die Platte so im Gleichgewicht gehalten würde, daß ihre Mittelfläche die in jenem Augenblick bestehende Reckung und Biegung hat. Wir erkennen auch, daß wir eigentlich hinzufügen müßten, daß das unsere Annahme stützende Schlußverfahren mit wachsender Schwingungszahl an Beweiskraft verliert.[1])

Das wichtigste mit dieser Annahme gewonnene Resultat ist die angenäherte Bestimmung der Spannungskomponente $Z_z$. Wenn Gleichgewicht herrscht und die Platte eben ist, so ist in zweiter Annäherung $Z_z = 0$; wenn Gleichgewicht herrscht und die Mittelfläche gekrümmt ist, so verschwindet $Z_z$ in erster Annäherung, und in zweiter Annäherung setzen wir es proportional mit $(h^2 - z^2)$ und einer Funktion, die in den Hauptkrümmungen und den Krümmungsänderungen linear ist. Die Resultate bezüglich $Z_z$ als Funktion von $h$ und $z$ lassen sich durch eine auf die Grundgleichungen der Schwingung elastischer fester Körper gestützte Untersuchung der Schwingungen einer unendlichen Platte von endlicher Dicke erläutern. Eine derartige Untersuchung hat Lord Rayleigh[2]) angestellt; aus seinen Resultaten geht hervor, daß es in diesem Falle Klassen von Schwingungen gibt, bei denen $Z_z$ in der ganzen Platte verschwindet, und daß bei den übrigen Klassen der Ausdruck für $Z_z$ nach steigenden Potenzen von $h$ und $z$ entwickelt

1) Das Schlußverfahren läßt sich offenbar mit einzelnen Abänderungen auch auf die Theorie der Schwingungen dünner Stäbe anwenden.

2) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 20 (1889), p. 225 = *Scientific papers*, vol. 3, p. 249.

werden kann, wobei Glieder von niederer als der vierten Ordnung in der Entwicklung nicht auftreten.

Wenn die Mittelfläche gekrümmt ist, müssen die Verschiebungskomponenten $u, v, w$ den Differentialgleichungen, die in der dargelegten Weise aus (49) hervorgehen, genügen, außerdem müssen sie die Bedingungen am Rande der Schale befriedigen. An einem freien Rande müssen das Biegungsmoment und die drei in (47), § 332, dargestellten linearen Verbindungen der Spannungsresultanten und des Drillungsmoments verschwinden. Die Ordnung des Gleichungssystems ist im allgemeinen hoch genug, um die Befriedigung derartiger Bedingungen zuzulassen; die tatsächliche Lösung ist aber noch in keinem speziellen Falle geleistet.

Ein Verfahren zur angenäherten Behandlung des Problems stützt sich auf die Bemerkung, daß die Ausdrücke für die Spannungsmomente und somit auch die für $N_1$, $N_2$ den Faktor $D$ oder $\frac{2}{3}Eh^3/(1-\sigma^2)$ enthalten, während die Ausdrücke für die übrigen Spannungskomponenten zwei Terme enthalten, von denen der eine mit $h$, der andere mit $h^3$ proportional ist. Jede der Gleichungen (49) kann links und rechts durch $h$ dividiert werden; diejenigen Terme, die von $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ abhängen, sind dann unabhängig von $h$, und die übrigen Glieder enthalten $h^2$ als Faktor. Wir werden vermuten, daß wir eine annähernd strenge Lösung erhalten, wenn wir die Glieder in $h^2$ streichen. Tun wir dies, so verschwinden an einem freien Rande zwei der Randbedingungen, nämlich diejenigen vom Typus $G=0$, $N-\partial H/\partial s=0$; das Gleichungssystem ist von hinreichend hoher Ordnung, um die Befriedigung der übrigen Randbedingungen zuzulassen. Da $h$ aus den Gleichungen und Bedingungen verschwunden ist, so ist die Schwingungszahl von der Dicke unabhängig. Die Dehnung der Mittelfläche kennzeichnet die Deformation in erster Linie, doch ist sie notwendig von Biegung begleitet. Die Theorie solcher *Dehnungsschwingungen* läßt sich sehr einfach mittels der Energiemethode ableiten, wie in § 329 geschildert wurde.

Die Dehnungsschwingungen einer dünnen Schale sind analog den Dehnungsschwingungen einer dünnen ebenen Platte, auf die bereits in diesem Paragraphen und in § 314, (e) hingewiesen wurde. Die Betrachtung des Falles einer schwach gekrümmten Mittelfläche zeigt ohne weiteres, daß eine offene Schale gleichfalls Schwingungsarten besitzen muß, die den Querschwingungen einer ebenen Platte analog sind und Frequenzen haben, die bedeutend kleiner sind als die der Dehnungsschwingungen. Die Existenz solcher Schwingungsarten läßt sich durch folgende Schlußweise nachweisen:

Eine obere Grenze für die Schwingungszahl des tiefsten Tons läßt sich ermitteln, indem man von irgend einem geeigneten Schwingungstypus ausgeht; denn bei einem beliebigen schwingenden System

kann die Frequenz, die bei Zugrundelegung eines bestimmten Schwingungstypus erhalten wird, nicht kleiner sein als die Schwingungszahl der tiefsten Eigenschwingung.[1]) Setzen wir einen Schwingungstypus an, bei dem keine Strecke der Mittelfläche ihre Länge ändert, so können wir die Frequenz mittels der Formeln für die kinetische Energie und die potentielle Energie der Biegung wie in § 321 berechnen. Da die kinetische Energie $h$ und die potentielle Energie $h^3$ als Faktor enthält, so ist die Schwingungszahl proportional mit $h$. Die Frequenz derartiger *dehnungsloser Schwingungen* einer Schale von gegebener Form kann gegenüber den Frequenzen der Dehnungsschwingungen durch Verkleinern von $h$ unbegrenzt herabgesetzt werden. Daraus folgt, daß die tiefste Schwingung im allgemeinen keine Dehnungsschwingung sein kann.[2])

Nehmen wir an, die Schwingung habe streng dehnungslosen Typus, so sind die Formen der Verschiebungskomponenten als Funktionen von $\alpha$, $\beta$, wie wir in §§ 319, 320 und 326 sahen, sehr beschränkt. Wenn Verschiebungen, die den Bedingungen der dehnungslosen Verzerrung genügen, in die Ausdrücke für die Spannungsresultanten und Spannungsmomente eingesetzt werden, so lassen sich die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen im allgemeinen nicht befriedigen.[3]) Daraus erhellt, daß die Schwingungen mit einer gewissen Dehnung verbunden sein müssen. Um die Platte zu zwingen, dehnungslose Schwingungen auszuführen, müßten wir an ihren Rändern und auf ihren Seiten bestimmte Kräfte anbringen. Wenn diese Kräfte nicht angreifen, muß die Verschiebung von jeder den Bedingungen dehnungsloser Verzerrung genügenden Verschiebung verschieden sein. Doch muß der Unterschied bei den tieferen Schwingungen gering sein; denn andernfalls würde es sich praktisch genommen um Dehnungsschwingungen handeln, und die Frequenz könnte nicht tatsächlich so klein sein. Wie wir aus der Form der Schwingungsgleichungen schließen können, muß die in Frage kommende Dehnung über den größten Teil der Fläche sehr klein sein; in der Nähe des Randes jedoch muß sie bedeutend genug sein, um die Erfüllung der Randbedingungen zu sichern.[4])

---

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. 1, § 89.

2) Der Fall einer geschlossenen Schale, z. B. einer Kugelschale, bildet natürlich eine Ausnahme, denn hier können dehnungslose Verschiebungen überhaupt nicht auftreten. Auch eine Schale von geringer Dicke, die bis auf ein kleines Loch ganz geschlossen ist, stellt einen Ausnahmefall dar, wenn die Öffnung klein genug ist.

3) In dem besonderen Falle von Kugel- und Zylinderschalen läßt sich der bestimmte Beweis erbringen, daß ein dehnungsloser Verschiebungszustand die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen nicht zu befriedigen vermag. Den Fall der Zylinderschalen behandeln wir in § 334, d).

4) Auf die Schwierigkeit, die daraus entspringt, daß dehnungslose Ver-

## § 334. Schwingungen einer dünnen zylindrischen Schale.

Es erscheint angezeigt, zur Erläuterung der Theorie die Schwingungen einer zylindrischen Schale etwas eingehender zu untersuchen. Wie in § 319 wählen wir $a$ als Radius der Schale und schreiben $x$ statt $\alpha$, $\Phi$ statt $\beta$; die Randlinie möge aus zwei Kreisen $x = l$ und $x = -l$ bestehen. Nach den Ergebnissen von § 326 sind die Dehnung und die Krümmungsänderungen durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \Phi} - w\right), \quad \varpi = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \Phi},$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right), \quad \tau = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \Phi} + v\right).$$

Da die Verschiebung eine periodische Funktion von $\Phi$ mit der Periode $2\pi$ ist, so werden wir, wenn die Schale eine Normalschwingung mit der Frequenz $p/2\pi$ ausführt, $u, v, w$ den Sinus und Kosinus von Vielfachen von $\Phi$ und einer einfachen harmonischen Funktion von $t$ mit der Periode $2\pi/p$ proportional setzen. Die Schwingungsgleichungen gehen dann in ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für $u, v, w$ als Funktionen von $x$ über. Wir werden diese Gleichungen sogleich aufstellen; zuvor aber fassen wir die Ordnung des Systems ins Auge. Die Ausdrücke für $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varpi$ enthalten nur erste Differentialquotienten; derjenige für $\varkappa_1$ enthält eine zweite Ableitung. Somit enthalten $G_1$ und $G_2$ zweite Differentialquotienten, und $N_1$ enthält eine dritte Ableitung. Die dritte der Gleichungen (49) enthält $\partial^4 w/\partial x^4$ in einem Gliede, das gestrichen wird, wenn wir die Gleichungen der Dehnungsschwingungen aufstellen. Die vollständigen Schwingungsgleichungen werden also von viel höherer Ordnung sein als die Gleichungen der Dehnungsschwingung. Wir werden sogleich sehen, daß erstere ein System achter Ordnung und letztere ein System vierter Ordnung bilden. Die Reduktion der Ordnung des Systems beim Übergang von den vollständigen Gleichungen zu den Gleichungen der Dehnungsschwingung ist von fundamentaler Bedeutung. Sie hängt keineswegs von der zylindrischen Form der Mittelfläche ab.

a) *Grundgleichungen.*

Unsern obigen Ausführungen gemäß setzen wir

schiebungen die Befriedigung der Randbedingungen nicht zulassen, habe ich in meiner Abhandlung vom Jahre 1888 (siehe *Einleitung*, Fußnote 133) aufmerksam gemacht. Die Erklärung, daß die als notwendig erwiesene Dehnung praktisch auf einen schmalen Bereich am Rande beschränkt, hier aber auch bedeutend genug sein wird, um die Befriedigung der Randbedingungen zu gewährleisten, wurde gleichzeitig von A. B. Basset und H. Lamb in den p. 607 und p. 574 zitierten Arbeiten gegeben. Diese beiden Autoren stützen ihre Erklärung auf die Lösungen für gewisse statische Probleme.

$$\left.\begin{array}{c} u = U \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon), \quad v = V \cos n\Phi \cos(pt+\varepsilon), \\ w = W \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon), \end{array}\right\} \quad (50)$$

wo $U$, $V$, $W$ Funktionen von $x$. Wir haben dann

$$\varepsilon_1 = \frac{dU}{dx} \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon), \quad \varepsilon_2 = -\frac{W+nV}{a} \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon),$$

$$\varpi = \left(\frac{dV}{dx} + n\frac{U}{a}\right) \cos n\Phi \cos(pt+\varepsilon),$$

$$\varkappa_1 = \frac{d^2W}{dx^2} \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon), \quad \varkappa_2 = -\frac{nV+n^2W}{a^2} \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon),$$

$$\tau = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}(V+nW) \cos n\Phi \cos(pt+\varepsilon).$$

Ferner

$$G_1 = -D \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon)\left(\frac{d^2W}{dx^2} - \sigma\frac{nV+n^2W}{a^2}\right),$$

$$G_2 = -D \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon)\left(\sigma\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{nV+n^2W}{a^2}\right),$$

$$H_1 = \quad D \cos n\Phi \cos(pt+\varepsilon)\frac{1-\sigma}{a}\left(n\frac{dW}{dx} + \frac{dV}{dx}\right) = -H_2.$$

Die beiden ersten der Gleichungen (48) werden

$$N_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial H_2}{\partial \Phi}, \quad N_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial G_2}{\partial \Phi} - \frac{\partial H_1}{\partial x},$$

und wir haben

$$N_1 = -D \sin n\Phi \cos(pt+\varepsilon)\left\{\frac{d^3W}{dx^3} - \frac{1}{a^2}\left(n^2\frac{dW}{dx} + n\frac{dV}{dx}\right)\right\},$$

$$N_2 = -D \cos n\Phi \cos(pt+\varepsilon)\left\{\frac{n}{a}\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{n^3}{a^3}W + \frac{1-\sigma}{a}\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{n^2}{a^3}V\right)\right\}.$$

Wir haben ferner

$$T_1 = D\left[\frac{3}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) + \frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{\varkappa_1}{a} - \frac{2\sigma+\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{\varkappa_2}{a}\right],$$

$$T_2 = D\left[\frac{3}{h^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) - \frac{\sigma+2\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{\varkappa_1}{a} - \frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)}\frac{\varkappa_2}{a}\right],$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}D(1-\sigma)\left[\frac{3}{h^2}\varpi + \frac{\tau}{a}\right], \quad S_2 = \tfrac{1}{2}D(1-\sigma)\left[-\frac{3}{h^2}\varpi + \frac{\tau}{a}\right],$$

wo $\varepsilon_1, \varkappa_1, \ldots$ die oben gegebenen Werte haben. Die Schwingungsgleichungen lauten

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial S_2}{\partial \Phi} + 2\varrho h p^2 u = 0,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial T_2}{\partial \Phi} - \frac{N_2}{a} + 2\varrho h p^2 v = 0,$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_2}{\partial \Phi} + \frac{T_2}{a} + 2\varrho h p^2 w = 0,$$

oder in $U$, $V$, $W$ ausgedrückt

$$\frac{3D}{h^3}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx} - \sigma\frac{W+nV}{a}\right) - \frac{1-\sigma}{2}\frac{n}{a}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{nU}{a}\right)\right] + 2\varrho p^2 U$$
$$+ \frac{D}{h}\left[\frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)a}\frac{d^3W}{dx^3} + \frac{1+2\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{n}{a^3}\frac{d}{dx}(V+nW)\right] = 0, \quad (51)$$

$$\frac{3D}{h^3}\left[\frac{n}{a}\left(\sigma\frac{dU}{dx} - \frac{W+nV}{a}\right) + \tfrac{1}{2}(1-\sigma)\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{nU}{a}\right)\right] + 2\varrho p^2 V$$
$$+ \frac{D}{h}\Bigg[-\frac{\sigma+2\sigma^2}{2(1-\sigma)}\frac{n}{a^2}\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)}\frac{n^2}{a^4}(V+nW)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{1-\sigma}{a^2}\frac{d^2}{dx^2}(V+nW) + \frac{n}{a^2}\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{n^3}{a^4}W + \frac{1-\sigma}{a^2}\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{n^2}{a^4}V\Bigg] = 0. \quad (52)$$

$$\frac{3D}{h^3}\left[\frac{\sigma}{a}\frac{dU}{dx} - \frac{W+nV}{a^2}\right] + 2\varrho p^2 W$$
$$- \frac{D}{h}\Bigg[\frac{d^4W}{dx^4} - \frac{2n^2}{a^2}\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{n^4}{a^4}W - (2-\sigma)\frac{n}{a^2}\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{n^3}{a^4}V$$
$$+ \frac{\sigma+2\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)}\frac{n}{a^4}(nV+W)\Bigg] = 0. \quad (53)$$

Die Randbedingungen auf $x = l$ und $x = -l$ lauten

$$T_1 = 0, \quad S_1 + \frac{H_1}{a} = 0, \quad N_1 - \frac{1}{a}\frac{\partial H_1}{\partial \Phi} = 0, \quad G_1 = 0,$$

und die linken Seiten lassen sich sämtlich als lineare Funktionen der Größen $U$, $V$, $W$ und ihrer ersten Ableitungen nach $x$ ausdrücken.

Das Gleichungssystem, das $u$, $v$, $w$ als Funktionen von $x$ bestimmt, ist nun als lineares System achter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt. Diese Koeffizienten enthalten sowohl die unbekannte Konstante $p^2$ als auch die bekannten Konstanten $h$ und $n$, und zwar kann $n$, die Zahl der auf den Umfang entfallenden Wellenlängen, beliebig gewählt werden. Lassen wir außer acht, daß $h$ klein ist gegen $a$ und $l$, so können wir die Gleichungen durch die Annahme lösen, daß die Größen $u$, $v$, $w$, abgesehen von den von $\Phi$ und $t$ abhängenden einfachen harmonischen Faktoren, die Form $\xi e^{mx}$, $\eta e^{mx}$, $\zeta e^{mx}$ haben, wo $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $m$ Konstanten. Die Konstante $m$ ist eine Wurzel einer Determinantengleichung achten Grades, die aber tat-

sächlich in $m^2$ vom vierten Grade ist, da sie keine Glieder von ungeradem Grade enthält. Die Koeffizienten in dieser Gleichung hängen von $p^2$ ab. Wenn $m$ diese Gleichung erfüllt, sind die Verhältnisse $\xi:\eta:\zeta$ durch zwei der drei Bewegungsgleichungen in ihrer Abhängigkeit von $m$ und $p^2$ bestimmt. Somit hat die Lösung, abgesehen von $\Phi$- und $t$-Faktoren, die Form

$$u = \sum_{r=1}^{4} (\xi_r e^{m_r x} + \xi_r' e^{-m_r x}), \quad v = \sum_{r=1}^{4} (\eta_r e^{m_r x} + \eta_r' e^{-m_r x}),$$

$$w = \sum_{r=1}^{4} (\zeta_r e^{m_r x} + \zeta_r' e^{-m_r x});$$

hierin sind die Konstanten $\xi_r$, $\xi_r'$ willkürlich, die Konstanten $\eta_r, \ldots$ dagegen drücken sich als Vielfache derselben aus. Die Randbedingungen auf $x = l$ und $x = -l$ liefern acht homogene lineare Gleichungen für $\xi$, $\xi'$; eliminieren wir $\xi$, $\xi'$ aus diesen Gleichungen, so werden wir auf eine Gleichung zur Bestimmung von $p^2$ geführt. Dies ist die Frequenzengleichung.

b) *Dehnungsschwingungen.*

Die Gleichungen der Dehnungsschwingung ergeben sich, wenn wir in den Gleichungen (51)—(53) die Glieder streichen, die den Koeffizienten $D/h$ haben. Die Determinantengleichung für $m^2$ wird quadratisch. Die Randbedingungen auf $x = \pm l$ werden $T_1 = 0$, $S_1 = 0$, oder

$$\frac{dU}{dx} - \sigma \frac{W + nV}{a} = 0, \quad \frac{dV}{dx} + \frac{nU}{a} = 0.$$

Da $h$ in den Differentialgleichungen und in den Randbedingungen nicht vorkommt, sind die Schwingungszahlen von $h$ unabhängig.

Im Falle *symmetrischer Schwingungen*, wo $u$, $v$, $w$ von $\Phi$ unabhängig sind, setzen wir

$$u = U\cos(pt + \varepsilon), \quad v = V\cos(pt + \varepsilon), \quad w = W\cos(pt + \varepsilon),$$

und wir erhalten die Gleichung

$$\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{\sigma}{a}\frac{dW}{dx}\right) + \varrho p^2 U = 0, \qquad \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{d^2V}{dx^2} + \varrho p^2 V = 0,$$

$$\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{a}\frac{dU}{dx} - \frac{1}{a^2}W\right) + \varrho p^2 W = 0.$$

Die Randbedingungen auf $x = \pm l$ sind

$$\frac{dU}{dx} - \sigma\frac{W}{a} = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0.$$

Es gibt zwei Klassen symmetrischer Schwingungen. Bei der ersten Klasse verschwinden $U$ und $W$, sodaß die Verschiebung tangential zu

den Kreisschnitten des Zylinders ist. Bei dieser Klasse von Schwingungen haben wir

$$V = \eta \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad p^2 = \frac{E}{2\varrho(1+\sigma)} \frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

wo $n$ eine ganze Zahl. Diese Schwingungen sind den in § 200 betrachteten Drillungsschwingungen eines Vollzylinders analog. Bei der zweiten Klasse verschwindet $V$, sodaß die Verschiebung in Ebenen, die durch die Achse gehen, stattfindet, und wir erhalten

$$U = \xi \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad W = \zeta \sin \frac{n\pi x}{l},$$

wo $\xi$ und $\zeta$ durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\left[p^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right]\xi - \frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{n\pi}{la} \zeta = 0.$$

$$\left[p^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{1}{a^2}\right]\zeta - \frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{n\pi}{la} \xi = 0.$$

Die Gleichung für $p^2$ lautet

$$p^4 - p^2 \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) + \frac{E^2 n^2 \pi^2}{\varrho^2 (1-\sigma^2) a^2 l^2} = 0.$$

Ist die Länge groß gegen den Durchmesser, sodaß $a/l$ klein ist, so handelt es sich bei den beiden Klassen 1) um nahezu rein radiale Schwingungen von der Frequenz $\{E/\varrho(1-\sigma^2)\}^{\frac{1}{2}}/2\pi a$, 2) um nahezu rein longitudinale Schwingungen von der Frequenz $n(E/\varrho)^{\frac{1}{2}}/2l$. Die letzteren sind von derselben Art wie die Dehnungsschwingungen eines dünnen Stabes (§ 278).

Eine eingehendere Untersuchung der Dehnungsschwingungen berandeter Zylinderschalen findet sich in meinem in der *Einleitung*, Fußnote 133, zitierten Aufsatz. Für eine Schale von unendlicher Länge hat A. B. Basset, *London Math. Soc. Proc.* vol. 21 (1891), p. 53, die Radialschwingungen untersucht, und sehr ausführlich sind die verschiedenen Schwingungsarten behandelt von Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc.*, vol. 45 (1889), p. 443 = *Scientific Papers*, vol. 3, p. 244. Siehe auch *Theory of Sound*, 2. Aufl. vol. 1, Kap. X A.

c) *Dehnungslose Schwingungen.*[1])

Die Verschiebung ist bei einer Normalschwingung entweder zweidimensional und durch die Formeln gegeben

$$u = 0, \quad v = A_n \cos(p_n t + \varepsilon_n) \cos(n\Phi + \alpha_n),$$

$$w = -nA_n \cos(p_n t + \varepsilon_n) \sin(n\Phi + \alpha_n),$$

wo

1) Siehe Kap. XXIII, § 319 und § 321.

$$p_n^2 = \frac{D}{2\varrho h a^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1},$$

oder aber sie ist dreidimensional und durch die Formeln gegeben

$$u = -\frac{a}{n} B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \sin(n\Phi + \beta_n),$$

$$v = x B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \cos(n\Phi + \beta_n),$$

$$w = -n x B_n \cos(p_n' t + \varepsilon_n') \sin(n\Phi + \beta_n),$$

wo

$$p_n'^2 = \frac{D}{2\varrho h a^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \frac{1 + 6(1-\sigma) a^2/n^2 l^2}{1 + 3a^2/n^2(n^2+1) l^2}.$$

Alle Werte von $p$ und $p'$ sind proportional mit $h$.

d) *Unexaktheit der dehnungslosen Verschiebung.*

Um zu zeigen, daß die angenommene dehnungslose Verschiebung die Bewegungsgleichungen nicht zu befriedigen vermag, genügt es, $T_2$ aus den Bewegungsgleichungen zu berechnen und das Resultat mit der zweiten der Formeln (44) zu vergleichen. Ist die zweidimensionale Schwingung durch $A_n$ gekennzeichnet, so haben wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{T_2}{a} &= -\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial N_2}{\partial \Phi} - 2\varrho h p_n^2 w \\
&= -\frac{D n^3(n^2-1)}{a^4}\left(1 - \frac{n^2-1}{n^2+1}\right) A_n \sin(n\Phi + \alpha_n)\cos(p_n t + \varepsilon_n) \\
&= -\frac{2 D n^3 (n^2-1)}{(n^2+1) a^4} A_n \sin(n\Phi + \alpha_n)\cos(p_n t + \varepsilon_n);
\end{aligned}$$

ebenso haben wir aber

$$\begin{aligned}
T_2 &= -\frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{D\varkappa_2}{a} \\
&= -\frac{2+\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{D n (n^2-1)}{a^3} A_n \sin(n\Phi + \alpha_n)\cos(p_n t + \varepsilon_n).
\end{aligned}$$

Die beiden Werte von $T_2$ sind verschieden, und die Bewegungsgleichungen werden von der angenommenen Verschiebung nicht befriedigt. Es ist klar, daß eine Korrektion, durch die nur eine geringe Dehnung hinzugefügt wird, die Erfüllung der Differentialgleichungen ermöglicht.

Zwei der Randbedingungen lauten $G_1 = 0$, $N_1 - a^{-1}\partial H_1/\partial\Phi = 0$. Wenn die Schwingung zweidimensional ist, so ist $G_1$ von $x$ unabhängig und kann für einen bestimmten Wert von $x$ nur verschwinden, wenn $A_n = 0$. Wenn die Schwingung dreidimensional ist, sind $N_1$ und $H_1$ unabhängig von $x$, und $N_1 - a^{-1}\partial H_1/\partial\Phi$ kann für einen bestimmten Wert von $y$ nur verschwinden, wenn $B_n = 0$. Somit lassen sich die Randbedingungen durch die angenommene Verschiebung nicht befriedigen. Die zur Befriedigung der Randbedingungen notwendige Korrektion an der Ver-

schiebung würde, wie sich zeigt, bedeutender sein als diejenige, die die Befriedigung der Differentialgleichungen erfordert.

e) *Natur der an der dehnungslosen Verschiebung anzubringenden Korrektion.*

Die Existenz von praktisch dehnungslosen Schwingungen hängt offenbar mit der Tatsache zusammen, daß wenn die Schwingungen als Dehnungsschwingungen angenommen werden, die Ordnung des Systems der Schwingungsgleichungen sich von acht auf vier reduziert. In der Determinantengleichung, von der unter a) in diesem Paragraphen die Rede war, haben die Glieder, die $m^8$ und $m^6$ enthalten, den Faktor $h^2$, zwei der Werte von $m^2$ sind also groß von der Ordnung $1/h$. Wie die von den großen Werten von $m$ abhängenden Lösungen die Erfüllung der Randbedingungen ermöglichen, mag durch die Lösung des folgenden statischen Problems erläutert werden[1]):

Ein von zwei Erzeugenden und zwei Kreisschnitten begrenzter Teil eines Kreiszylinders wird durch Kräfte, die längs der begrenzenden Erzeugenden angreifen (während die Kreisränder kräftefrei sind) zu einer Umdrehungsfläche so gebogen, daß die zu den Kreisschnitten tangentiale Verschiebung $v$ der Winkelkoordinate $\Phi$ proportional wird; gesucht wird die Verschiebnng.

Wir müssen haben $v = c\Phi$, wo $c$ konstant, während $u$ und $w$ von $\Phi$ unabhängig sind. Mithin

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{c - w}{a}, \quad \varpi = 0, \quad \varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{c}{a^2}, \quad \tau = 0.$$

Die Spannungsresultanten $S_1$, $S_2$ und die Spannungsmomente $H_1$, $H_2$ verschwinden, und wir haben

$$G_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sigma c}{a^2}\right), \quad G_2 = -D\left(\frac{c}{a^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$N_1 = -D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad N_2 = 0.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen lauten

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \Phi} = 0, \quad -D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{T_2}{a} = 0,$$

und die Randbedingungen auf $x = \pm l$ sind

$$T_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad G_1 = 0.$$

Wir suchen diesen Gleichungen und Bedingungen näherungsweise

1) Es ist dies das von H. Lamb, *loc. cit.* p. 574, zum vorliegenden Zwecke gelöste Problem. Denselben Punkt der Theorie erläutert A. B. Basset, *loc. cit.* p. 607 mit Hilfe eines anderen statischen Problems.

durch die Annahme zu genügen, daß die Dehnungsgrößen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ von derselben Größenordnung sind wie die Biegungsverzerrungen $h\varkappa_1$, $h\varkappa_2$. Wenn dies der Fall ist, sind $T_1$ und $T_2$ mit hinreichender Annäherung durch die Formeln gegeben

$$T_1 = (3D/h^2)(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = (3D/h^2)(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1).$$

Um der Gleichung $\partial T_1/\partial x = 0$ und der Bedingung $T_1 = 0$ auf $x = \pm l$ zu genügen, müssen wir $T_1 = 0$ oder $\varepsilon_1 = -\sigma\varepsilon_2$ setzen und haben dann $T_2 = 3D(1-\sigma^2)\varepsilon_2/h^2$. Die Gleichgewichtsgleichungen reduzieren sich nun auf die Gleichung

$$-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{3(1-\sigma^2)}{a^2h^2}(c - w) = 0,$$

während die Randbedingungen auf $x = \pm l$ übergehen in

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sigma c}{a} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$$

Setzen wir $c - w$ als Summe von Gliedern von der Form $\zeta e^{mx}$ an, so ist $m^2$ von der Größenordnung $1/h$; als Lösung ergibt sich

$$w = c + C_1 \cosh(qx/a)\cos(qx/a) + C_2 \sinh(qx/a)\sin(qx/a),$$

wo

$$q^2 = (a/2h)\sqrt{3(1-\sigma^2)}$$

und

$$C_1 = -\frac{\sigma c}{q^2}\,\frac{\sinh(ql/a)\cos(ql/a) - \cosh(ql/a)\sin(ql/a)}{\sinh(2ql/a) + \sin(2ql/a)},$$

$$C_2 = -\frac{\sigma c}{q^2}\,\frac{\sinh(ql/a)\cos(ql/a) + \cosh(ql/a)\sin(ql/a)}{\sinh(2ql/a) + \sin(2ql/a)}.$$

Die Form der Lösung zeigt, daß in der Nähe der Ränder $\varepsilon_1, \varepsilon_2, h\varkappa_1, h\varkappa_2$ sämtlich von derselben Größenordnung sind, daß aber in einem Abstand von den Rändern, der jedenfalls groß ist gegen $(ah)^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ klein werden im Vergleich zu $h\varkappa_2$.

Es läßt sich zeigen, daß bei diesem statischen Problem die von der Dehnung herrührende potentielle Energie von der Ordnung $\sqrt{h/a}$ im Vergleich zur potentiellen Energie der Biegung ist.[1]) Für den Fall der Schwingungen können wir schließen, daß die Reckung, die nötig ist, um die Befriedigung der Randbedingungen zu gewährleisten, praktisch auf einen so schmalen Bereich am Rande beschränkt ist, daß die aus ihr entspringende Änderung des Gesamtbetrags der potentiellen Energie und somit auch die der Schwingungsperioden vernachlässigt werden kann.

1) Bezüglich weiterer dies Problem betreffender Einzelheiten verweisen wir auf die bereits zitierte Arbeit von H. Lamb.

## § 335. Schwingungen einer dünnen Kugelschale.

Der Fall, daß die Mittelfläche eine geschlossene Kugelfläche und die Schale dünn ist, ist von H. Lamb[1]) mittels der Grundgleichungen der Schwingungen elastischer fester Körper untersucht worden. Es treten nur Dehnungsschwingungen auf, und sie zerfallen in zwei Klassen, die denjenigen bei einer Vollkugel (§ 194) analog sind und die sich bezüglich durch das Fehlen einer Radialkomponente der Verschiebung und durch das Fehlen einer Radialkomponente der Drehung kennzeichnen. Bei jeder Normalschwingung der einen oder anderen Klasse läßt sich die Verschiebung durch Kugelflächenfunktionen von einem einzigen ganzzahligen Grade ausdrücken. Bei den Schwingungen der ersten Klasse ist die Frequenz $p/2\pi$ mit dem Grade $n$ der Kugelfunktionen durch die Gleichung verknüpft

$$p^2 a^2 \varrho/\mu = (n-1)(n+2), \tag{54}$$

wo $a$ der Radius der Kugel. Bei den Schwingungen der zweiten Klasse ist die Schwingungszahl mit dem Grade der Kugelfunktionen durch die Gleichung verknüpft

$$\frac{p^4 a^4 \varrho^2}{\mu^2} - \frac{p^2 a^2 \varrho}{\mu}\left[(n^2+n+4)\frac{1+\sigma}{1-\sigma} + (n^2+n-2)\right] + 4(n^2+n-2)\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) = 0. \tag{55}$$

Ist $n > 1$, so gibt es zu $n$ zwei Normalschwingungen der zweiten Klasse, und der tiefste Ton entspricht der langsameren von den beiden Schwingungen dieser Klasse, für die $n = 2$. Ihre Schwingungszahl $p/2\pi$ ist gegeben durch

$$p = \sqrt{\mu/\varrho}\, a^{-1}(1{,}176),$$

wenn die Poissonsche Konstante des Materials gleich $\frac{1}{4}$ genommen wird. Die Frequenzen aller dieser Schwingungen sind von der Dicke der Schale unabhängig.

Im Grenzfalle einer ebenen Platte zerfallen die Schwingungen in zwei Klassen, nämlich dehnungslose Schwingungen, bei denen die Verschiebung zur Plattenebene normal ist, und Dehnungsschwingungen, bei denen die Verschiebung zur Plattenebene parallel ist. [Siehe § 314, (d) und (e), und § 333, sowie Bemerkung F am Ende des Buches.] Den Fall einer unbegrenzten Platte von end-

1) *London Math. Soc. Proc*, vol. 14 (1883), p. 50.

licher Dicke hat Lord Rayleigh[1]) behandelt, ausgehend von den Grundgleichungen der Schwingung elastischer Körper und unter Anwendung ähnlicher Methoden, wie sie in § 214 oben geschildert wurden. Man hat eine Klasse von Dehnungsschwingungen, bei der die Verschiebung zur Ebene der Platte parallel ist; die Schwingungen dieser Klasse zerfallen in zwei Unterklassen: solche, bei denen die Mittelebene keine Verschiebungen erfährt, und solche, die den Tangentialschwingungen einer geschlossenen dünnen Kugelschale analog sind. Man hat eine zweite Klasse von Dehnungsschwingungen, bei der die Verschiebung sowohl eine Komponente normal zur Ebene der Platte als auch eine tangentiale Komponente besitzt; wenn die Platte dünn ist, ist die Normalkomponente klein gegen die Tangentialkomponente. Die Normalkomponente der Verschiebung verschwindet in der Mittelebene, und die Normalkomponente der Drehung verschwindet überall, sodaß die Schwingungen dieser Klasse den Schwingungen der zweiten Klasse einer geschlossenen dünnen Kugelschale analog sind. Man hat ferner eine Klasse von Biegungsschwingungen, bei der eine Verschiebung normal zur Ebene der Platte und eine tangentiale Verschiebungskomponente auftritt, die klein ist gegen die Normalkomponente, falls die Platte dünn ist. Die tangentiale Komponente verschwindet in der Mittelebene, sodaß die Verschiebung annähernd dehnungslos ist. Bei diesen Schwingungen bleiben die Linienelemente, die ursprünglich zur Mittelebene normal sind, während der ganzen Bewegung gerade und normal zur Mittelebene, und die Schwingungszahl ist ungefähr der Dicke der Platte proportional. — Dehnungslose Schwingungen einer geschlossenen dünnen Kugelschale gibt es nicht.

Zwischen diesen extremen Fällen steht der Fall einer offenen Kugelschale oder Kuppel. Wenn die Öffnung sehr klein, die Kugelfläche also beinahe geschlossen ist, müssen die Schwingungen denjenigen einer geschlossenen Kugelschale nahe kommen. Wenn der räumliche Winkel, durch den die Öffnung von ihrem Pole aus gemessen wird, klein und der Kugelradius groß ist, müssen die Schwingungen denjenigen einer ebenen Platte ähneln. In dazwischen liegenden Fällen müssen Schwingungen, die praktisch genommen dehnungslosen Typus haben, und ebenso solche vom Typus der Dehnungsschwingungen auftreten.

Streng dehnungslose Schwingungen einer dünnen Kugelschale, deren Randlinie ein Kreis ist, sind von Lord Rayleigh[2]) eingehend

---

1) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 20 (1889), p. 225 = *Scientific papers*, vol. 3, p. 249.

2) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 13 (1881) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 551. Siehe auch *Theory of Sound*, 2. Aufl., Bd. 1, Kap. X A.

nach den in § 321 oben geschilderten Methoden untersucht worden. Im Falle einer Halbkugelschale ist die Schwingungszahl $p/2\pi$ des tiefsten Tons gegeben durch

$$p = \sqrt{\mu/\varrho}\,(h/a^2)\,(4{,}279)\,.$$

Wenn der die Öffnung messende Winkel $\alpha$ nahezu gleich $\pi$, die Kugel also beinahe geschlossen ist, ist die Frequenz $p/2\pi$ der tiefsten dehnungslosen Schwingung gegeben durch

$$p = \sqrt{\mu/\varrho}\,\{h/a^2(\pi-\alpha)^2\}\,(5{,}657)\,.$$

Lassen wir $\pi - \alpha$ hinreichend abnehmen, während $h$ konstant bleibt, so können wir die Schwingungszahl der tiefsten dehnungslosen Schwingung gegenüber der Frequenz der tiefsten (mit Dehnung verbundenen) Schwingung der geschlossenen Kugelschale beliebig steigern. Sonach wird die allgemeine Schlußweise, mit der wir die Existenz praktisch dehnungsloser Schwingungen begründen, im Falle einer beinahe geschlossenen Kugelschale hinfällig.

Wenn die allgemeinen Schwingungsgleichungen nach dem Verfahren, das oben an dem Falle der zylindrischen Schale erläutert wurde, aufgestellt, die Verschiebungskomponenten also den Sinus oder Kosinus von Vielfachen der Länge $\Phi$ und einer einfachen harmonischen Funktion von $t$ proportional gesetzt werden, so stellen sie ein System linearer Gleichungen von der achten Ordnung zur Bestimmung der Verschiebungskomponenten als Funktionen der Poldistanz $\theta$ dar. Die Randbedingungen am freien Rande schreiben für einen bestimmten Wert von $\theta$ das Verschwinden von vier linearen Verbindungen der Verschiebungskomponenten und einiger ihrer Ableitungen nach $\theta$ vor. Die Ordnung des Systems ist hoch genug, um die Befriedigung solcher Bedingungen zuzulassen; die Lösung des Gleichungssystems würde, wenn sie sich ausführen ließe, zur Bestimmung der Schwingungstypen und der Frequenzen führen.

Die Dehnungsschwingungen lassen sich nach der Methode untersuchen, die oben am Falle der Zylinderschale erläutert wurde. Das Gleichungssystem ist von der vierten Ordnung, und man hat zwei Randbedingungen.[1]) Bei jeder Schwingungsart setzt sich die Bewegung zusammen aus zwei Bewegungen, von denen die eine nicht mit Radialverschiebung, die andere nicht mit radialer Drehungskomponente verbunden ist. Jede dieser Bewegungen drückt sich durch eine einzige Kugelflächenfunktion aus, doch ist der Grad dieser

1) Die Gleichungen wurden aufgestellt und gelöst von E. Mathieu, *J. de l'École polytechnique*, t. 51 (1883). Die Dehnungsschwingungen von Kugelschalen sind auch vom Verfasser in dem in der *Einleitung*, Fußnote 133, zitierten Aufsatz behandelt.

Funktionen im allgemeinen nicht ganzzahlig. Der Grad $\alpha$ der Kugelflächenfunktion, durch die die Bewegung ohne Radialverschiebung gekennzeichnet ist, ist mit der Schwingungszahl durch Gleichung (54) verknüpft, wenn hierin $\alpha$ statt $n$ geschrieben wird; der Grad $\beta$ der Kugelflächenfunktion, durch die die Bewegung ohne radiale Drehungskomponente gekennzeichnet ist, ist mit der Schwingungszahl durch Gleichung (55) verknüpft, wenn hierin $\beta$ statt $n$ geschrieben wird. Die beiden Zahlen $\alpha$ und $\beta$ sind miteinander durch eine transzendente Gleichung verbunden, die die Frequenzengleichung darstellt. Die Schwingungen zerfallen nicht durchweg in Klassen wie bei einer geschlossenen Schale; in dem Maße aber, wie die offene Schale der geschlossenen Form sich nähert, gehen ihre Dehnungsschwingungsarten in die der geschlossenen Schale über.

Die Existenz von Schwingungen, die praktisch genommen dehnungslos sind, ist offenbar eng damit verknüpft, daß, wenn Dehnungsschwingungen vorausgesetzt werden, die Ordnung des Systems der Differentialgleichungen der Schwingung sich von 8 auf 4 reduziert. Wie im Falle der zylindrischen Schale läßt sich zeigen, daß die Schwingungen nicht streng dehnungslos sein können und daß die Korrektion, die an der Verschiebung zwecks Befriedigung der Randbedingungen anzubringen ist, bedeutender ist als die für die Befriedigung der Differentialgleichungen erforderliche Korrektion. Wir können daraus schließen, daß an einem freien Rande die Dehnungsgrößen mit den Biegungsverzerrungen vergleichbar sind, daß aber die Dehnung praktisch auf einen schmalen Bereich am Rande beschränkt ist.

Wenn wir uns die mit wachsender Krümmung der Schale eintretenden allmählichen Veränderungen in dem System der Schwingungen vorstellen[1]), beginnend mit dem Fall der ebenen Platte und endigend mit dem Fall der geschlossenen Kugelschale, so scheint eine Klasse von Schwingungen, die der praktisch dehnungslosen, gänzlich verloren zu gehen. Der Grund hierfür würde in dem raschen Wachsen der Schwingungszahl aller zu dieser Klasse gehörenden Schwingungen bei beträchtlicher Verkleinerung der Öffnung zu suchen sein.

Die Theorie der Schwingungen einer Kugelschale erlangt großes praktisches Interesse aus dem Umstande, daß eine offene Kugelschale die beste der analytischen Behandlung zugängliche Ersatzform für eine Glocke abgibt. Es kann als festgestellt gelten, daß die praktisch wichtigen Schwingungen dehnungslos sind, und die Grundzüge der Theorie solcher Schwingungen besitzt man, wie wir gesehen haben. Die Töne und Schwingungsarten von Glocken sind experimentell von Lord **Rayleigh**[2]) untersucht worden. Er fand, daß die nominelle Ton-

1) Dieser Gedanke findet sich in der auf p. 574 zitierten Arbeit von H. Lamb.

2) *Phil. Mag.* (Ser. 5), vol. 29 (1890), p. 1 = *Scientific Papers,* vol. 3, p. 318; *Theory of Sound,* 2. Aufl., Bd. 1, Kap. X.

höhe einer Glocke, wie sie von englischen Glockengießern angegeben wird, nicht mit dem tiefsten Ton derselben übereinstimmt, sondern mit demjenigen, der in der Reihe der wachsenden Frequenzen an fünfter Stelle steht; bei der zugehörigen Schwingung finden sich acht Knotenmeridiane.

## § 336. Gleichgewichtsprobleme.

Wenn eine dünne Platte oder Schale durch äußere Kräfte deformiert gehalten wird, muß die verzerrte Mittelfläche, wie in § 315 bemerkt wurde, mit einer der auf die unverzerrte Mittelfläche abwickelbaren Flächen nahezu sich decken. Wir können das Problem in zwei Teile zerlegen: 1) die Bestimmung dieser abwickelbaren Fläche, 2) die Bestimmung der kleinen Verschiebung, durch die die verzerrte Mittelfläche aus dieser abwickelbaren Fläche sich ableiten läßt. Dies Verfahren schlägt Clebsch[1]) bei Behandlung des Problems der endlichen Deformation ebener Platten ein. Offenbar herrscht bezüglich der Teilung des Problems eine gewisse Unbestimmtheit, da jede der Flächen, die auf die unverzerrte Mittelfläche abwickelbar sind und die sich aus einander durch Verschiebungen von der als klein angenommenen Ordnung ableiten lassen, gleich gut als Lösung des ersten Teils des Problems dienen würde. Wir erreichen eine schärfere Fassung, wenn wir die beiden Schritte so bezeichnen: 1) Bestimmung einer dehnungslosen Verschiebung, die nicht klein zu sein braucht, 2) Bestimmung einer zusätzlichen Verschiebung, die mit Dehnungsverzerrungen verknüpft ist, welche mindestens von derselben Größenordnung wie die zusätzlichen Biegungsverzerrungen und möglicherweise groß gegen diese sind.

Der erste Schritt ist analog der Bestimmung von Gleichgewichtslagen dünner Stäbe, wie sie in Kap. XIX und XXI durchgeführt wurde; aber abgesehen von dem Falle, daß die Verschiebung klein ist, kommt man wenig vorwärts. Wenn die Verschiebung klein ist, ist sie, wie wir wissen, bezüglich ihres funktionalen Charakters stark beschränkt. Diese Beschränkung bringt einen wesentlichen Unterschied in der Behandlung der Probleme von Stäben und solcher von Platten oder Schalen mit sich und steigert außerdem die theoretische, wenn auch nicht die praktische Bedeutung des zweiten Schrittes zur Lösung des Problems.

Wir wollen dies an einem speziellen Problem erläutern: Eine Halbkugelschale werde von einer Schnur deformiert, die mit der Spannung $F$ zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten ihres Randes straff gespannt ist. Diese Punkte seien in der Bezeichnungsweise von § 320 gegeben durch $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$, und wir nehmen an, daß der Pol

1) *Elastizität*, § 70

$\theta = 0$ auf der Schale liegt. Der Typus kleiner dehnungsloser Verschiebungen ist durch die Gleichungen gegeben

$$u = \sin\theta \sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2} \cos n\Phi, \quad v = \sin\theta \sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2} \sin n\Phi,$$

$$w = \sum_{n=2}^{\infty} (n + \cos\theta) A_n \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2} \cos n\Phi.$$

Die potentielle Energie der Biegung, $V$, ist nach § 321, b) gegeben durch

$$V = \tfrac{8}{3}\pi\mu \frac{h^3}{a^2} \sum \left[ n^2 (n^2 - 1)^2 A_n^2 \tfrac{1}{4} \frac{2n^2 - 1}{n(n^2 - 1)} \right]$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi\mu \frac{h^3}{a^2} \sum n(n^2 - 1)(2n^2 - 1) A_n^2.$$

Die von der Spannung der Schnur bei einer kleinen Verschiebung geleistete Arbeit ist

$$F \sum n (1 + \cos n\pi)\, \delta A_n,$$

und der Zuwachs der potentiellen Energie der Biegung ist gleich

$$\tfrac{4}{3}\pi\mu \frac{h^3}{a^2} \sum n (n^2 - 1)(2n^2 - 1) A_n \delta A_n.$$

Somit haben wir

$$A_n = \tfrac{3}{4} \frac{Fa^2}{\pi\mu h^3} \frac{1 + \cos n\pi}{(n^2 - 1)(2n^2 - 1)},$$

sodaß $A_n$ verschwindet, wenn $n$ ungerade, und wenn $n$ gerade:

$$A_n = \tfrac{3}{2} \frac{Fa^2}{\pi\mu h^3} \frac{1}{(n^2 - 1)(2n^2 - 1)}.$$

Damit ist die dehnungslose Verschiebung bestimmt.[1])

Bei dieser Lösung ist die Befriedigung der Randbedingungen außer acht gelassen, und gerade an diesen Bedingungen liegt es, daß der zweite Schritt zur vollständigen Lösung, d. h. die Bestimmung einer ergänzenden Dehnungsverschiebung, eine so große theoretische Bedeutung gewinnt. Aus dem ersten Teil der Lösung könnten wir das Biegungsmoment und die radiale Spannungsresultante am Rande berechnen. Im Falle kleiner Verschiebungen ergeben sich die Gleichungen des Gleichgewichts, wenn nur Randkräfte wirken, indem wir in den Schwingungsgleichungen die kinetischen Reaktionen streichen. Wir haben also die Form dieser Gleichungen und wissen, daß sie von hinreichend hoher Ordnung sind, um die Befriedigung folgender Bedingungen zuzulassen: 1) die Zugbean-

1) Das Verfahren nebst obigem Beispiel für seine Anwendung rührt her von Lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 13 (1881) = *Scientific Papers*, vol. 1, p. 551; *Theory of Sound*, Kap. X A.

spruchung und die Schubkraft am Rande verschwinden, 2) das Biegungsmoment und die radiale Spannungsresultante am Rande haben gegebene Werte. Setzen wir diese gegebenen Werte mit umgekehrten Vorzeichen gleich den aus dem ersten Teil der Lösung berechneten Werten, so ist die Verschiebung, die den Gleichgewichtsgleichungen und den Randbedingungen genügt, die gesuchte zusätzliche Verschiebung. Wie im Falle der Schwingungen nimmt die zusätzliche Verschiebung mit wachsendem Abstande vom Rande rasch ab und wird sehr klein, sobald die Entfernung vom Rande ein beträchtliches Vielfaches der mittleren Proportionalen zwischen dem Radius und der Dicke ist. Das Verfahren zur Bestimmung der zusätzlichen Verschiebung wurde für die Zylinderschale in § 334, e) durchgeführt, wo die dehnungslose Verschiebung $u = 0$, $v = c\Phi$, $w = c$ war.

Es gibt Fälle, wo der erste Teil der Lösung fortgelassen werden kann. Beispielsweise kann in einer kugelförmigen Kuppel durch Kräfte, die symmetrisch um die Achse verteilt sind, keine dehnungslose Verschiebung hervorgebracht werden. Gegenüber solchen Kräften verhält sich die Kuppel sehr starr, wenn auch natürlich nicht unbegrenzt starr. Die für solche Fälle anzuwendende Lösungsmethode mag an dem Problem einer halbkugelförmigen Kuppel erläutert werden, die mit ihrem Rande auf einer glatten Horizontalebene ruht und durch ihr Eigengewicht deformiert wird.

Wenn wir wie in § 320 die Verschiebung durch Komponenten $u, v, w$ bezeichnen und die Ergebnisse von § 326 anwenden, so finden wir

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - w\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a \sin\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \Phi} + u\cos\theta - w\sin\theta\right),$$
$$\varpi = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \Phi} - v \operatorname{cotg}\theta\right).$$

Die Spannungsresultanten sind durch die Formeln (36), § 329, gegeben, d. h. durch

$$T_1 = \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{3D}{h^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \quad S_1 = -S_2 = \frac{3D}{2(1-\sigma)h^2}\varpi.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen werden

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2)\operatorname{cotg}\theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S_2}{\partial \Phi} + 2g\varrho h a \sin\theta = 0,$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial \theta} + (S_1 - S_2)\operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T_2}{\partial \Phi} = 0, \quad T_1 + T_2 + 2g\varrho h a\cos\theta = 0.$$

Da nun die Kräfte von $\Phi$ unabhängig sind, sind auch die Verschiebungen von $\Phi$ unabhängig, und diese Gleichungen gehen daher über in

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - w\right) + \sigma(u\operatorname{cotg}\theta - w)\right] + (1-\sigma)\operatorname{cotg}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - u\operatorname{cotg}\theta\right)$$
$$+ \frac{g\varrho a^2(1-\sigma^2)}{E}\sin\theta = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - v \operatorname{cotg}\theta\right) + 2\operatorname{cotg}\theta\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - v\operatorname{cotg}\theta\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta} + u\operatorname{cotg}\theta - 2w + \frac{g\varrho a^2(1-\sigma)}{E}\cos\theta = 0.$$

Die Randbedingungen auf $\theta = \frac{1}{2}\pi$ sind $u = 0$, $v = 0$. Die Lösung ist

$$u = \frac{g\varrho a^2}{2\mu}\left[\sin\theta - \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \sin\theta\log(1+\cos\theta)\right],$$

$$v = 0,$$

$$w = \frac{g\varrho a^2}{2\mu}\left[\frac{2+\sigma}{1+\sigma}\cos\theta - 1 + \cos\theta\log(1+\cos\theta)\right].$$

## § 337. Stabilitätsprobleme.

Nach den in § 267 dargelegten allgemeinen Prinzipien erkennen wir, daß eine mit Dehnung verbundene Gleichgewichtslage einer dünnen Platte instabil sein kann, wenn bei denselben äußeren Kräften eine mit Dehnung verknüpfte und eine dehnungslose Gleichgewichtslage möglich ist. In solchen Fällen richtet sich das Interesse in erster Linie auf die Bestimmung der kritischen Werte, die von den äußeren Kräften bezw. den linearen Abmessungen der Platte nicht überschritten werden dürfen, wenn das System stabil sein soll. Wir wollen die für derartige Fragen in Betracht kommenden Methoden an zwei Problemen erläutern.

a) *Knicken einer rechteckigen Platte, die in ihrer Ebene auf Druck beansprucht wird.*

Wenn die Länge und Breite der Platte bezw. der Randdruck nicht zu groß sind, zieht sich die Platte in der in § 301 angegebenen Weise einfach in ihrer Ebene zusammen; wenn aber die linearen Abmessungen oder die Drucke groß genug sind, so biegt sie sich. Wir wollen annehmen, daß sie sehr schwach gebogen wird.

Wir wählen den Mittelpunkt der Platte als Koordinatenanfang und zwei zu den Kanten parallele Geraden als $(x, y)$-Achsen; statt $\alpha$ und $\beta$ benutzen wir $x$ und $y$ in den Formeln von § 326, in denen wir $A = B = 1$ und $1/R_1 = 1/R_2 = 0$ setzen. Wir erhalten

$$p_1' = -q_2' = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \quad q_1' = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad p_2' = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$r_1' = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad r_2' = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Ferner haben wir

$$G_1 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad G_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$H_1 = -H_2 = D(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

Streichen wir Produkte der Differentialquotienten von $u$, $v$, $w$, so erhalten wir aus den Gleichungen (46), § 331,

$$S_2 = -S_1, \quad N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Die beiden ersten der Gleichungen (45) desselben Paragraphen werden, wenn $X'$, $Y'$, $Z'$ verschwinden, näherungsweise befriedigt, wenn $T_1$ und $T_2$ konstant und $S_1$ und $S_2$ gleich null angenommen werden. Wir setzen

$$T_1 = -P_1, \quad T_2 = -P_2,$$

wo $P_1$ und $P_2$ die Drucke auf die Kanten $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$, bezogen auf die Längeneinheit der betreffenden Kante. Die dritte der Gleichungen (45) wird

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + P_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Wenn die Platte auf den Kanten $x = \pm a$ und $y = \pm b$ „gestützt" ist, müssen wir $w = 0$ und $G_1 = 0$ auf $x = \pm a$ und $w = 0$ und $G_2 = 0$ auf $y = \pm b$ haben. Wir haben dann eine Lösung von der Form

$$w = W \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \sin\frac{n\pi(y+b)}{2b},$$

wo $m$ und $n$ ganze Zahlen und $W$ eine Konstante, vorausgesetzt daß

$$\tfrac{1}{4} D\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = P_1\frac{m^2}{a^2} + P_2\frac{n^2}{b^2}.$$

Diese Gleichung liefert die kritischen Drucke. Ist z. B. $P_1 = P_2$, so ist für $P_1$ und $P_2$ der kritische Wert gleich $\frac{1}{4}D\pi^2(1/a^2 + 1/b^2)$.[1]

b) *Zusammenklappen einer Röhre unter äußerem Druck.*

Wenn eine zylindrische Schale von kreisförmigem Querschnitt durch nicht zu großen äußeren Druck $p$ beansprucht wird, so erleidet sie eine radiale Verschiebung, deren Betrag nach der Methode von § 100 berechnet werden kann; ist jedoch $p$ zu groß, so wird die Schale durch den Druck gebogen. Handelt es sich um einen langen Zylinder, der eine schwache zweidimensionale Biegung ohne Reckung erfährt, so ist die Verschiebung nach § 319 durch die Formeln

$$u = 0, \quad v = \sum A_n \cos n\Phi, \quad w = -\sum n A_n \sin n\Phi$$

gegeben, und wir haben daher

$$\varkappa_1 = 0, \quad \tau = 0, \quad \varkappa_2 = \sum \{n(n^2-1)/a^2\} A_n \sin n\Phi.$$

Nach den Formeln (24) und (25), § 326, verschwinden alle Größen $p_1'$, ... außer $p_2'$, und es ist $p_2' = 1 + a\varkappa_2$. Wir wollen schreiben

$$p_2' = a/R, \quad R = a - a^2\varkappa_2 + \cdots,$$

1) Das Problem ist genau analog dem in § 264 behandelten Problem des beiderseits aufgestützten Ständers. Die obige Lösung rührt her von G. H. Bryan, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 22 (1891), p. 54, der eine Reihe spezieller Fälle diskutiert.

wo $R$ der Krümmungsradius des deformierten Querschnitts der Mittelfläche. Die üblichen Näherungsformeln für die Spannungsmomente[1]) ergeben

$$G_1 = -D\sigma\varkappa_2, \quad G_2 = -D\varkappa_2, \quad H_2 = -H_1 = 0,$$

und die ersten beiden der Gleichungen (46) liefern

$$N_1 = 0, \quad N_2 = -\frac{D}{a}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \Phi}.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (45) ergeben

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T_2}{\partial \Phi} - \frac{N_2}{R} = 0, \quad \frac{1}{a}\frac{\partial N_2}{\partial \Phi} + \frac{T_2}{R} + p = 0.$$

Eliminieren wir hieraus $T_2$, so erhalten wir

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\frac{R}{a}\frac{\partial N_2}{\partial \Phi}\right) + \frac{N_2}{R} + \frac{p}{a}\frac{\partial R}{\partial \Phi} = 0;$$

oder bei Vernachlässigung des Quadrats von $a\varkappa_2$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + 1\right)\left(\frac{D}{a}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \Phi}\right) - pa^2\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \Phi} = 0.$$

Eine Lösung, bei der $\varkappa_2$ proportional mit $\sin n\Phi$ ist, ist möglich, wenn

$$p = \frac{D}{a^3}(n^2 - 1).$$

Der kleinste Wert von $p$, für den eine andere Form als die Kreisform möglich ist, ist somit $3\,D/a^3$. Wir schließen daraus, daß der Kreiszylinder instabil ist, wenn der äußere Druck den Betrag $3\,D/a^3$ überschreitet.[2])

Das eben erhaltene Resultat läßt die Anwendung auf das Problem der *Stabilität von Flammröhren* zu. Der Dampfdruck in einem Kessel überwiegt bei weitem den Luftdruck in den Flammröhren, und es zeigt sich, daß lange Röhren unter dem Druck zusammenklappen. Um diese Gefahr zu vermeiden, stellt man die Röhren gewöhnlich aus mehreren getrennten Stücken her, die vermittels massiver Ringgürtungen aneinander geschraubt sind, sodaß die wirkliche Länge der Röhre auf den Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Ringen vermindert wird. Unser Resultat ist, daß eine Röhre von unendlicher Länge stabil ist, solange der Druck den Betrag $[2E/(1-\sigma^2)](h/a)^3$ nicht überschreitet, wo $E$ und $\sigma$ den Youngschen Modul und die Poissonsche Konstante des Materials und $h/a$ das Verhältnis der Dicke zum Durchmesser bezeichnet. Das von zwei Ringen begrenzte Stück der Röhre ist in Wirklichkeit eine dünne Zylinderschale mit festen Enden, und die Starrheit der Enden hat zur Folge, daß die Mittelfläche nicht ohne Reckung gebogen werden kann. Wenn jedoch der Druck den kritischen Wert überschreitet und die Länge groß genug ist,

1) Es wird vorausgesetzt, daß das Vorhandensein des Drucks auf der Außenseite der Röhre die erste Approximation für die Verzerrung nicht wesentlich beeinflußt. Für die Berechnung der Spannungsmomente ist die zweite Approximation nicht erforderlich.

2) Das Resultat rührt her von G. H. Bryan, *Cambridge Phil. Soc. Proc.*, vol. 6 (1888), p. 287. Das analoge Resultat für einen Ring ist in § 275 oben angegeben.

so wird die Dehnung auf einen schmalen Bereich an den Enden beschränkt sein, während der größte Teil der Fläche sich nahezu dehnungslos biegt.

Von den zu erledigenden Fragen interessiert am meisten die der kritischen Länge, d. h. der kleinsten Länge, bei der unter dem kritischen Druck ein Zusammenklappen erfolgen kann. Ein genauer Zahlenwert läßt sich nicht angeben, eine Vorstellung von den Beziehungen zwischen den verschiedenen Abmessungen der Röhre kann man aber mittels der in § 334, e) dargelegten Prinzipien gewinnen. Damit Instabilität möglich ist, muß die wirkliche Länge, d. h. die Entfernung zwischen zwei Ringen, so groß sein, daß über den größten Teil der Länge die dehnungslose Konfiguration sich einstellt, mit andern Worten, sie muß so groß sein, daß die zusätzliche Dehnungsverschiebung, die für die Befriedigung der Randbedingungen erforderlich ist, von dem einen Ende bis zur Mitte der Röhre auf einen zu vernachlässigenden Betrag herabsinkt. Aus dem in § 334, e) angewendeten Lösungsverfahren erkennen wir ohne weiteres, daß die gesuchte Entfernung ein großes Vielfaches der mittleren Proportionalen zwischen der Dicke und dem Durchmesser ist. Daraus erhellt, daß bei Röhren von verschiedener Größe für das Anbringen der Ringe, die das Zusammenklappen verhindern sollen, folgende Regel gelten sollte: Der Abstand zwischen zwei Schutzringen muß proportional dem geometrischen Mittel zwischen der Dicke und dem Durchmesser sein.

# Anmerkungen.

## Bemerkung A.

### Terminologie und Bezeichnungen.

Die Frage der Bezeichnungen und der passendsten Terminologie in der Elastizitätslehre ist vielfach erörtert worden. Wir verweisen auf die Arbeiten von W. J. M. Rankine[1], auf Lord Kelvins Bericht über Rankines Nomenklatur[2], auf die für Einheitlichkeit und Gleichmäßigkeit eintretenden Bemerkungen K. Pearsons[3], auf die einschlägigen Ausführungen von H. Lamb[4] und W. Voigt.[5] Die folgenden Tabellen geben einige der wichtigeren Bezeichnungsweisen für die Verzerrungskomponenten und die Spannungskomponenten wieder.

Verzerrungskomponenten.

| Text[6] | Kelvin und Tait[7] | Kirchhoff[8] | Saint-Venant[9] | Pearson[3] |
|---|---|---|---|---|
| $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{zz}$ | $e, f, g$ | $x_x$, $y_y$, $z_z$ | $\delta_x$, $\delta_y$, $\delta_z$ | $s_x$, $s_y$, $s_z$ |
| $e_{yz}$, $e_{zx}$, $e_{xy}$ | $a, b, c$ | $y_z$, $z_x$, $x_y$ | $g_{yz}$, $g_{zx}$, $g_{xy}$ | $\sigma_{yz}$, $\sigma_{zx}$, $\sigma_{xy}$, |

1) *Cambridge and Dublin Math. J.*, vol. 6 (1851), p. 47 = *Miscellaneous Scientific Papers*, p. 67; ebenso *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 146 (1856) = *Miscellaneous Scientific Papers*, p. 119. In der ersten dieser Abhandlungen wurde das Wort „strain" als Ausdruck für die relative Verschiebung, die „Verzerrung", eingeführt, und in der andern wurde das Wort „stress" als Bezeichnung für die inneren Wechselwirkungen zwischen den Teilen eines Körpers geprägt. Die Abhandlung von 1856 enthält auch Rankines Nomenklatur für die elastischen Konstanten äolotroper fester Körper.

2) *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics*, Cambridge 1904.

3) Todhunter und Pearsons *History*, vol. 1, Note B.

4) *London Math. Soc. Proc.*, vol. 21 (1891), p. 73.

5) *Rapports présentés au Congrès International de Physique*, t. 1, Paris 1900, deutsch in den Gött. Nachrichten 1900, p. 117.

6) Bezüglich der Definitionen siehe § 8.

7) *Natural Philosophy*, Teil II.

8) *Vorlesungen über math. Physik, Mechanik.*

9) *Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch*, Paris 1883 (häufig von uns als „Clebsch-Ausgabe" zitiert).

Spannungskomponenten.

| Text [10]) und Kirchhoff [8]) | Kelvin und Tait [7]) | Lamé [11]) | Saint-Venant [9]) | Pearson [5]) |
|---|---|---|---|---|
| $X_x$, $Y_y$, $Z_z$ | $P$, $Q$, $R$ | $N_1$, $N_2$, $N_3$ | $t_{xx}$, $t_{yy}$, $t_{zz}$ | $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{zz}$ |
| $Y_z$, $Z_x$, $X_y$ | $S$, $T$, $U$ | $T_1$, $T_2$, $T_3$ | $t_{yz}$, $t_{zx}$, $t_{xy}$ | $\widehat{yz}$, $\widehat{zx}$, $\widehat{xy}$, |

Die Bezeichnungen von Kelvin und Tait für die Verzerrungskomponenten und die Spannungskomponenten sind u. a. von Lord Rayleigh und J. H. Michell übernommen worden und wurden in der ersten Auflage dieses Buches benutzt. Für die Spannungskomponenten haben Kirchhoffs Bezeichnungen weiteste Verbreitung gefunden, dagegen scheint es eine gleich bequeme und ansprechende Bezeichnungsweise für die Verzerrungskomponenten nicht zu geben. Die Bezeichnungen $X_\nu$, $Y_\nu$, $Z_\nu$ für die Komponenten der Spannung auf eine Ebene, deren Normale in die Richtung $\nu$ fällt, werden von Voigt befürwortet.

In der Terminologie*) von Kirchhoff[8]), F. Neumann [12]) und Voigt[12′]) haben Druck, Deformation, Dilatation die Bedeutung, in der im Text die Wörter Spannung (mit anderem Vorzeichen), Verzerrung, Dehnung gebraucht sind; die Bezeichnung „Spannung“ gebraucht Clebsch. Die Komponenten der Verzerrung bezeichnet Voigt als die Deformationsgrößen. Der Ausdruck „Massenkräfte“ für die auf die Teilchen eines Körpers wirkenden äußeren Kräfte pro Masseneinheit entspricht dem Vorschlage Voigts.[5]) „Schub“, „Schubspannung“ sind in den technischen Lehrbüchern übliche Bezeichnungen. Es erscheint wünschenswert, eine Unterscheidung zwischen „einfachem Schub“, „reinem Schub“ und „Schubverzerrung“ und andererseits zwischen „Tangentialspannung“ und „Schubspannung“ festzuhalten.

Die „Spannungsgleichungen“ des Gleichgewichts oder der Bewegung (§ 54) werden von Voigt[12′]) als die „Hauptgleichungen“ bezeichnet. Statt „Youngscher Modul“ ist die Benennung „Elastizitätsmodul“ ziemlich gebräuchlich. Die Bezeichnungen „Poissonsche Konstante“, „Steifigkeit“ sind dem Sprachgebrauch der Techniker entlehnt.

Für isotrope Körper führte Lamé die beiden Konstanten $\lambda$ und $\mu$ (vgl. § 69) ein; $\mu$ ist die Steifigkeit und $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ der Kompressionsmodul. Kelvin und Tait und Lord Rayleigh benutzen zur Bezeichnung der Steifigkeit den Buchstaben $n$. Saint-Venant[9]) gebraucht den Buchstaben $G$. Von vielen Autoren, u. a. von Clebsch und Kelvin und Tait, wird der Buchstabe $E$, wie im Text, zur Bezeichnung des Youngschen Moduls angewendet; in Lord Rayleighs *Theory of Sound* dient dazu der Buchstabe $q$. Die Poissonsche Konstante, von uns mit $\sigma$ bezeichnet, wird von Kelvin und Tait ebenso, von Clebsch und Rayleigh mit $\mu$, von Saint-Venant und

10) Bezüglich der Definitionen siehe § 47.

11) *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.*

*) Die Bemerkungen über die Terminologie weichen natürlich vom englischen Texte ab. Der Übersetzer.

12) *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität,* Leipzig 1885.

12′) *Elementare Mechanik,* 2. Aufl., Leipzig 1901.

Pearson mit $\eta$ bezeichnet. In den Arbeiten der italienischen Elastiker werden vielfach die Konstanten $(\lambda + 2\mu)/\varrho$ und $\mu/\varrho$ benutzt und mit $\Omega^2$ und $\omega^2$ bezeichnet; $\Omega$ und $\omega$ bedeuten die Geschwindigkeiten der wirbelfreien und der dilatationsfreien Wellen. Kirchhoff[8]) gebrauchte zwei Konstanten, die er mit $K$ und $\theta$ bezeichnete; $K$ ist die Steifigkeit und $\theta$ gleich der Zahl $\sigma/(1-2\sigma)$, wo $\sigma$ die Poissonsche Konstante. Kelvin und Tait[7]) benutzten zwei Konstanten $m$, $n$, die mit den Laméschen Konstanten $\lambda$, $\mu$ durch die Gleichungen $m = \lambda + \mu$, $n = \mu$ verknüpft sind.

Im Falle äolotroper Körper kommen nur wenige Bezeichnungsweisen in Frage. Pearson[3]) schlägt für die elastischen Konstanten, die wir nach Voigt[5]) mit $c_{11}, \ldots$ bezeichnet haben, folgende Bezeichnungen vor:

$$c_{11} = |xxxx|, \quad c_{12} = |xxyy|, \ldots, \quad c_{44} = |yzyz|, \ldots$$

Die Regel lautet, daß jeder Index 1, 2 oder 3 durch $xx$, $yy$ oder $zz$ und jeder Index 4, 5 oder 6 durch $yz$, $zx$ oder $xy$ zu ersetzen ist. Die beiden ersten Buchstaben in einem Symbol deuten hin auf eine Spannungskomponente, z. B. $X_x$, und die beiden letzten auf eine Verzerrungskomponente, z. B. $e_{xx}$. Die Buchstaben in jedem dieser Paare können miteinander vertauscht werden, ohne daß die Bedeutung des Symbols sich ändert. Die Bedingungen $(c_{sr} = c_{rs})$, welche ausdrücken, daß eine Verzerrungsenergie-Funktion existiert, lassen sich dahin aussprechen, daß die zwei Buchstabenpaare eines Symbols vertauschbar sind. Die Cauchyschen Relationen (§ 66) laufen darauf hinaus, daß die Reihenfolge der Buchstaben gleichgiltig ist.

Die Konstanten, mittels welcher die Verzerrung durch die Spannung ausgedrückt wird und die wir in § 72 und § 73 mit $C_{11}/\Pi$ bezeichneten, werden von Voigt[5]) mit $s_{11}, \ldots$ bezeichnet, und Liebisch[13]) folgt ihm hierin. Voigt[5]) hat für diese Koeffizienten den Namen „Moduln" vorgeschlagen, doch scheint dieser Vorschlag dem in Wendungen wie „Youngscher Modul" liegenden Gebrauch zuwiderzulaufen. Für die Koeffizienten $c_{11}, \ldots$ und $C_{11}/\Pi$ hat Rankine[1]) Namen vorgeschlagen, und Berichte über seine Terminologie findet man in Lord Kelvins *Baltimore Lectures* und in Todhunter und Pearsons *History*, vol. 2.

## Bemerkung B.

### Der Begriff der Spannung.

Eine Möglichkeit, die Idee der Spannung in den abstrakten begrifflichen Aufbau einer rationellen Mechanik einzufügen, liegt darin, sie als einen aus der Erfahrung abgeleiteten Grundbegriff hinzunehmen. Es handelt sich einfach um den Begriff der Wechselwirkung zwischen zwei sich berührenden Körpern, bezw. zwischen zwei Teilen desselben Körpers, die durch eine gedachte Fläche getrennt sind, und die physikalische Rea-

13) *Physikalische Kristallographie*, Leipzig 1891.





lität solcher Wechselwirkungen würde nach dieser Anschauung als Teil des begrifflichen Schemas hinzunehmen sein. In diesem Sinne ist vielleicht das Wort von Kelvin und Tait[14]) zu verstehen, daß „Kraft ein direkter Wahrnehmungsgegenstand sei" („force is a direct object of sense"). Diese Auffassung liegt der Methode zugrunde, die Euler[15]) bei seiner Formulierung der Prinzipien der Hydrostatik und Hydrodynamik befolgte und die Cauchy[16]) in seinen ersten Abhandlungen über Elastizität anwendete. Bedient man sich dieser Methode, so macht man einen Unterschied zwischen zwei Typen von Kräften, die wir als „Massenkräfte" und als „Oberflächenspannungen" bezeichnet haben: erstere werden als auf wirklicher Fernwirkung, letztere als auf Nahewirkung beruhend angenommen.

Die Naturforscher haben sich in der Regel nicht dazu verstanden, Fernwirkungen und Kontaktwirkungen gleichzeitig als Grundbegriffe hinzunehmen. Man war im allgemeinen der Ansicht, daß eine tiefer gehende Analyse eine zugrunde liegende Identität zwischen den beiden Wirkungsweisen aufdecken würde. Zeitweilig war man bemüht, Fernwirkung durch Spannung in einem Medium zu erklären, zu andern Zeiten suchte man Wirkungen, die allgemein als Nahewirkungen galten, durch Zentralkräfte darzustellen, die unmittelbar in die Ferne wirken.[17]) Ein Beispiel für ersteren Ansatz gibt das Maxwellsche Spannungssystem, das mit den elektrostatischen Anziehungs- und Abstoßungskräften gleichwertig ist.[18]). Das andere Verfahren findet sich in vielen der älteren Untersuchungen über Elastizität; über die Anwendung, die Cauchy davon zur Ermittlung der Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung in einem kristallinischen Material macht[19]), wird sogleich berichtet werden. Jede derartige Zurückführung von Nahewirkungen auf Fernwirkungen würde den Unterschied zwischen Oberflächenspannungen und Massenkräften verwischen, und man hat gewöhnlich die Unterscheidung durch eine Hypothese über den molekularen Aufbau der Körper festzuhalten gesucht. In der Cauchyschen Theorie z. B. werden die scheinbaren Nahewirkungen auf Fernwirkungen zwischen „Molekülen" zurückgeführt, und es wird angenommen, daß diese Wirkungen sich nicht über einen gewissen ein Molekül umgebenden Bereich, den sogenannten „molekularen Wirkungsbereich", ausdehnen. Die Massenkräfte andererseits werden als Fernwirkungen erklärt, die in merklicher Entfernung wirken. Eine zweite Möglichkeit der Einführung des Begriffs der Spannung ist also die, ihn auf eine Hypothese über Molekularkräfte zu gründen.

---

14) *Nat. Phil.*, Teil 1, p. 220.

15) *Berlin Hist. de l'Acad.*, t. 11 (1755).

16) *Exercices de mathématiques*, t. 2 (1827), p. 42. Die Cauchysche Arbeit datiert von 1822, siehe *Einleitung*, Fußnote 32.

17) Die Schwankungen der in der Wissenschaft vorherrschenden Meinung über diese Dinge hat Maxwell in einer Vorlesung über „Action at a distance", *Scientific Papers*, vol. 2, p. 311, geschildert.

18) *Electricity and Magnetism*, 2. Aufl. (Oxford 1881), vol. 1, Teil 1, Kap. V. Vgl. § 53, 6) oben.

19) „De la pression ou tension dans un système de points matériels", *Exercices de mathématiques*, t. 3 (1828), p. 213.

Eine dritte Möglichkeit ergibt sich aus einer Anwendung der Energietheorie. Wir nehmen an, daß eine Verzerrungsenergie-Funktion existiert und die Gleichgewichts- oder Schwingungsgleichungen für einen festen Körper nach dem Verfahren von § 115 erschlossen werden; wir wollen die Energie desjenigen Teils des Körpers, der von einer geschlossenen Fläche $S$ begrenzt ist, durch Vergrößerung der Verschiebung vermehren. Ein Teil des Energiezuwachses drückt sich durch ein Oberflächenintegral von der Form

$$\iint \left[ \left\{ \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \cos(z, \nu) \right\} \delta u + \cdots + \cdots \right] dS$$

aus. In der Formulierung der Mechanik mit Hilfe der Energietheorie sind nun die Kräfte definiert als die Koeffizienten der Verschiebungszuwachse in dem Ausdruck für die Energiezunahme. Der obige Ausdruck weist unmittelbar auf die Existenz von Kräften hin, die auf der einen beliebigen Teil des Körpers begrenzenden Fläche wirken und auf die Flächeneinheit derselben bezogen sind. Bei dieser Auffassung stellt sich der Begriff der Spannung als sekundärer oder abgeleiteter Begriff dar, wobei als Grundbegriffe die Energie, die Unterscheidung verschiedener Energiearten und die Lokalisation der Energie im Medium auftreten. Diese Methode scheint gegenwärtig auf die Fälle beschränkt zu sein, wo eine Verzerrungsenergie-Funktion existiert.

## Die Cauchysche Ableitung der Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung in einem kristallinischen Körper.

Es wird angenommen, daß der Körper aus einer großen Zahl materieller Punkte oder Massenteilchen besteht, die aufeinander aus der Entfernung mit Kräften wirken, die in die Richtung ihrer Verbindungslinien fallen. Die Kraft zwischen zwei Massenteilchen $m$, $m'$, die um $r$ von einander entfernt sind, wird als Anziehungskraft vom Betrage $mm'\chi(r)$ vorausgesetzt und angenommen, daß die Funktion $\chi(r)$ verschwindet, wenn $r$ einen gewissen endlichen Wert $R$ überschreitet, den Cauchy den „Radius der molekularen Wirkungssphäre" nennt. Ferner wird angenommen, daß die Massenteilchen, wenn sie bei fehlenden äußeren Kräften im Gleichgewicht sind, eine „homogene Verteilung" zeigen. Das soll heißen, daß alle dieselbe Masse haben und daß, wenn drei von ihnen in den Punkten $P$, $P'$ $Q$ liegen und von $Q$ aus eine zu $PP'$ parallele und gleich gerichtete Strecke $QQ'$ von der Länge $PP'$ gezogen wird, auch in $Q'$ ein Teilchen liegt.

Es seien $x$, $y$, $z$ die Koordinaten und $M$ die Masse eines Teilchens $P$. Wir ziehen um $P$ herum eine geschlossene Kurve $s$ in der Ebene $(p)$, die durch $P$ geht und zur $(y, z)$-Ebene parallel ist, so zwar, daß alle von $P$ nach $s$ gezogenen Radienvektoren größer sind als $R$. Es sei $S$ das von dieser Kurve eingeschlossene Flächenstück. Wir wollen annehmen, daß die linearen Abmessungen von $S$ sämtlich klein sind im Vergleich zu gebräuchlichen Maßeinheiten. Die statische Resultante aller Kräfte, deren Wirkungslinien $p$ innerhalb $s$ durchsetzen, ist eine Kraft, deren Kom-

nenten in Richtung der Achsen mit

$$X_x S,\ Y_x S,\ Z_x S$$

bezeichnet werden, wo $X_x$, $Y_x$, $Z_x$ die Komponenten der auf die Ebene in $P$ wirkenden Spannung. Diese Komponenten sind aber auch die Summen von Ausdrücken wie

$$m_i m_j' \chi(r_{ij}) \lambda_{ij},\ m_i m_j' \chi(r_{ij}) \mu_{ij},\ m_i m_j' \chi(r_{ij}) \nu_{ij};$$

hier bezeichnet $m_i$ die Masse eines Teilchens, das auf der Seite der Ebene liegt, für die $x$ größer ist als in $P$, $m_j'$ die Masse eines Teilchens, das auf der anderen Seite der Ebene liegt; $r_{ij}$ bedeutet den Abstand zwischen diesen Teilchen, und $\lambda_{ij}$, $\mu_{ij}$, $\nu_{ij}$ bezeichnen die Richtungskosinus der Verbindungslinie von $m_j'$ und $m_i$. Die Summation erstreckt sich über alle Paare, die so gelegen sind, daß die zugehörige Verbindungslinie $p$ innerhalb $s$ schneidet und die Entfernung $r_{ij}$ nicht größer ist als $R$.

Aus der vorausgesetzten Homogenität der Verteilung folgt, daß es ein Teilchen $Q$ von der Masse $m$ (gleich $M$ oder $m_i$ oder $m_j'$) gibt, das so liegt, daß die Strecke $PQ$ die Länge $r = r_{ij}$ hat und in die Richtung $(\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij})$ fällt. Sonach können die Glieder der obigen Summen ersetzt werden durch

$$M m \chi(r) \lambda,\ M m \chi(r) \mu,\ M m \chi(r) \nu,$$

wo $r$ der Abstand eines Teilchens $m$ von $M$ und $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die Richtungskosinus der von $M$ nach $m$ gezogenen Geraden. Die Summation läßt sich ausführen, indem zuerst über alle Punktpaare $(m_i, m_j')$ summiert wird, die dieselben $r$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ haben und so gelegen sind, daß ihre Verbindungslinie $p$ innerhalb $s$ schneidet, indem hierauf über alle Richtungen $(\lambda, \mu, \nu)$ summiert wird, auf denen solche Punktpaare vorkommen, und indem schließlich über alle Punktpaare summiert wird, deren Entfernung nicht größer ist als $R$. Die erste Summation wird ausgeführt, indem die Ausdrücke von der Form $M m \chi(r) \lambda$ mit der Zahl der Teilchen multipliziert werden, die in einem Zylinder von der Grundfläche $S$ und der Höhe $r\lambda$ liegen. Diese Zahl ist $\varrho S r \lambda / M$, wo $\varrho$ die Dichte, d. h. die in der Volumeinheit enthaltene Masse des Punktsystems. Wir haben also die Summen über Ausdrücke von folgender Form zu bilden

$$\varrho m r \lambda^2 \chi(r),\ \varrho m r \lambda \mu \chi(r),\ \varrho m r \lambda \nu \chi(r).$$

Wird die Summation über alle von $P$ auslaufenden Richtungen $(\lambda, \mu, \nu)$, in denen Teilchen vorkommen, ausgedehnt, so wird jeder Term doppelt gezählt, und die gesuchten Ausdrücke für die Spannungskomponenten $X_x, \ldots$ lauten daher

$$X_x = \tfrac{1}{2} \varrho \sum m r \lambda^2 \chi(r),\quad Y_x = \tfrac{1}{2} \varrho \sum m r \lambda \mu \chi(r),\quad Z_x = \tfrac{1}{2} \varrho \sum m r \lambda \nu \chi(r),$$

wo die Summationen sich über alle Teilchen erstrecken, deren Abstand von $P$ nicht größer ist als $R$.

Wenn Anfangsspannung nicht vorhanden ist, verschwinden die sechs Summen dieser Art, d. h. wir haben

$$\sum m r \lambda^2 \chi(r) = 0, \ldots, \sum m r \lambda \mu \chi(r) = 0, \ldots;$$

wenn aber Anfangsspannung besteht, sind die Werte ihrer sechs Komponenten gleich $X_x^{(0)}, \ldots$, wo

$$X_x^{(0)} = \tfrac{1}{2} \varrho \sum m r \lambda^2 \chi(r), \ldots, X_y^{(0)} = \tfrac{1}{2} \varrho \sum m r \lambda \mu \chi(r).$$

Die Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung ergeben sich aus der Betrachtung der kleinen Änderungen, die in obigen Ausdrücken eintreten, wenn das System eine kleine innere Verschiebung erfährt. Wie in § 7 möge die unverzerrte Lage von $M$ durch Koordinaten $x, y, z$ und die verzerrte Lage durch Koordinaten $x + u$, $y + v$, $z + w$ gegeben sein. Gleichzeitig wird $m$ von $(x + \mathfrak{x}, y + \mathfrak{y}, z + \mathfrak{z})$ nach $(x + \mathfrak{x} + u + \mathfrak{u}, \ldots)$ verschoben, wo $\mathfrak{u}, \ldots$ mit hinreichender Annäherung durch Formeln wie

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{z} \frac{\partial u}{\partial z}$$

gegeben sind; dabei geht $r\lambda$ in $r\lambda + \delta(r\lambda)$ über, wo

$$\delta(r\lambda) = r\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

und entsprechende Formeln haben wir für $\delta(r\mu)$, $\delta(r\nu)$. Andererseits geht $r$ in $r(1 + e)$ über, wo

$$e = e_{xx}\lambda^2 + e_{yy}\mu^2 + e_{zz}\nu^2 + e_{yz}\mu\nu + e_{zx}\nu\lambda + e_{xy}\lambda\mu,$$

und $\varrho$ geht in $\varrho'$ über, wo

$$\varrho' = \varrho\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Das Ergebnis ist, daß wir für $X_x, \ldots$ Ausdrücke wie

$$X_x = \tfrac{1}{2}\varrho' \sum \left[m \frac{1}{r(1+e)} \{\chi(r) + e r \chi'(r)\} \{r\lambda + \delta(r\lambda)\}^2\right],$$

$$X_y = \tfrac{1}{2}\varrho' \sum \left[m \frac{1}{r(1+e)} \{\chi(r) + e r \chi'(r)\} \{r\lambda + \delta(r\lambda)\} \{r\mu + \delta(r\mu)\}\right]$$

erhalten. Wenn keine Anfangsspannung besteht, liefern uns diese Gleichungen die Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung in der Form

$$X_x = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [m r \{r\chi'(r) - \chi(r)\} \lambda^2 \{e_{xx}\lambda^2 + e_{yy}\mu^2 + e_{zz}\nu^2 + e_{yz}\mu\nu + e_{zx}\nu\lambda + e_{xy}\lambda\mu\}],$$

$$X_y = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [m r \{r\chi'(r) - \chi(r)\} \lambda\mu \{e_{xx}\lambda^2 + e_{yy}\mu^2 + e_{zz}\nu^2 + e_{yz}\mu\nu + e_{zx}\nu\lambda + e_{xy}\lambda\mu;$$

die elastischen Konstanten $c_{11}, \ldots$ drücken sich also durch Summen von folgendem Typus aus:

$$c_{11} = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [mr\,\{r\chi'(r) - \chi(r)\}\,\lambda^4],$$
$$c_{12} = c_{66} = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [mr\,\{r\chi'(r) - \chi(r)\}\,\lambda^2\mu^2],$$
$$c_{14} = c_{56} = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [mr\,\{r\chi'(r) - \chi(r)\}\,\lambda^2\mu\nu],$$
$$c_{16} = \tfrac{1}{2}\varrho \sum [mr\,\{r\chi'(r) - \chi(r)\}\,\lambda^3\mu].$$

Es sind ihrer 15, indem die 21 Greenschen Koeffizienten durch 6 Gleichungen verknüpft sind, die als die Cauchyschen Relationen bezeichnet wurden (§ 66).

Wenn Anfangsspannung vorhanden ist, haben wir zu obigen Ausdrücken für $X_x$ und $X_y$ die Glieder

$$X_x^{(0)}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\,X_y^{(0)}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\,X_z^{(0)}\frac{\partial u}{\partial z}$$

und

$$X_x^{(0)}\frac{\partial v}{\partial x} + Y_y^{(0)}\frac{\partial u}{\partial y} + Y_z^{(0)}\frac{\partial u}{\partial z} + Z_x^{(0)}\frac{\partial v}{\partial z} + X_y^{(0)}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

hinzuzufügen, und entsprechende Glieder sind zu den übrigen Spannungskomponenten zu addieren (§ 75).

Vorstehende Untersuchung ist mitgeteilt als Beispiel für die Art der Methoden, mit denen ursprünglich die Grundlagen der Elastizitätstheorie entwickelt wurden. Eine Modifikation, die die Ergebnisse mit dem Experiment in Einklang bringt, hat W. Voigt, *Ann. Phys.* (Ser. 4), Bd. 4 (1901) vorgeschlagen.

---

## Bemerkung C.

### Anwendungen der Methode der beweglichen Achsen.

Die Theorie der beweglichen Achsen läßt sich auf dem in § 35 erhaltenen Resultat aufbauen. Eine Figur von unveränderlicher Gestalt möge um eine Achse rotieren, deren Richtungskosinus, auf feste Achsen bezogen, $l$, $m$, $n$ sind, und zwar möge sie in der Zeit $\delta t$ sich um einen Winkel $\delta\theta$ drehen. Zu Beginn dieses Zeitabschnitts liege ein zu der Figur gehörender Punkt an der Stelle, deren Koordinaten, auf die festen Achsen bezogen, $x, y, z$ sind; am Schlusse des Zeitabschnitts wird dann derselbe Punkt der Figur an die Stelle gerückt sein, deren Koordinaten

$$x + (mz - ny)\sin\delta\theta - \{x - l(lx + my + nz)\}\,(1 - \cos\delta\theta), \ldots$$

sind. Die Geschwindigkeitskomponenten des rotierenden Punktes in dem Augenblick, wo er durch $(x, y, z)$ hindurchgeht, sind daher

$$-yn\frac{d\theta}{dt}+zm\frac{d\theta}{dt}, \quad -zl\frac{d\theta}{dt}+xn\frac{d\theta}{dt}, \quad -xm\frac{d\theta}{dt}+yl\frac{d\theta}{dt}.$$

Wir können einen Vektor von der Größe $d\theta/dt$ in die Achse $(l, m, n)$ legen und ihn durch die Komponenten $\omega_x$, $\omega$ , $\omega_z$ kennzeichnen, sodaß $\omega_x = l\,d\theta/dt, \ldots$ Dieser Vektor ist die Winkelgeschwindigkeit der Figur. Die Geschwindigkeitskomponenten des rotierenden Punktes, der zur Zeit $t$ durch $(x, y, z)$ hindurchgeht, sind dann

$$-y\omega_z + z\omega_y, \quad -z\omega_x + x\omega_z, \quad -x\omega_y + y\omega_x.$$

Nun möge ein rechtwinkliges $(x', y', z')$-Achsensystem, dessen Ursprung im Anfangspunkt der festen $(x, y, z)$-Achsen liegt und das aus den $(x, y, z)$-Achsen durch eine Drehung abgeleitet werden kann, mit der Figur rotieren; die Richtungen der bewegten Achsen zur Zeit $t$ seien durch folgendes Schema von neun Richtungskosinus bestimmt:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x'$ | $l_1$ | $m_1$ | $n_1$ |
| $y'$ | $l_2$ | $m_2$ | $n_2$ |
| $z'$ | $l_3$ | $m_3$ | $n_3$ |

$\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ mögen die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Figur in Richtung der $(x', y', z')$-Achsen bezeichnen, sodaß

$$\omega_x = l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + l_3\theta_3, \ldots,$$

und es möge ein Punkt $(x', y', z')$ sich so bewegen, wie wenn er mit der rotierenden Figur starr verbunden wäre. Die Koordinaten dieses Punktes in bezug auf die festen Achsen sind zur Zeit $t$ gleich $l_1x' + l_2y' + l_3z', \ldots$, und wir können zwei Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes einander gleichsetzen. Wir erhalten so drei Gleichungen vom Typus

$$\frac{d}{dt}(l_1x' + l_2y' + l_3z') = -(m_1x' + m_2y' + m_3z')(n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + n_3\theta_3) + (n_1x' + n_2y' + n_3z')(m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + m_3\theta_3).$$

Da die $(x', y', z')$-Achsen sich aus den $(x, y, z)$-Achsen durch eine Drehung ableiten lassen, so haben wir die Gleichungen vom Typus

$$m_1n_2 - m_2n_1 = l_3.$$

Die obigen Gleichungen gelten für alle Werte von $x'$, $y'$, $z'$, und wir haben daher, da $x'$, $y'$, $z'$ von der Zeit unabhängig sind, die neun Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dl_1}{dt} &= l_2\theta_3 - l_3\theta_2, & \frac{dl_2}{dt} &= l_3\theta_1 - l_1\theta_3, & \frac{dl_3}{dt} &= l_1\theta_2 - l_2\theta_1,\\
\frac{dm_1}{dt} &= m_2\theta_3 - m_3\theta_2, & \frac{dm_2}{dt} &= m_3\theta_1 - m_1\theta_3, & \frac{dm_3}{dt} &= m_1\theta_2 - m_2\theta_1,\\
\frac{dn_1}{dt} &= n_2\theta_3 - n_3\theta_2, & \frac{dn_2}{dt} &= n_3\theta_1 - n_1\theta_3, & \frac{dn_3}{dt} &= n_1\theta_2 - n_2\theta_1.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nun mögen $u, v, w$ die Projektionen eines beliebigen Vektors auf die festen Achsen sein, $u', v', w'$ die Projektionen desselben Vektors auf die beweglichen Achsen zur Zeit $t$. Wir haben dann Gleichungen wie

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(l_1 u_1' + l_2 v' + l_3 w') = l_1\left(\frac{du'}{dt} - v'\theta_3 + w'\theta_2\right)\\
+ l_2\left(\frac{dv'}{dt} - w'\theta_1 + u'\theta_3\right) + l_3\left(\frac{dw'}{dt} - u'\theta_2 + v'\theta_1\right). \quad (2)
\end{aligned}$$

Der Vektor, dessen Projektionen auf die festen Achsen gleich

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}$$

sind, hat somit folgende Projektionen auf die beweglichen Achsen:

$$\frac{du'}{dt} - v'\theta_3 + w'\theta_2, \quad \frac{dv'}{dt} - w'\theta_1 + u'\theta_3, \quad \frac{dw'}{dt} - u'\theta_2 + v'\theta_1. \quad (3)$$

Wir können die Bedingung, daß der Ursprung der beweglichen Achsen mit dem der festen Achsen zusammenfällt, fallen lassen. Die Formeln (1) bleiben ungeändert, und die Formeln (2) bleiben ebenfalls ungeändert, sofern nicht $u, v, w$ die Koordinaten eines Punktes bedeuten. Es seien $x_0, y_0, z_0$ die Koordinaten des Anfangspunktes der beweglichen Achsen in bezug auf die festen Achsen, $x, y, z$ und $x', y', z'$ diejenigen eines beliebigen bewegten Punktes in bezug auf die festen und die beweglichen Achsen. Wir haben dann Formeln wie

$$x = x_0 + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z'$$

und daher

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + l_1\left(\frac{dx'}{dt} - y'\theta_3 + z'\theta_2\right) + l_2\left(\frac{dy'}{dt} - z'\theta_1 + x'\theta_3\right)\\
+ l_3\left(\frac{dz'}{dt} - x'\theta_2 + y'\theta_1\right).
\end{aligned}$$

Es seien $u_0', v_0', w_0'$ die Projektionen der Geschwindigkeit des Anfangspunktes der $(x', y', z')$ auf die instantanen Lagen der beweglichen Achsen, dann haben wir

$$\frac{dx_0}{dt} = l_1 u_0' + l_2 v_0' + l_3 w_0'.$$

Die Projektionen der Geschwindigkeit irgend eines bewegten Punktes auf die instantanen Lagen der beweglichen Achsen sind daher

$$u_0' + \frac{dx'}{dt} - y'\theta_3 + z'\theta_2, \quad v_0' + \frac{dy'}{dt} - z'\theta_1 + x'\theta_3, \quad w_0' + \frac{dz'}{dt} - x'\theta_2 + y'\theta_1. \tag{4}$$

Diese Formeln lassen sich für die Berechnung von Differentialquotienten benutzen. Es seien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... beliebige Parameter, und mit jedem System von Parameterwerten sei ein System rechtwinkliger $(x', y', z')$-Achsen so verknüpft, daß die Lage des Anfangspunktes dieses Dreikants und die Achsenrichtungen bekannt sind, wenn die Parameter gegeben sind. Die Lage eines Punktes in bezug auf die variablen Achsen sei als bekannt vorausgesetzt; die Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des Punktes sind dann bekannte Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... Es seien $x$, $y$, $z$ die auf feste Achsen bezogenen Koordinaten des Punktes. Dann sind $x$, $y$, $z$ ebenfalls Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., und wir wünschen die Werte von $\partial x/\partial \alpha$, ... zu berechnen. Wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... sich ändern, erfährt der Anfangspunkt der variabeln Achsen eine Verschiebung, und die Achsen erfahren eine Drehung; wir können uns vorstellen, daß diese Verschiebung und diese Drehung stetig mit gewissen Geschwindigkeiten sich vollziehen. Wir haben dann eine Geschwindigkeit des Ursprungspunktes und eine Winkelgeschwindigkeit des Achsendreikants. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit wie früher durch ihre auf die instantanen Lagen der variablen Achsen bezogenen Komponenten $u_0'$, $v_0'$, $w_0'$ und $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, so sind die Größen $u_0'$, ..., $\theta_1$, ... lineare Funktionen von $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$, ..., und die Koeffizienten von $d\alpha/dt$, ... in diesen Funktionen sind bekannte Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... Wir haben sonach Gleichungen von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots = l_1\left\{u_0' + \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) - y'\theta_3 + z'\theta_2\right\} \\ + l_2\left\{v_0' + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial y'}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) - z'\theta_1 + x'\theta_3\right\} \\ + l_3\left\{w_0' + \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial z'}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\right) - x'\theta_2 + y'\theta_1\right\}.\end{aligned}$$

Wir können, da die Größen $u_0'$, ... $\theta_1$, ... als lineare Funktionen von $d\alpha/dt$, ... ausgedrückt sind, die Koeffizienten von $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$, ... auf beiden Seiten dieser Gleichungen einander gleichsetzen.

Bezeichnen $u$, $v$, $w$ und $u'$, $v'$, $w'$ die Projektionen eines Vektors auf die festen und die variablen Achsen, so liefern uns die Gleichungen (2) in gleicher Weise Formeln zur Berechnung von $\partial u/\partial \alpha$, ... Bei den Anwendungen der Methode empfiehlt es sich im allgemeinen sehr, die festen Achsen mit den Lagen der variablen Achsen, die speziellen Werten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... der Parameter entsprechen, zusammenfallen zu lassen; in den Gleichungen (2) können wir dann $l_1 = m_2 = n_3 = 1$ und $l_2 = \cdots = 0$ setzen. Alsdann sind die Werte von $\partial u/\partial \alpha$, die zu diesen speziellen Werten von $\alpha$, ... gehören, gegeben durch Formeln vom Typus

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\cdots=\left(\frac{\partial u'}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial u'}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\cdots\right)$$
$$-v'\theta_3+w'\theta_2. \quad (5)$$

Obiges Verfahren hat wiederholt in den Kapiteln XVIII, XXI, XXIV Anwendung gefunden. Als weitere Beispiele behandeln wir einige Fragen, die sich auf rechtwinklige krummlinige Koordinaten beziehen. Wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Koordinaten,

$$\{(d\alpha/h_1)^2+(d\beta/h_2)^2+(d\gamma/h_3)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

der Ausdruck für das Linienelement und die Normalen der Flächen die variablen Achsen sind, so haben wir

$$u_0'=\frac{1}{h_1}\frac{d\alpha}{dt}, \quad v_0'=\frac{1}{h_2}\frac{d\beta}{dt}, \quad w_0'=\frac{1}{h_3}\frac{d\gamma}{dt}.$$

Um die Werte von $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ zu bestimmen, greifen wir auf das in § 19 zitierte Dupinsche Theorem zurück. Aus diesem Theorem folgt, daß die auf einer Fläche $\gamma$ in Punkten ihres Schnitts mit einer Fläche $\beta$ gezogenen Tangenten derjenigen Kurven, in denen die Fläche $\gamma$ von zwei benachbarten $\alpha$-Flächen, etwa $\alpha$ und $\alpha+\delta\alpha$, durchsetzt wird, sich bei unbegrenzt abnehmendem $\delta\alpha$ schneiden müssen und daß der in der Grenze erhaltene Schnittpunkt $T$ ein Hauptkrümmungsmittelpunkt der Fläche $\beta$ ist. In Fig. 75 ist $P$ mit $(\alpha, \beta, \gamma)$, $P_1$ mit $(\alpha+\delta\alpha, \beta, \gamma)$, $P_2$ mit $(\alpha, \beta+\delta\beta, \gamma)$,

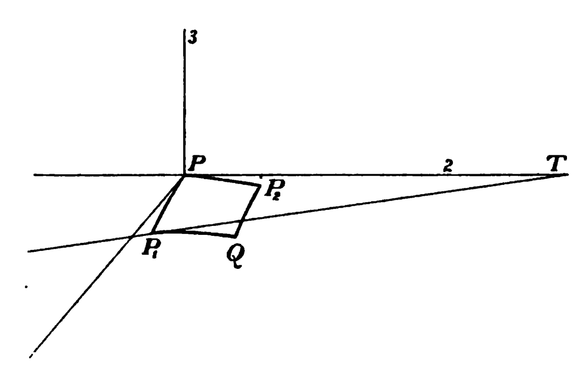



Fig. 75.

$Q$ mit $(\alpha+\delta\alpha, \beta+\delta\beta, \gamma)$ identisch. Die Länge des Bogenstückes $PP_1$ kann gleich $\delta\alpha/h_1$ gesetzt werden, und der Überschuß der Länge $P_2Q$ über $PP_1$ ist bei Beschränkung auf Glieder zweiter Ordnung gleich $\delta\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\delta\alpha}{h_1}\right)$. Die Tangenten an $PP_2$ in $P$ und an $P_1Q$ in $P_1$ werden sich, wie wir sagen dürfen, in $T$ schneiden; die Länge von $PP_2$ können wir gleich $\delta\beta/h_2$ setzen. Der Winkel $PTP_1$ ist dann gleich $-h_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)\delta\alpha$. Somit ist der Koeffizient von $d\alpha/dt$ in $\theta_3$ gleich $-h_2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)$. Ebenso ist

der Koeffizient von $d\beta/dt$ in $\theta_3$ gleich $h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)$. Wir können jetzt die Formeln hinschreiben

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_3}\right)\frac{d\gamma}{dt} - h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right)\frac{d\beta}{dt}, \\ \theta_2 &= h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)\frac{d\alpha}{dt} - h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right)\frac{d\gamma}{dt}, \\ \theta_3 &= h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)\frac{d\beta}{dt} - h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)\frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die obige Schlußweise zeigt, daß die Hauptkrümmungen der Fläche $\gamma$, die zu ihren Schnittlinien mit den Flächen $\alpha$ und $\beta$ gehören, bezüglich gleich

$$-h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right) \quad \text{und} \quad h_1 h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)$$

sind. Entsprechende Formeln haben wir für die Hauptkrümmungen der Flächen $\alpha$ und $\beta$.

Es seien $L$, $M$, $N$ die Richtungskosinus einer festen Geraden, bezogen auf die Normalen der Flächen in einem bestimmten Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$, und es seien $L'$, $M'$, $N'$ die Richtungskosinus derselben Geraden, bezogen auf die variablen Achsen in einem beliebigen Punkt. Dann sind $L'$, $M'$, $N'$ Funktionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $L$, $M$, $N$ sind jedoch unabhängig von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Wir können die Formeln (5) anwenden und in ihnen $u$, $v$, $w$ durch $L$, $M$, $N$ und $u'$, $v'$, $w'$ durch $L'$ $M'$ $N'$ ersetzen. Wir finden

$$\frac{\partial L'}{\partial\alpha} = -M' h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) - N' h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right), \quad \frac{\partial L'}{\partial\beta} = M' h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right),$$
$$\frac{\partial L'}{\partial\gamma} = N' h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right),$$
$$\frac{\partial M'}{\partial\alpha} = L' h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_1}\right), \quad \frac{\partial M'}{\partial\beta} = -N' h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right) - L' h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right),$$
$$\frac{\partial M'}{\partial\gamma} = N' h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_3}\right),$$
$$\frac{\partial N'}{\partial\alpha} = L' h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right), \quad \frac{\partial N'}{\partial\beta} = M' h_3 \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{h_2}\right),$$
$$\frac{\partial N'}{\partial\gamma} = -L' h_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right) - M' h_2 \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{h_3}\right).$$

Von diesen Formeln machten wir in § 58 Gebrauch.

Um Ausdrücke für die *Verzerrungs-* und *Drehungskomponenten* abzuleiten[20]), setzen wir für $(u', v', w')$ die Verschiebung $(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ und für $(u, v, w)$ die auf feste $(x, y, z)$-Achsen bezogene Verschiebung, wobei die letzteren mit den Normalen der Flächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ im Punkte $(\alpha, \beta, \gamma)$ zusammenfallen mögen. Wir haben dann z. B. in $(\alpha, \beta, \gamma)$

20) Vgl. R. R. Webb, *Messenger of Math.*, vol. 11 (1882), p. 146.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = h_2 \frac{\partial u}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = h_3 \frac{\partial u}{\partial \gamma}.$$

Wenden wir nun die Formeln (5) und (6) an, so haben wir

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}$$

$$- u_\beta\left\{h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)\frac{d\beta}{dt} - h_2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right)\frac{d\alpha}{dt}\right\} + u_\gamma\left\{h_3 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)\frac{d\alpha}{dt} - h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right)\frac{d\gamma}{dt}\right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

und hieraus erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1\left\{\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_2 u_\beta \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{h_1}\right) + h_3 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{h_1}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h_2\left\{\frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - h_1 u_\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_2}\right)\right\}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = h_3\left\{\frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} - h_1 u_\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{h_3}\right)\right\}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Die Formeln (36) von § 20 und (38) von § 21 lassen sich nun hinschreiben.

Um die *Spannungsgleichungen* abzuleiten[30]), wählen wir das gleiche System fester Achsen und betrachten die Resultanten der Spannungen, die auf die Seitenflächen eines von den Flächen $\alpha, \alpha + \delta\alpha, \beta, \beta + \delta\beta, \gamma, \gamma + \delta\gamma$ begrenzten krummlinigen Parallelepipeds wirken. (Vgl. Fig. 3, § 21). Die auf den Seiten $\alpha, \beta, \gamma$ begrenzten Flächenstücke können wir gleich $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ annehmen, wo

$$\Delta_1 = \delta\beta\delta\gamma/h_2 h_3, \quad \Delta_2 = \delta\gamma\delta\alpha/h_3 h_1, \quad \Delta_3 = \delta\alpha\delta\beta/h_1 h_2.$$

Die auf die Fläche $\alpha$ wirkenden Spannungen pro Flächeneinheit lassen sich durch $X_\alpha$, $Y_\alpha$, $Z_\alpha$ oder durch $\widehat{\alpha\alpha}$, $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\gamma\alpha}$ ausdrücken, und die über die Seite $\Delta_1$ resultierenden Spannungen können durch $X_\alpha\Delta_1$, $Y_\alpha\Delta_1$, $Z_\alpha\Delta_1$ oder durch $\widehat{\alpha\alpha}\Delta_1$, $\widehat{\alpha\beta}\Delta_1$, $\widehat{\gamma\alpha}\Delta_1$ dargestellt werden. In den Formeln (5) können $X_\alpha\Delta_1$, $Y_\alpha\Delta_1$, $Z_\alpha\Delta_1$ an Stelle von $u, v, w$ und $\widehat{\alpha\alpha}\Delta_1$, $\widehat{\alpha\beta}\Delta_1$, $\widehat{\gamma\alpha}\Delta_1$ an Stelle von $u', v', w'$ gesetzt werden. Ähnlich können $X_\beta\Delta_2$, $Y_\beta\Delta_2$, $Z_\beta\Delta_2$ an die Stelle von $u, v, w$ und $\widehat{\alpha\beta}\Delta_2$, $\widehat{\beta\beta}\Delta_2$, $\widehat{\beta\gamma}\Delta_2$ an die Stelle von $u', v', w'$ gesetzt werden usw. Die Bewegungsgleichuugen lassen sich nun in folgender Form ausdrücken:

$$\delta\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}(X_\alpha\Delta_1) + \delta\beta \frac{\partial}{\partial \beta}(X_\beta\Delta_2) + \delta\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}(X_\gamma\Delta_3) + \varrho F_\alpha \frac{\delta\alpha\,\delta\beta\,\delta\gamma}{h_1 h_2 h_3}$$
$$= \varrho f_\alpha \frac{\delta\alpha\,\delta\beta\,\delta\gamma}{h_1 h_2 h_3}, \text{ usw.},$$

wo die Bezeichnung dieselbe ist wie in § 58. Wir erhalten die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(X_\alpha\Delta_1)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(X_\alpha\Delta_1)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(X_\alpha\Delta_1)\frac{d\gamma}{dt}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\widehat{\alpha\alpha}\Delta_1)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(\widehat{\alpha\alpha}\Delta_1)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(\widehat{\alpha\alpha}\Delta_1)\frac{d\gamma}{dt}-\widehat{\alpha\beta}\Delta_1\theta_3+\widehat{\gamma\alpha}\Delta_1\theta_2,$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(X_\beta\Delta_2)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(X_\beta\Delta_2)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(X_\beta\Delta_2)\frac{d\gamma}{dt}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\widehat{\alpha\beta}\Delta_2)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(\widehat{\alpha\beta}\Delta_2)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(\widehat{\alpha\beta}\Delta_2)\frac{d\gamma}{dt}-\widehat{\beta\beta}\Delta_2\theta_3+\widehat{\beta\gamma}\Delta_2\theta_2,$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(X_\gamma\Delta_3)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(X_\gamma\Delta_3)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(X_\gamma\Delta_3)\frac{d\gamma}{dt}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}(\widehat{\gamma\alpha}\Delta_3)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial}{\partial\beta}(\widehat{\gamma\alpha}\Delta_3)\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial}{\partial\gamma}(\widehat{\gamma\alpha}\Delta_3)\frac{d\gamma}{dt}-\widehat{\beta\gamma}\Delta_3\theta_3+\widehat{\gamma\gamma}\Delta_3\theta_2,$$

wo $\theta_2$, $\theta_3$ durch (6) gegeben sind. Gleichung (19) von § 58 läßt sich nunmehr sofort hinschreiben.

---

## Bemerkung D.

Der Verfasser wurde von Dr. A. Timpe darauf aufmerksam gemacht, daß der Verlauf der Spannungstrajektorien in Fig. 15, p. 234, auf die Existenz von Punkten hinzuweisen scheint, in denen sich mehr als zwei Spannungslinien in der Ebene der Figur kreuzen. Wenn solche Punkte auftreten, muß die Spannung in ihnen in einfachem Zug oder Druck senkrecht zur Ebene der Zeichnung bestehen, und zwei Hauptspannungen verschwinden. Die Existenz derartiger Punkte ist nicht erwiesen; denn der Verlauf der Trajektorien wurde von Hertz, *loc. cit.* p. 234, nur für diejenigen Teile der Figur, die an $A'OA$ und an die durch $O$ senkrecht zu $A'OA$ verlaufende Gerade grenzen, berechnet und die Zeichnung im übrigen durch Konjektur ergänzt.

---

## Bemerkung E.

### Spannung in einem gleichförmig belasteten Balken.

Unter Benutzung der Bezeichnungen von § 244 a), b), c) finde ich folgende Ausdrücke für die Spannungskomponenten in einem durch sein Eigengewicht gebogenen Kreiszylinder:

$$X_x=\frac{\mu\varkappa_2 x}{12}[(5+2\sigma)(a^2-x^2)-3(1-2\sigma)y^2],$$

$$Y_y=\frac{\mu\varkappa_2 x}{12}[3(1+2\sigma)(a^2-y^2)-(1-2\sigma)x^2],$$

$$X_y=\frac{\mu\varkappa_2 y}{12}[(1-2\sigma)(a^2-y^2)-3(1+2\sigma)x^2],$$

$$X_z=\mu(\varkappa_1+2\varkappa_2 z)[-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\sigma)(a^2-x^2)+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2],$$

$$Y_z = \mu(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 z)(\tfrac{1}{2} + \sigma)xy,$$
$$Z_z = -E(\varkappa_0 + \varkappa_1 z + \varkappa_2 z^2)x - \mu\varkappa_2 x[\tfrac{1}{3}(9 + 13\sigma + 4\sigma^2)a^2 - (1 + \tfrac{1}{2}\sigma)(x^2 + y^2)].$$

Die Konstante $\varkappa_2$ ist durch die Gleichung gegeben

$$\varkappa_2 = g\varrho/\mu a^2(1 + \sigma).$$

Wenn der Balken von der Länge $l$ in $z = 0$ horizontal befestigt und das Ende $z = l$ unbelastet ist, haben wir

$$\varkappa_1 = -2\varkappa_2 l, \quad \varkappa_0 = \varkappa_2\left[l^2 - a^2\frac{7 + 12\sigma + 4\sigma^2}{6(1 + \sigma)}\right].$$

Wenn der Balken von der Länge $2l$ an den Enden $z = l$ und $z = -l$, die sich in gleicher Höhe befinden, gestützt ist, haben wir

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_0 = -\varkappa_2\left[l^2 + a^2\frac{7 + 12\sigma + 4\sigma^2}{6(1 + \sigma)}\right].$$

Eine hiervon unabhängige Berechnung der Verschiebung, die mir Herr G. C. Calliphronas übersandt hat, bestätigt diese Resultate.

## Bemerkung F.

### Dehnungsschwingungen einer ebenen Platte.[21])

Die Schwingungsgleichungen sind durch die Gleichungen (97) von § 314, (e) gegeben. Sie lassen sich sehr einfach mit Hilfe der Flächendehnung $\Delta'$ und der Drehung $\varpi$ ausdrücken, wobei diese Größen analytisch durch die Gleichungen

$$\Delta' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 2\varpi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

definiert sind. Die Gleichungen nehmen die Form an

$$\frac{\partial \Delta'}{\partial x} - (1-\sigma)\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \Delta'}{\partial y} + (1-\sigma)\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{2}$$

In dieser Form lassen sie sich leicht auf passende krummlinige Koordinaten transformieren.

Wir betrachten insbesondere den Fall einer Platte mit kreisförmiger Randlinie. Wir werden am besten ebene Polarkoordinaten $r$, $\theta$ mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Kreises einführen. Es seien $U$, $V$ die Projektionen der Verschiebung eines Punktes der Mittelebene auf den Radiusvektor und die zum Radiusvektor senkrechte Gerade. Dann haben wir

21) Gleichungen, die mit (97) von § 314, (e) gleichwertig sind, wurden von Poisson und Cauchy erhalten, siehe *Einleitung*, Fußnoten 36 und 124. Poisson untersuchte auch die symmetrischen Radialschwingungen einer Kreisplatte; er erhielt eine Frequenzengleichung, die mit der Formel (10) dieser Bemerkung gleichwertig ist, und berechnete die Frequenzen der tieferen Schwingungen von diesem Typus.

$$u = U \cos\theta - V \sin\theta, \quad v = U \sin\theta + V \cos\theta, \tag{3}$$

und

$$\Delta' = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad 2\varpi = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \tag{4}$$

und die zu irgend einem Kreis $r = \text{const.}$ gehörenden Spannungsresultanten $T$, $S$ sind gegeben durch

$$T = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial U}{\partial r} + \sigma\left(\frac{U}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\right], \quad S = \frac{Eh}{1+\sigma}\left[\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right]. \tag{5}$$

Die Schwingungsgleichungen liefern

$$\nabla_1^2 \Delta' = \frac{\varrho(1-\sigma^2)}{E}\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial t^2}, \quad \nabla_1^2 \varpi = \frac{2\varrho(1+\sigma)}{E}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Wir setzen

$$U = U_n \cos n\theta \cos pt, \quad V = V_n \sin n\theta \cos pt, \tag{7}$$

wo $U_n$ und $V_n$ Funktionen von $r_1$, und schreiben

$$\varkappa^2 = \varrho(1-\sigma^2)p^2/E, \quad \varkappa'^2 = 2\varrho(1+\sigma)p^2/E. \tag{8}$$

Dann hat $\Delta'$ die Form $A' J_n(\varkappa r) \cos n\theta \cos pt$, und $\varpi$ hat die Form $B' J_n(\varkappa' r) \sin n\theta \cos pt$, wo $A'$ und $B'$ Konstanten bedeuten und $J_n$ die Besselsche Funktion von der Ordnung $n$ bezeichnet. $U$ und $V$ haben die durch folgende Gleichungen gegebene Form:

$$\left.\begin{aligned} U &= \left[A \frac{dJ_n(\varkappa r)}{dr} + nB\frac{J_n(\varkappa' r)}{r}\right] \cos n\theta \cos pt, \\ V &= -\left[nA\frac{J_n(\varkappa r)}{r} + B\frac{dJ_n(\varkappa' r)}{dr}\right] \sin n\theta \cos pt, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und damit ergibt sich

$$\Delta' = -A\varkappa^2 J_n(\varkappa r) \cos n\theta \cos pt, \quad 2\varpi = B\varkappa'^2 J_n(\varkappa' r) \sin n\theta \cos pt.$$

Wir können freie Schwingungen erhalten, bei denen $V$ verschwindet und $U$ von $\theta$ unabhängig ist; die Frequenzengleichung ist

$$\frac{dJ_1(\varkappa a)}{da} + \frac{\sigma}{a} J_1(\varkappa a) = 0, \tag{10}$$

wo $a$ der Radius der Randlinie. Ebenso können wir freie Schwingungen erhalten, bei denen $U$ verschwindet und $V$ von $\theta$ unabhängig ist; die Frequenzengleichung lautet

$$\frac{dJ_1(\varkappa' a)}{da} = \frac{J_1(\varkappa' a)}{a}. \tag{11}$$

Diese beiden Arten symmetrischer Schwingung scheinen gewissen Schwingungsarten einer geschlossenen dünnen Kugelschale (vergl. § 335) zu entsprechen. Die Schwingung, bei der $U$ verschwindet und $V$ von $\theta$ unabhängig ist, entspricht den Schwingungen, bei der keine Verschiebung in Richtung des Radius der Kugel stattfindet. Die Schwingung, bei der $V$ verschwindet und $U$ von $\theta$ unabhängig ist, scheint den rascheren unter denjenigen symmetrischen Schwingungen einer Kugel zu entsprechen, bei denen keine Drehung um den Radius der Kugel auftritt.

Bei den übrigen der Platte eigentümlichen Arten von Dehnungsschwingungen setzt sich die Bewegung aus zwei Schwingungen zusammen: die eine kennzeichnet sich durch das Fehlen der Flächendilatation und die andere durch das Fehlen der Drehung um die Normale der Ebene der Platte. Die Frequenzengleichung erhält man durch Elimination des Verhältnisses $A:B$ aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&-A\left[\frac{1-\sigma}{a}\frac{dJ_n(\varkappa a)}{da}+\left(\varkappa^2-\frac{1-\sigma}{a^2}n^2\right)J_n(\varkappa a)\right]\\
&\qquad\qquad+nB(1-\sigma)\left[\frac{1}{a}\frac{dJ_n(\varkappa' a)}{da}-\frac{1}{a^2}J_n(\varkappa' a)\right]=0,\\
&-2nA\left[\frac{1}{a}\frac{dJ_n(\varkappa a)}{da}-\frac{1}{a^2}J_n(\varkappa a)\right]\\
&\qquad\qquad+B\left[\frac{2}{a}\frac{dJ_n(\varkappa' a)}{da}+\left(\varkappa'^2-\frac{2n^2}{a^2}\right)J_n(\varkappa' a)\right]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Diese Schwingungen scheinen physikalisch nicht so wichtig zu sein, als daß es sich verlohnte zu versuchen, die Wurzeln numerisch zu berechnen.

# Autorenregister.

[Die Zahlen verweisen auf die betreffenden Seiten.]

# Sachregister.

[Die Zahlen verweisen auf die betreffenden Seiten.]

---

# Berichtigungen.

S. 15, Z. 20 v. o. lies: die „Steifigkeit“ statt: den „Schubmodul“.
S. 31, Z. 10 u. 16 v. o. lies: Stäbe statt: Balken.
S. 66, Z. 2 v. u. lies: Vortex statt: Vortrex.
S. 89, Z. 7 v. u. lies: $\iint (y Z_\nu - z Y_\nu)\, dS = 0$ statt: $\iint (y Z_\nu - z Y_\nu)$.
S. 145, Z. 9 v. o. lies: 1 Quadratzoll = 6,45148 $cm^2$ statt: 1 Quadratzoll 6,45148 = $cm^2$.
S. 170, Z 5 v. u. lies: p. 167 statt: S. 139.
S. 172, Z. 14 v. u. lies: Gleichung (52) statt: Gleichung (32).

**Fuhrmann,** Dr. **A.,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. 3., verbesserte und vermehrte Auflage. [XII u. 206 S.] 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

II. — Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper 2., verbesserte und vermehrte Auflage. [VI u. 222 S.] 1882. In Leinwand geb. n. ℳ 4.20.

**Gans,** Dr. **Richard,** Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 2.80.

**Gleichen,** Dr. **A.,** Privatdozent an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 20.—

**Heun,** Dr. **K.,** Professor an der Großh. Technischen Hochschule zu Karlsruhe, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 18 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 4.—

**Holzmüller,** Professor Dr. **Gustav,** die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Teile. gr. 8.

I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Zentrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit 287 Figuren und zahlreichen Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] 1897. In Leinwand geb. n. ℳ 5.—

II. — enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorie der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] 1898. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

**Jahnke,** Dr. **E.,** Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

**Januschke, Hans,** Direktor der Staats-Oberrealschule zu Teschen, das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

**Kirchhoff,** Dr. **Gustav,** weiland Professor der Physik an der Universität Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 39.—, in Leinwand geb. n. ℳ 47.—

Einzeln:

I. Band. Mechanik. 4. Auflage, von Dr. W. Wien, Professor an der Universität Würzburg. [X u. 464 S.] 1897. geh. n. ℳ 13.—, in Leinwand geb. n. ℳ 15.—

II. — Optik. Herausgegeben von Dr. Kurt Hensel, Professor an der Universität Marburg. Mit dem Bildnis Kirchhoffs. [VIII u. 272 S.] 1891. geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 12.—

III. — Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor an der Universität Berlin. [X u. 228 S.] 1891. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—

IV. — Theorie der Wärme. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor an der Universität Berlin. [X u. 210 S.] 1894. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—

**Klein**, Dr. **F.**, Professor an der Universität Göttingen, und Dr. **A. Sommerfeld**, Professor an der Universität München, über die Theorie des Kreisels. 4 Teile. gr. 8.

I. Teil. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie [IV u. 196 S.] 1897. geh. n. *M.* 5.60, in Leinwand geb. n. *M.* 6.60.

II. — Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—

III. — Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] 1903. geh. n. *M.* 9.—, in Leinwand geb. n. *M.* 10.—

IV. — [In Vorbereitung.]

**Koenigsberger**, Dr. **Leo**, Professor an der Universität Heidelberg, Hermann von Helmholtzs Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtzs nach einer Ölskizze von Franz von Lenbach vom 30. April 1894. [V u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.40.

——— die Prinzipien der Mechanik. Mathematische Untersuchungen. [XII u. 228 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 9.—

**Lamb, H.**, Professor an der Universität Manchester, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. Joh. Friedel in Charlottenburg. Mit zahlreichen Figuren im Text. [ca. 700 S. in 2 Teilen.] gr. 8. [Teil I erscheint im Herbst 1906.]

**Leibniz, G. W.**, nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.—

**Lorenz**, Dr. **H.**, Professor an der Universität Göttingen, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen. Mit 66 Figuren im Text. [V u. 156 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 5.—

**Mechanik**, herausgegeben von F. Klein und C. H. Müller. 2 Teile. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. IV. Band.

**Ostenfeld**, Dr. **A.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen, technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe von D. Skouge. [VIII u. 457 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

**Perry**, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, Drehkreisel. Deutsche Ausgabe, besorgt von August Walzel, Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn. Mit 58 Abbildungen im Text und 1 Titelbild. [VIII u. 125 S.] 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 2.80.

——— angewandte Mechanik. Deutsche Ausgabe von Ingenieur R. Schick in Cöln. gr. 8. [In Vorbereitung.]

**Physik**, herausgegeben von A. Sommerfeld. 2 Teile. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. V. Band.

**Planck**, Dr. **Max**, Professor an der Universität Berlin, das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Fakultät Göttingen preisgekrönt. [XIII u. 247 S.] gr. 8. 1887. geh. n. *M.* 6.—

**Pockels**, Dr. **F.**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 16.—

**Rausenberger**, Dr. **Otto**, Professor an der Musterschule zu Frankfurt a. M., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Mit Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Band. Mechanik der materiellen Punkte. [VIII u. 318 S.] II. Band. Mechanik der zusammenhängenden Körper. [VI u. 336 S.] gr. 8. 1893. geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 9.20.

